Richard Ohnsorge

Einführung in die Mathematik III

Differentialgeometrie und Funktionalanalysis

en Einführungen Einführung

Richard Ohnsorge

Einführung in die Mathematik III

EINFÜHRUNGEN
– Naturwissenschaften –

Band 3

LIT

Richard Ohnsorge

Einführung in die Mathematik III

Differentialgeometrie und Funktionalanalysis

LIT

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-643-11309-2

Verlagskontakt:
Fresnostr. 2 D-48159 Münster
Tel. +49 (0) 2 51-620 320 Fax +49 (0) 2 51-922 60 99
e-Mail: lit@lit-verlag.de http://www.lit-verlag.de

Auslieferung:
Deutschland: LIT Verlag Fresnostr. 2, D-48159 Münster
Tel. +49 (0) 2 51-620 32 22, Fax +49 (0) 2 51-922 60 99, e-Mail: vertrieb@lit-verlag.de
Österreich: Medienlogistik Pichler-ÖBZ, e-Mail: mlo@medien-logistik.at

Vorwort

In der Differentialgeometrie werden Fundamentalform, kovariante Ableitung, Krümmungstensor und Geodäten behandelt.

Die Funktionalanalysis wird bis zu kompakten Operatoren, C^*-Algebren und stetigem Funktionalkalkül dargestellt. Die erforderlichen Vektorräume und Mengentheoretische Topologie sind vollständig bewiesen.

Alle Beweise sind detailliert ausgeführt.

Anregende Diskussionen mit den Mathematik-HochschullehrerInnen der Universität Münster haben dieses Buch ermöglicht.

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Differentialgeometrie

1. Drehungen, Spiegelungen und senkrechte Matrizen

Als Länge werde immer die 2-Länge verwendet:

$$\| v \|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Definition 1.1 *Sei*

$$M(m \times n) = \{m \times n - \textit{Matrizen } A \textit{ mit } a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

Satz 1.2 *Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A^T A = AA^T = 1$. Dann gilt entweder*
a) A ist eine ***Drehung****, d.h.*

$$\begin{aligned} \exists u \in [0, 2\pi) : \; A &= \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \\ \det A &= 1 \end{aligned}$$

und A ist nur für $u \in \{0, \pi\}$ diagonalisierbar und hat dann den Eigenwert 1 *oder* -1*.*
oder b) A ist eine ***Spiegelung****, d.h.*

$$\begin{aligned} \exists u \in [0, 2\pi) : \; A &= \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix} \\ \det A &= -1 \end{aligned}$$

und A ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten $1, -1$*,*

Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Aus $A^T A = 1_2$ folgt

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists u' \in [0,2\pi) : \left\{\begin{array}{lcl} a &=& \cos u \\ b &=& \sin u \\ c &=& \sin u' \\ d &=& \cos u' \end{array}\right.$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& ac+bd \\ &=& \cos u \sin u' + \sin u \cos u' \\ &=& \sin(u+u') \\ \iff && u+u' \in \mathbb{Z}\pi \end{array}$$

1. Fall: Für $u+u'=2\pi$ gilt

$$\begin{array}{rcl} c &=& \sin u' = \sin(2\pi-u) = -\sin u \\ d &=& \cos u' = \cos(2\pi-u) = \cos u \\ \det A &=& ad-bc = \cos u \cos u - \sin u(-\sin u) = 1 \end{array}$$

2. Fall: Für $u+u'=\pi$ gilt

$$\begin{array}{rcl} c &=& \sin u' = \sin(\pi-u) = \sin u \\ d &=& \cos u' = \cos(\pi-u) = -\cos u \\ \det A &=& ad-bc = \cos u(-\cos u) - \sin u \sin u = -1 \end{array}$$

Mit

$$\begin{array}{rcl} \det(A-tE) &=& \begin{vmatrix} \cos u - t & -\sin u \\ \sin u & \cos u - t \end{vmatrix} \\ &=& (\cos u - t)^2 + \sin^2 u \\ &=& t^2 - 2t\cos u + 1 \end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} \det(A-tE)=0 &\iff& 4\cos^2 u - 4 \geq 0 \\ &\iff& \cos^2 u = 1 \\ &\iff& u \in \{0,\pi\} \\ &\Rightarrow& \pm 1 \text{ ist Eigenwert} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} \det(A-tE) &=& \begin{vmatrix} \cos u - t & \sin u \\ \sin u & -\cos u - t \end{vmatrix} \\ &=& -\cos^2 u - t\cos u + t\cos u + t^2 - \sin^2 u \\ &=& t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \end{array}$$

und 1, -1 sind Eigenwerte. ■

Satz 1.3 *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. F heißt* ***senkrecht*** $\iff$

$$\forall v, w \in V : \ \langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

a) $\forall v \in V : \| F(v) \| = \| v \|$
b) $\langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow \langle F(v), F(w)\rangle = 0$
c) F ist umkehrbar und F^{-1} ist senkrecht.
d) Ist c Eigenwert von F, so gilt $|c| = 1$

Beweis. a)

$$\| F(v) \|^2 = \langle F(v), F(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \| v \|^2$$

b)

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle = 0$$

c) F ist eins zu eins:

$$\begin{aligned} \| F(v) \| = 0 \quad &\Rightarrow \quad \| v \| = \| F(v) \| = 0 \\ &\Rightarrow \quad v = 0 \end{aligned}$$

Somit ist $F : V \to V$ umkehrbar und für alle $v, w \in V$ gilt

$$\left\langle F^{-1}(v), F^{-1}(w)\right\rangle = \left\langle F(F^{-1}(v)), F(F^{-1}(w))\right\rangle = \langle v, w\rangle$$

d) Für einen Eigenvektor v gilt

$$\| v \| = \| F(v) \| = \| cv \| = |c| \, \| v \|$$

und somit $|c| = 1$. ■

Satz 1.4 *Sei $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$. Dann hat p eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$.
Sei $a > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \left(ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} \right) \\ &= a \lim_{x\to\infty} x + b = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \left(ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} \right) \\ &= a \lim_{x\to-\infty} x + b = -\infty \end{aligned}$$

Somit gibt es x,y mit

$$\begin{aligned} p(x) &> x^2 > 0 \\ p(y) &< -y^2 < 0 \end{aligned}$$

Da p stetig ist, gibt es ein u mit $p(u) = 0$. Genauso für $a < 0$. ∎

Satz 1.5 *Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit $A^T A = AA^T = 1$.*
a) Für $\det A = 1$ *besteht A aus zwei Spiegelungen oder einer Drehung*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

b) Für $\det A = -1$ *besteht A aus einer Spiegelung oder einer Spiegelung und einer Drehung*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

Beweis. a) Wegen

$$\det(A - tE) = x^3 + ...$$

hat das charakteristische Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Da A senkrecht ist, gilt

$$\exists \text{ Eigenwert } c_1 = \pm 1 \text{ zu Eigenvektor } w_1$$

Ergänze w_1 zu einer senkrechten Basis w_1, w_2, w_3 mit Länge 1 und setze

$$W = Lin(w_2, w_3)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle F(w_2), w_1 \rangle &= \frac{1}{c_1} \langle F(w_2), F(w_1) \rangle \\ &= \frac{1}{c_1} \langle w_2, w_1 \rangle = 0 \\ \langle F(w_3), w_1 \rangle &= \frac{1}{c_1} \langle F(w_3), F(w_1) \rangle \\ &= \frac{1}{c_1} \langle w_3, w_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

gilt für $W = Lin(w_2, w_3)$

$$F|_W : W \to W$$

ist eins zu eins und somit umkehrbar. Wegen

$$\begin{aligned} & \forall v, w \in \mathbb{R}^3: \ \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \\ \Rightarrow \ & \forall v, w \in W: \ \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

ist $F|_W : W \to W$ senkrecht. Wegen

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} =: A$$

gilt

$$\det A = c_1 \det A'$$

und es ergeben sich die folgende Fälle
1. Fall: $\det A = 1, c_1 = -1$
Dann gilt $\det A' = -1$. Wählt man w_1, w_2 als Eigenvektoren zu den Eigenwerten $c_2 = 1, c_3 = -1$ so gilt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Fall: $\det A = 1, c_1 = 1$
Dann gilt $\det A' = 1$ und

$$\exists u \in (0, 2\pi): \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

3. Fall: $\det A = -1, c_1 = 1$
Dann gilt $\det A' = -1$. Wählt man w_1, w_2 als Eigenvektoren zu den Eigenwerten $c_2 = 1, c_3 = -1$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Fall: $\det A = -1, c_1 = -1$
Dann gilt $\det A' = 1$ und

$$\exists u \in (0, 2\pi): \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

■

2. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1 *a)* $f \in C^\infty \iff$ *f ist unendlich oft differenzierbar.*
b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall.* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *heißt* ***Kurve*** $\iff$ $c \in C^\infty$ *und*

$$\forall t \in I : \ \dot{c}(t) \neq 0$$

Die Kurve hält nie an, ihre Geschwindigkeit ist immer größer Null.

Damit können wir die Kurve später mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen.

Beispiel 2.2 *Kurven sind:*
a) Die ***Gerade***

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto c_0 + t \cdot v$$

mit $v, c_0 \in \mathbb{R}^n$ *und* $v \neq 0$.
b) Die ***Kreislinie***

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

mit $r > 0$.
c) Die ***Schraubenlinie***

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} r\sin t \\ r\cos t \\ ht \end{pmatrix}$$

mit $r > 0$ *und* $h > 0$.

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= v \\ \| \dot{c}(t) \|^2 &= \| v \|^2 \overset{v \neq 0}{>} 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \\ \| \dot{c}(t) \|^2 &= (-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 \\ &= r^2 > 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= \begin{pmatrix} r\cos t \\ -r\sin t \\ h \end{pmatrix} \\
\| \dot{c} \|^2 &= r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + h^2 \\
&= r^2 + h^2 > 0
\end{aligned}$$

■

Man möchte die Kurve nun schneller oder langsamer oder in anderer Richtung durchlaufen, aber weiterhin niemals anhalten.

Definition 2.3 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : J \to I$ umkehrbar mit g, g^{-1} sind unendlich oft differenzierbar, d.h.*

$$\begin{array}{ccc} J & \overset{\tilde{c}=c\circ g}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^n \\ g \searrow & & \nearrow c \\ & I & \end{array}$$

Dann ist

$$\tilde{c} = c \circ g : J \to \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und es gilt einer der beiden Fälle:
g heißt ***orientierungserhaltend*** $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\forall t \in J : \dot{g}(t) > 0 \\
\forall t \in I : \frac{d}{dt}(g^{-1})(t) > 0
\end{aligned}$$

g heißt ***orientierungsumkehrend*** $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\forall t \in J : \dot{g}(t) < 0 \\
\forall t \in I : \frac{d}{dt}(g^{-1})(t) < 0
\end{aligned}$$

d.h. die Ableitung ändert nicht ihr Vorzeichen.

Die Kurve $c \circ g$ bleibt weiterhin nicht stehen.
Beweis. Sei

$$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}id &\equiv 1 \\
1 &= \left(\frac{d}{dt}id\right)(t) \\
&= \frac{d}{dt}(g^{-1}\circ g)(t) \\
&= \left(\frac{dg^{-1}}{dt}\right)(g(t))\cdot \dot{g}(t)
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\forall t\in J:\ \dot{g}(t)\neq 0$$

sonst stünde in der Gleichung links keine 1.
Da g glatt ist, ist $\dot{g}$ stetig. Annahme:

$$\exists s,t:\ \dot{g}(s)>0 \text{ und } \dot{g}(t)<0$$

Wegen der Stetigkeit von $\dot{g}$ gilt

$$\exists u\in J:\ \dot{g}(u)=0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung

$$\forall t\in J:\dot{g}(t)\neq 0$$

Da

$$\left(\frac{d}{dt}g^{-1}\right)(g(t))=\frac{1}{\dot{g}(t)}$$

sind die Vorzeichen gleich und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{c}(t) &= \frac{d}{dt}(c\circ g)(t) \\
&= \underbrace{\dot{c}(g(t))}_{\neq 0,\text{ nach Vor}}\quad\underbrace{\dot{g}(t)}_{\neq 0,\text{ da umkehrbar}} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

■

Beispiel 2.4 *a) Die Kurve wird doppelt so schnell durchlaufen:*

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto 2t$$

b) Die Kurve wird umgekehrt durchlaufen:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto -t$$

Beweis. a)

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{2}t$$

und g sind C^∞.

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}(t) = \dot{c}(g(t)) \cdot \dot{g}(t) = 2\dot{c}(g(t))$$

b) $g = g^{-1}$ ist C^∞.

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}(t) = \dot{c}(g(t)) \cdot \dot{g}(t) = -\dot{c}(g(t))$$

■

Definition 2.5 *Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ hat **Geschwindigkeit 1*** $\iff$

$$\forall t \in I : \parallel \dot{c}(t) \parallel = 1$$

Eine Kurve hat Geschwindigkeit K $\iff$

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall t \in I : \parallel \dot{c}(t) \parallel \equiv K$$

Jetzt wollen wir die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

Satz 2.6 *Für jede Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ gibt es ein orientierungserhaltendes g sodaß die Kurve*

$$c \circ g : J \to \mathbb{R}^n$$

Geschwindigkeit 1 hat.

Beweis. Sei $t_0 \in I$. Setze

$$h : I \to \mathbb{R}^n, s \mapsto \int_{t_0}^{s} \underbrace{\parallel \dot{c}(t) \parallel}_{>0} dt$$

Wegen

$$h'(s) = \parallel \dot{c}(s) \parallel > 0$$

gilt $h \in C^\infty$ und streng monoton wachsend. Damit ist

$$h : I \to h(I)$$

umkehrbar und h^{-1} ist glatt und orientierungserhaltend. Sei

$$g := h^{-1} : h(I) \to I$$

Da $g, h \in C^\infty$ gilt

$$\begin{aligned}
\dot{g}(t) &= \left(\frac{d}{dt}h^{-1}\right)(t) \\
&= \frac{1}{h'(g(t))} = \frac{1}{\| \dot{c}(g(t)) \|}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d}{dt}(c \circ g)(t)\right\| &= \| \dot{c}(g(t))\dot{g}(t) \| \\
&= \left\|\dot{c}(g(t))\frac{1}{\| \dot{c}(g(t) \|}\right\| \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

Bis auf eine Konstante und das Vorzeichen ist die Kurve mit Geschwindigkeit 1 eindeutig.

Satz 2.7 *Seien* $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ *und* $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ *und* $g : I_1 \to I_2$ *mit* $c_1 = c_2 \circ g$.
a) Sind c_1 *und* c_2 *gleich orientiert, so gilt*

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} : \ g(t) = t + t_0$$

b) Sind c_1 *und* c_2 *entgegengesetzt orientiert, so gilt*

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} : \ g(t) = -t + t_0$$

Beweis. Für alle t gilt:

$$\begin{aligned}
1 &= \| \dot{c}_1(t) \| \\
&= \left\|\frac{d}{dt}(c_2 \circ g)(t)\right\| \\
&= \| \dot{c}_2(g(t)) \cdot \dot{g}(t) \| \\
&= \underbrace{\| \dot{c}_2(g(t)) \|}_{=1} |\dot{g}(t)| = |\dot{g}(t)|
\end{aligned}$$

a) Da c_1 und c_2 gleich orientiert sind, gilt $\dot{g}(t) > 0$, d.h.

$$\forall t \in I_1 : \dot{g}(t) = 1$$

Integration ergibt

$$g(t) = t + t_0$$

b) Da c_1 und c_2 umgekehrt orientiert sind, gilt $\dot{g}(t) < 0$, d.h.

$$\forall t \in I_1 : \dot{g}(t) = -1$$

Integration ergibt

$$g(t) = -t + t_0$$

■

Definition 2.8 *Für $A \cdot A^T = A^T \cdot A = 1$ und $b \in \mathbb{R}^n$ heißt*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto Av + b$$

*eine **winkelerhaltende Bewegung**.*

Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und senkrechte Matrizen sind so gemacht, dass es die Geometrie erhält.

Satz 2.9 *Sei A eine senkrechte $n \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ und*

$$F(x) = Ax + b$$

und $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit Geschwindigkeit 1. Dann hat $F \circ c$ auch Geschwindigkeit 1.

Beweis.

$$\frac{d}{dt}(F \circ c)(t) = \frac{d}{dt}(Ac(t) + b) = A\dot{c}(t)$$

Somit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(F \circ c)(t) \right\|^2 &= \langle A\dot{c}(t), A\dot{c}(t) \rangle \\ &= \left\langle A^T A\dot{c}(t), \dot{c}(t) \right\rangle \\ &= \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 1 \end{aligned}$$

■

Wie schnell man die Kurve durchläuft, muss für die Geometrie egal sein. Deshalb definiert man diese Kurven als gleichwertig:

Definition 2.10 ***a)*** *Zwei Kurven $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^n$ seien gleichwertig $\iff$*
*es gibt ein **orientierungserhaltendes** $g : J \to I$ mit $c_1 = c_2 \circ g$*
b) *Zwei Kurven c_1, c_2 seien gleichwertig $\iff$*
es gibt ein $g : J \to I$ mit $c_1 = c_2 \circ g$
c) *Jede Kurve hat zwei Orientierungen.*
d) *c(I) heißt das **Bild** der Kurve.*

Beweis. a) $c_1 \sim c_1$: Mit $J = I$ sind

$$id, id^{-1} : I \to I, t \mapsto t$$

glatt und orientierungserhaltend und es gilt $c_1 = c_2 \circ id$
$c_1 \sim c_2 \Rightarrow c_2 \sim c_1$: Gelte $c_1 = c_2 \circ g$.
g^{-1} ist glatt und orientierungserhaltend und es gilt

$$c_2 = c_2 \circ g \circ g^{-1} = c_1 \circ g^{-1}$$

$c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3 \Rightarrow c_1 \sim c_3$: Sei $c_1 = c_2 \circ g$ und $c_2 = c_3 \circ h$.
$g \circ h$ und $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ sind glatt und orientierungserhaltend, da

$$\frac{d}{dt}(g \circ h) = \underbrace{\dot{g}(h(t))}_{>0} \cdot \underbrace{\dot{h}(t)}_{>0} > 0$$

und es gilt

$$c_1 = c_2 \circ g = c_3 \circ h \circ g$$

b) wie der Beweis für in a), nur orientierungserhaltend muss nicht geprüft werden. Für jede Kurve gilt entweder

$$\forall t \in J: \ \dot{g}(t) > 0$$

oder

$$\forall t \in J: \ \dot{g}(t) < 0$$

■

3. Die Länge einer Kurve

Definition 3.1 *a) Ein* ***Vieleck*** *in* $\mathbb{R}^n$ *ist ein* $P = (a_0, \ldots, a_k)$ *von Vektoren* $a_i \in \mathbb{R}^n$ *mit* $a_{i+1} \neq a_i$ *für alle* $i = 0, \ldots, k-1$
b) Die ***Länge eines Vielecks*** $P = (a_0, \ldots, a_k)$ *ist*

$$L(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \| a_{i+1} - a_i \|$$

also die Summe der Längen seiner Abschnitte (a_i, a_{i+1})*, da*

$$L(a_i, a_{i+1}) = \| a_{i+1} - a_i \|$$

c) Die ***Länge einer Kurve*** $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *ist definiert als*

$$L(c) = \int_a^b \| \dot{c}(t) \| \, dt$$

Das macht Sinn, weil sich die Länge einer Kurve beliebig genau durch Vielecke nähern läßt.

Definition 3.2 *Sei* $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ *eine Unterteilung des Intervalles [a,b]. Die* ***Feinheit*** s *der Unterteilung ist definiert durch*

$$s := \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

Satz 3.3 *Sei* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine Kurve. Dann gilt*
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall$ *Unterteilungen* $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ *mit Feinheit* $\leq \delta$ *gilt*

$$|L(c) - L(P)| < \varepsilon$$

mit dem ***eingeschriebenen Vieleck*** $P = (c(t_0), \ldots, c(t_k))$.
Gilt $c(t_{i+1}) = c(t_i)$*, so soll* $c(t_{i+1})$ *entfallen, damit die Definition für Vielecke weiterhin erfüllt ist. Das ändert nichts an der Länge des Vielecks, da der Term*

$$\| c(t_{i+1}) - c(t_i) \| = \| 0 \| = 0$$

in der Summe ohnehin wegfällt.

Beweis. Für das Integral

$$L(c) = \int_a^b \| \dot{c}(t) \| \, dt$$

gilt: $\forall \varepsilon' > 0 \; \exists \delta_0 > 0 \; \forall$ Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$:

$$\left| \int_a^b \| \dot{c}(t) \| \, dt - \sum_{i=0}^{k-1} \| \dot{c}(t_{i+1}) \| \cdot (t_{i+1} - t_i) \right| < \varepsilon'$$

Da

$$\forall 1 \leq j \leq n: \ \dot{c}_j : [a,b] \to \mathbb{R}$$

stetig sind, sind sie gleichmäßig stetig auf dem kompakten $[a,b]$. Somit

$$\exists \delta_j > 0 \ \forall t,s \in [a,b]: \ (|t-s| < \delta_j \Rightarrow |\dot{c}_j(t) - \dot{c}_j(s)| < \varepsilon')$$

Sei die Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ der Feinheit kleiner

$$\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$$

gegeben.
Da c_j differenzierbar ist, gilt

$$\forall 1 \leq j \leq n \ \exists u_{ij} \in (t_i, t_{i+1}): \ c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i) = \dot{c}_j(u_{ij})(t_{i+1} - t_i)$$

Wegen

$$|t_{i+1} - u_{ij}| \leq |t_{i+1} - t_i| < \delta$$

ergibt sich mit $u_i = (u_{i1}, \ldots, u_{ik})$

$$\begin{aligned}
& | \parallel c(t_{i+1}) - c(t_i) \parallel - \parallel \dot{c}(t_{i+1}) \parallel (t_{i+1} - t_i) | \\
= \ & | \parallel \dot{c}(u_i) \parallel (t_{i+1} - t_i) - \parallel \dot{c}(t_{i+1}) \parallel (t_{i+1} - t_i) | \\
= \ & | \parallel \dot{c}(u_i) \parallel - \parallel \dot{c}(t_{i+1}) \parallel | \ (t_{i+1} - t_i) \\
\leq \ & \parallel \dot{c}(u_i) - \dot{c}(t_{i+1}) \parallel \ (t_{i+1} - t_i) \\
= \ & (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{|\dot{c}_j(u_{ij}) - \dot{c}_j(t_{i+1})|^2}_{<\varepsilon'^2, \text{ da } |t_{i+1} - t_i| < \delta}} \\
\leq \ & \sqrt{n}\varepsilon'(t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}$$

Summieren über i liefert

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=0}^{k-1} \parallel c(t_{i+1}) - c(t_i) \parallel - \sum_{i=0}^{k-1} \parallel \dot{c}(t_{i+1}) \parallel (t_{i+1} - t_i) \right| \\
\leq \ & \sqrt{n}\varepsilon'(b-a)
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
& |L(P) - L(c)| \\
\leq \ & \left| L(P) - \sum_{i=0}^{k-1} \parallel \dot{c}(t_{i+1}) \parallel (t_{i+1} - t_i) \right| \\
& + \left| \sum_{i=0}^{k-1} \parallel \dot{c}(t_{i+1}) \parallel (t_{i+1} - t_i) - L(c) \right| \\
\leq \ & \sqrt{n}\varepsilon'(b-a) + \varepsilon'
\end{aligned}$$

Für $0 < \varepsilon < \dfrac{\varepsilon'}{1+\sqrt{n}(b-a)}$ folgt

$$|L(P) - L(c)| < \varepsilon$$

■

Die Länge einer Kurve ist die kleinste obere Schranke der eingeschriebenen Vielecke.

Satz 3.4 *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und P ein in c eingeschriebenes Vieleck. Dann gilt*
a) Geht P' aus P durch Verfeinerung hervor, so gilt $L[P] \leq L[P']$.
b) $L[P] \leq L(c)$
c) $\sup_P L[P] = L[c]$

Beweis. a) 1. Fall: Sei $P = (t_0, \ldots, t_k)$ und $P' = P \cup s_j$ mit $s_j \in (t_j, t_{j+1})$, d.h. $P' = (t_0, \ldots, t_j, s_j, t_{j+1}, \ldots, t_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
L(P) &= \sum_{i=0}^{j-1} \| t_{i+1} - t_i \| + \| t_{j+1} - t_j \| + \sum_{i=j+1}^{k-1} \| t_{i+1} - t_i \| \\
&\leq \sum_{i=0}^{j-1} \| t_{i+1} - t_i \| + \| t_{j+1} - s_j \| + \| s_j - t_j \| \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{k-1} \| t_{i+1} - t_i \| \\
&= L(P')
\end{aligned}$$

2. Fall: Ist $P' = P \cup \{s_1, \ldots, s_n\}$, so folgt in n Schritten

$$L(P) \leq L(P')$$

b) Annahme: Es gibt ein P mit $L(P) > L(c)$, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$L(P) = L(c) + \varepsilon$$

Sei P' eine feinere Unterteilung von P mit Feinheit $< \delta$.
Dann gilt mit a)

$$L(P') \geq L(P) \geq L(c) + \varepsilon$$

im Widerspruch zu

$$|L(P') - L(c)| < \varepsilon$$

für jede Unterteilung der Feinheit $< \delta$.
c) Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \text{ Vieleck } P_n : |L(P_n) - L(c)| < \frac{1}{n}$$

Somit

$$L(c) - \lim_{n\to\infty} L(P_n) = \lim_{n\to\infty} |L(P_n) - L(c)| = 0$$

■

Satz 3.5 *Es gilt*

$$L(c) = L(c \circ g)$$

Beweis. Sei $g : [a', b'] \to [a, b]$.
1. Fall: $\forall t : \dot{g}(t) > 0$, d.h. g ist monoton wachsend und es gilt $g(a') = a$ und $g(b') = b$.

$$\begin{aligned} L(c\circ g) &= \int_{a'}^{b'} \left\| \frac{d}{dt}(c \circ g)(t) \right\| dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \| \dot{c}(g(t)) \| \, |\dot{g}(t)| dt \\ &= \int_{a=g(a')}^{b=g(b')} \| \dot{c}(s) \| \, ds \\ &= L(c) \end{aligned}$$

2. Fall: $\forall t : \dot{g}(t) < 0$, d.h. g ist monoton fallend und es gilt $g(a') = b$ und $g(b') = a$.

$$\begin{aligned} L(c\circ g) &= \int_{a'}^{b'} \left\| \frac{d}{dt}(c \circ g)(t) \right\| dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \| \dot{c}(g(t)) \| \underbrace{|\dot{g}(t)|}_{=-\dot{g}(t)} dt \\ &= -\int_{b=g(a')}^{a=g(b')} \| \dot{c}(s) \| \, ds \\ &= L(c) \end{aligned}$$

■

Satz 3.6 *Sei* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *mit* $\| \dot{c} \| = 1$. *Dann gilt*

$$L[c|_{[a,s]}] = L[(a, s)]$$

Beweis.

$$L[c|_{[a,s]}] = \int_a^s \| \dot{c}(t) \| \, dt = \int_a^s 1 dt = s - a =$$

■

4. Kurven im $\mathbb{R}^2$

Definition 4.1 *a)* $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \| v \| = 1\}$
b)

$$n : S^1 \subset \mathbb{R}^2 \to S^1 \subset \mathbb{R}^2, v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v$$

definiert zu jedem Vektor der Länge 1 einen eindeutigen senkrechten Vektor der Länge 1: Den Vektor der um 90° im Uhrzeigersinn gedreht ist.
Dieser heißt ***Senkrechtenvektor****.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \| n(v) \|^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, v \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle v, n(v) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -v_1 v_2 + v_1 v_2 = 0 \end{aligned}$$

■

Satz 4.2 *Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt*
a)

$$\det(v, w) = \left\langle v, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} w \right\rangle$$

b)

$$\det(w, v) = \left\langle v, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w \right\rangle$$

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \det(v, w) &= v_1 w_2 - v_2 w_1 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle v, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} w \right\rangle \end{aligned}$$

b) Mit a) folgt

$$\begin{aligned} \det(w,v) &= w_1v_2 - w_2v_1 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle v, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w \right\rangle \end{aligned}$$

■

Definition 4.3 *Eine senkrechte Basis v, w mit Länge 1 im $\mathbb{R}^2$ heißt* ***positiv orientiert*** $\Longleftrightarrow$

$$\det(v,w) = 1$$

Satz 4.4 *Sei* $\| \dot{c} \| = 1$ *und*

$$n(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t)$$

Dann ist $(\dot{c}(t), n(t))$ eine positiv orientierte senkrechte Basis mit Länge 1.

Beweis.

$$\begin{aligned} \| \dot{c}(t) \| &= 1 \\ \| n(\dot{c}(t)) \| &= 1 \\ n(t) &\perp \dot{c}(t) \end{aligned}$$

$\dot{c}, n$ ist positiv orientiert, da

$$\begin{aligned} \det(\dot{c}, n) &= \left\langle \dot{c}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} n \right\rangle \\ &= \left\langle \dot{c}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c} \right\rangle \\ &= \left\langle \dot{c}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{c} \right\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Die Krümmung k einer Kurve soll beschreiben, wie stark sich die momentane Bewegungsrichtung $\dot{c}(t)$ ändert. Man betrachtet also den Anteil von $\ddot{c}(t)$ in Richtung n. Die Bewegungsrichtung ändert sich stärker, wenn man die Kurve schneller durchläuft. Deshalb muss c Geschwindigkeit 1 haben.

Satz 4.5 *Sei c mit Geschwindigkeit 1.*
a) Es gilt

$$\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle = 0$$

*b) Da $\dot{c}, n$ eine senkrechte Basis mit Länge 1 ist und $\ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$, definiert man die **Krümmung** $k : I \to \mathbb{R}$ durch*

$$\ddot{c}(t) = k(t) \cdot n(t)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} k(t) &= \langle \ddot{c}(t), n(t) \rangle \\ &= \det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t)) \end{aligned}$$

Beweis. a) Da $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle \equiv 1$ liefert Ableiten

$$0 = \frac{d}{dt} 1 = \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle + \langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = 2 \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle$$

b)

$$\begin{aligned} k(t) &= k(t) \langle n(t), n(t) \rangle \\ &= \langle k(t) n(t), n(t) \rangle \\ &= \langle \ddot{c}(t), n(t) \rangle \\ &= \left\langle \ddot{c}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c} \right\rangle \\ &= \det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t)) \end{aligned}$$

■

Satz 4.6 *Die Krümmung ist **positiv** $\iff$ die Kurve krümmt sich nach links.*
*Die Krümmung ist **negativ** $\iff$ die Kurve krümmt sich nach rechts.*

Beweis.

$$\begin{aligned} & k(t_0) > 0 \\ \iff \quad & \langle \ddot{c}(t_0), n(t_0) \rangle > 0 \\ \iff \quad & \left\langle \lim_{t \searrow t_0} \frac{\dot{c}(t) - \dot{c}(t_0)}{\underbrace{t - t_0}_{>0}}, n(t_0) \right\rangle > 0 \\ \overset{\langle \dot{c}(t_0), n(t_0) \rangle = 0}{\iff} \quad & \lim_{t \searrow t_0} \langle \dot{c}(t), n(t_0) \rangle > 0 \\ \iff \quad & \text{Für } t_0 + \varepsilon > t > t_0 \text{ ist der Anteil von } \dot{c}(t) \\ & \text{ in Richtung } n(t_0) \text{ positiv} \\ \iff \quad & \text{Die Kurve krümmt sich nach links} \end{aligned}$$

Analog für $k(t_0) < 0$. ∎

Ein großer Kreis hat eine kleine Krümmung, ein kleiner Kreis hat eine große Krümmung. Das wird durch k wiedergegeben.

Beispiel 4.7 *Die Kreislinie*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto r \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{r} \\ \sin \frac{t}{r} \end{pmatrix}$$

hat die konstante Krümmung

$$k = \frac{1}{r}$$

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} \end{pmatrix} \\
\| \dot{c}(t) \|^2 &= \left(-\sin \frac{t}{r} \right)^2 + \left(\cos \frac{t}{r} \right)^2 = 1 \\
\ddot{c}(t) &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{r} \\ -\sin \frac{t}{r} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
k(t) &= \det(\dot{c}, \ddot{c}) \\
&= \frac{1}{r} \det \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} & -\cos \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} & -\sin \frac{t}{r} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r} \left(-\sin \frac{t}{r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\cos \frac{t}{r} \right)^2 \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

∎

Satz 4.8 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit* ***Geschwindigkeit 1****. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} \ddot{c} \\ \dot{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c} \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kn \\ -k\dot{c} \end{pmatrix}$$

Beweis. a) $\ddot{c} = kn$ ist die Definition von k
b) Ableiten von $\langle n, n \rangle = 1$ ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \langle n, n \rangle = 2 \langle \dot{n}, n \rangle \\
\dot{n} &\perp n
\end{aligned}$$

Da $\dot{c}, n$ senkrechte Basis mit Länge 1 sind, gibt es ein $a(t) \in \mathbb{R}$ mit

$$\dot{n}(t) = a(t) \cdot \dot{c}(t)$$

Ableiten von $\langle n, \dot{c} \rangle = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \dot{n}, \dot{c} \rangle + \langle n, \ddot{c} \rangle \\ &= \langle a\dot{c}, \dot{c} \rangle + \langle n, kn \rangle \\ &= a + k \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} a &= -k \\ \dot{n} &= -k\dot{c} \end{aligned}$$

■

Wenn wir das Objekt in der Ebene drehen oder verschieben, bleibt die Krümmung gleich.

Bei einer orientierungserhaltenden Bewegung ändert sich die Krümmung nicht.

Definition 4.9 *Sei $b \in \mathbb{R}^2$ und A senkrechte Matrix mit*

$$\det(Av, Aw) = \det(v, w)$$

Dann heißt $F = Ax + b$ ***orientierungserhaltende Bewegung****.*

Satz 4.10 *Ist c mit Geschwindigkeit 1, $F = Ax + b$ eine orientierungserhaltende Bewegung mit senkrechtem A, so gilt*

$$k(F \circ c) = k(c)$$

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F \circ c) &= \frac{d}{dt}(Ac(t) + b) = A\dot{c}(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}(F \circ c) &= \frac{d}{dt}(A\dot{c}) = A\ddot{c}(t) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} k(F \circ c) &= \det(A\dot{c}, A\ddot{c}) \\ &\overset{Vor}{=} \det(\dot{c}, \ddot{c}) \\ &= k(c) \end{aligned}$$

■

Es gibt eine praktische Formel, wie man die Krümmung berechnet, ohne vorher die Kurve auf Geschwindigkeit 1 abzuändern.

Satz 4.11 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve. Dann gilt*

$$k(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\| \dot{c}(t) \|^3}$$

Beweis. Sei $g : J \to I$ orientierungserhaltend und $\tilde{c} = c \circ g$ sodaß

$$\left\| \frac{d}{ds} \tilde{c} \right\| \equiv 1$$

Aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\tilde{c} &= \frac{d}{ds}(c \circ g)(s) \\ &= \dot{c}(g(s)) \cdot \dot{g}(s) \\ 1 &= \left\| \frac{d}{ds}\tilde{c} \right\| \\ &= \|\dot{c}(g(s))\| \cdot |\dot{g}(s)| \end{aligned}$$

folgt

$$\dot{g}(s) = |\dot{g}(s)| = \frac{1}{\| \dot{c}(g(s)) \|}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}(c \circ g)(s) &= \frac{d}{ds}\left(\dot{c}(g(s)) \cdot \dot{g}(s)\right) \\ &= \ddot{c}(g(s)) \cdot \dot{g}(s)^2 + \dot{c}(g(s)) \cdot \ddot{g}(s) \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} k(\tilde{c}) &= \det\left(\frac{d}{ds}\tilde{c}, \frac{d^2}{ds^2}\tilde{c}\right) \\ &= \dot{g}(s)^3 \det\left(\dot{c}(g(s)) \ , \ddot{c}(g(s))\right) + \dot{g}(s) \cdot \ddot{g}(s) \cdot \underbrace{\det\left(\dot{c}(g(s)), \dot{c}(g(s))\right)}_{=0} \\ &= \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\| \dot{c}(t) \|^3} \end{aligned}$$

■

5. Kurven im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^2$ war der Raum senkrecht zu $\dot{c}(t)$ eindimensional. Damit ließ sich ein eindeutiger Senkrechtenvektor definieren durch die 90°-Drehung im Uhrzeigersinn. Und mit diesem ließ sich die Krümmung definieren.
Im $\mathbb{R}^3$ bilden die Vektoren senkrecht zu $\dot{c}(t)$ eine Ebene.
Für $\ddot{c}(t_0) \neq 0$ wählt man die Richtung von $\ddot{c}(t_0)$. Auf das Vorzeichen der Krümmung muss man aber verzichten.

Definition 5.1 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Geschwindigkeit 1.*

$$k : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \| \ddot{c}(t) \|$$

*heißt **Krümmung** von c*
Ist $t_0 \in I$ und $k(t_0) \neq 0$, so heißt

$$n(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}\ddot{c}(t_0) = \frac{\ddot{c}(t_0)}{\| \ddot{c}(t_0) \|}$$

*der **Senkrechtenvektor** von c in t_0.*

Satz 5.2 *a) Es gilt*

$$k = \langle n, \ddot{c} \rangle$$

b)

$$\langle n(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = 0$$

c) Ist $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit Geschwindigkeit 1, so gilt

$$\begin{aligned} c \text{ ist eine Gerade} \quad &\Longleftrightarrow \quad \ddot{c} \equiv 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad k = 0 \end{aligned}$$

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \langle n, \ddot{c} \rangle &= \left\langle \frac{\ddot{c}}{\| \ddot{c} \|}, \ddot{c} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\| \ddot{c} \|} \| \ddot{c} \|^2 = \| \ddot{c} \| \\ &= k \end{aligned}$$

b) Da $\| \dot{c} \| \equiv 1$ ergibt Ableiten

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2 \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle$$

und somit

$$\langle n(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = \frac{1}{k(t_0)} \langle \ddot{c}(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = 0$$

c) "$\Rightarrow$": c ist eine Gerade $\iff \exists a, v \in \mathbb{R}^3$:

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto a + vt$$

Dann gilt $\dot{c}(t) = v$ und $\ddot{c}(t) \equiv 0$.
"$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned} \ddot{c} \equiv 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{c} = v = konstant \\ &\Rightarrow \quad c = a + v \cdot t \end{aligned}$$

■

Definition 5.3 *Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiere*

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Satz 5.4 *Es gilt*

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \rangle &= \det(a, b, c) \\ \langle a \times b, a \times b \rangle &= \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2 \end{aligned}$$

$\sqrt{\langle a \times b, a \times b \rangle}$ *ist die Fläche des Parallelogrammes von a, b.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \rangle &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \det(a, b, c) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2 \\ = \; & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ = \; & a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 \\ & + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 \\ & + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ & - a_1^2b_1^2 - a_1a_2b_1b_2 - a_1a_3b_1b_3 \\ & - a_1a_2b_1b_2 - a_2^2b_2^2 - a_2a_3b_2b_3 \\ & - a_1a_3b_1b_3 - a_2a_3b_2b_3 - a_3^2b_3^2 \\ = \; & \left\langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\text{Fläche(Parallelogramm(a,b))}^2 &= \| a \|^2 \| b \|^2 \sin^2 u \\
&= \| a \|^2 \| b \|^2 \,(1 - \sin^2 u) \\
&= \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2
\end{aligned}$$

■

Definition 5.5 *a,b,c heißt* ***positiv orientierte Basis*** *des* $\mathbb{R}^3 \iff$

$$\det(a, b, c) > 0$$

Satz 5.6 *Sind $a, b \in \mathbb{R}^3$ senkrecht mit Länge 1, so sind $a, b, a \times b$ eine senkrechte Basis mit Länge 1 mit positiver Orientierung, d.h.*

$$\det(a, b, a \times b) = 1$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
\langle a, a \rangle &= 1 = \langle b, b \rangle \\
\langle a, b \rangle &= 0
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\langle a, a \times b \rangle &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= 0 \\
\langle b, a \times b \rangle &= b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

sind alle Vektoren senkrecht. Wegen

$$\begin{aligned}
\langle a \times b, a \times b \rangle &= \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2 \\
&= 1 \cdot 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

haben alle Vektoren die Länge 1.

$$\begin{aligned}
\det(a, b, a \times b) &= \langle a \times b, a \times b \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

ergibt sich die positive Orientierung. ■

Vervollständige mit diesen Sätzen $\dot{c}(t_0), n(t_0)$ zu einer senkrechten Basis mit Länge 1 von $\mathbb{R}^3$.

Definition 5.7 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit Geschwindigkeit 1. Sei $t \in I$ und $k(t) \neq 0$*
a) Mit

$$b(t) := \dot{c}(t) \times n(t)$$

wird $\dot{c}(t), n(t), b(t)$ ein positiv orientierte senkrechte Basis mit Länge 1.
*b) Die **Windung** von c in t ist*

$$w(t) := \langle \dot{n}(t), b(t) \rangle$$

Die Krümmung beschreibt, wie stark sich der Geschwindigkeitsvektor in Richtung des Senkrechtenvektors dreht.
Die Windung beschreibt, wie stark sich der Senkrechtenvektor aus der Ebene $Lin(\dot{c}, n)$ herausdreht.

Satz 5.8 *Es gilt*

$$w = \det(\dot{n}, \dot{c}, n)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} w &= \langle \dot{n}, b \rangle \\ &= \langle \dot{n}, \dot{c} \times n \rangle \\ &= \det(\dot{n}, \dot{c}, n) \end{aligned}$$

■

Definition 5.9 *Sei $b \in \mathbb{R}^3, A$ 3×3-Matrix mit*

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3 : \det(Au, Av, Aw) = \det(u, v, w)$$

*Dann heißt $F = Ax + b$ eine **orientierungserhaltende Bewegung**.*

Satz 5.10 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit Geschwindigkeit 1 mit $k > 0$ und $F := Ax+b$ orientierungserhaltende winkel erhaltende Bewegung. Dann gilt für $\tilde{c} := F \circ c$*

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k \\ \tilde{w} &= w \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{c} &= \dot{F}(c(t))\dot{c}(t) = A\dot{c}(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\tilde{c} &= A\ddot{c}(t) \end{aligned}$$

ergibt

$$\left\| \frac{d}{dt}\tilde{c} \right\|^2 = \langle A\dot{c}, A\dot{c} \rangle = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$$
$$\left\| \frac{d^2}{dt^2}\tilde{c} \right\|^2 = \langle A\ddot{c}, A\ddot{c} \rangle = \langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle > 0$$

Damit ist $\tilde{n}$ definiert und

$$\tilde{k}^2 = \left\| \frac{d^2}{dt^2}\tilde{c} \right\|^2 = \| \ddot{c} \|^2 = k^2$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \frac{A\ddot{c}}{\tilde{k}} = An \\ \tilde{w} &= \det\left(\frac{d}{dt}\tilde{n}, \frac{d}{dt}\tilde{c}, \tilde{n} \right) \\ &= \det(A\dot{n}, A\dot{c}, An) \\ &= \det(\dot{n}, \dot{c}, n) = w \end{aligned}$$

■

Satz 5.11 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit* ***Geschwindigkeit 1*** *und $\forall t \in I : \ k(t) \neq 0$. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} \ddot{c} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kn \\ -k\dot{c} + wb \\ -wn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & w \\ 0 & -w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c} \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

Beweis. 1. Zeile: $\ddot{c} = k \cdot n$ ist die Definition von n.
2. Zeile: Da $\langle n, \dot{c} \rangle = 0$ und $\langle n, n \rangle = 1$ ergibt Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle n, \dot{c} \rangle = \langle \dot{n}, \dot{c} \rangle + \langle n, \ddot{c} \rangle \\ &= \langle \dot{n}, \dot{c} \rangle + k \\ 0 &= \frac{d}{dt}\langle n, n \rangle = 2\langle \dot{n}, n \rangle \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \langle \dot{n}, \dot{c} \rangle \dot{c} + \underbrace{\langle \dot{n}, n \rangle}_{=0} n + \langle \dot{n}, b \rangle b \\ &= -k\dot{c} + wb \end{aligned}$$

3. Zeile: Da $\langle b, \dot{c} \rangle = 0$, $\langle b, n \rangle = 0$ und $\langle b, b \rangle = 1$ ergibt Ableiten

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \langle b, \dot{c} \rangle = \left\langle \dot{b}, \dot{c} \right\rangle + \langle b, \ddot{c} \rangle \\
&= \left\langle \dot{b}, \dot{c} \right\rangle + k \langle b, n \rangle = \left\langle \dot{b}, \dot{c} \right\rangle \\
0 &= \frac{d}{dt} \langle b, n \rangle = \left\langle \dot{b}, n \right\rangle + \langle b, \dot{n} \rangle \\
&= \left\langle \dot{b}, n \right\rangle + w \\
0 &= \frac{d}{dt} \langle b, b \rangle = 2 \left\langle \dot{b}, b \right\rangle
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
\dot{b} &= \underbrace{\left\langle \dot{b}, \dot{c} \right\rangle}_{=0} \dot{c} + \left\langle \dot{b}, n \right\rangle n + \underbrace{\left\langle \dot{b}, b \right\rangle}_{=0} b \\
&= -wn
\end{aligned}$$

■

Satz 5.12 *Seien $k, w : I \to \mathbb{R}$ C^∞ und $k > 0$. Dann gibt es eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit Geschwindigkeit 1, mit Krümmung k und Windung w.*
Bis auf orientierungserhaltende winkel erhaltende Bewegung ist sie eindeutig.

Beweis. a) Zum System von linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c \\ \dot{c} \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & w \\ 0 & 0 & -w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \dot{c} \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

gibt es genau eine Lösung mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
c(t_0) &= 0 \\
\dot{c}(t_0) &= e_1 \\
n(t_0) &= e_2 \\
b(t_0) &= e_3
\end{aligned}$$

Da die Differentialgleichung linear ist, ist die Lösung auf ganz I definiert.
b) Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \dot c, \dot c\rangle &= 2\langle \ddot c, c\rangle = 2k\langle n, \dot c\rangle \\
\frac{d}{dt}\langle n, n\rangle &= 2\langle \dot n, n\rangle = 2\langle -k\dot c + wb, n\rangle \\
&= 2w\langle b, n\rangle - 2k\langle \dot c, n\rangle \\
\frac{d}{dt}\langle b, b\rangle &= 2\left\langle b, \dot b\right\rangle = -2w\langle b, n\rangle \\
\frac{d}{dt}\langle b, \dot c\rangle &= \left\langle \dot b, \dot c\right\rangle + \langle b, \ddot c\rangle \\
&= -w\langle n, \dot c\rangle + k\langle b, n\rangle \\
\frac{d}{dt}\langle b, n\rangle &= \left\langle \dot b, n\right\rangle + \langle b, \dot n\rangle \\
&= -w\langle n, n\rangle + w\langle b, b\rangle - k\langle b, \dot c\rangle \\
\frac{d}{dt}\langle n, \dot c\rangle &= \langle \dot n, \dot c\rangle + \langle n, \ddot c\rangle \\
&= -k\langle \dot c, \dot c\rangle + w\langle b, \dot c\rangle + k\langle n, n\rangle
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \langle \dot c, \dot c\rangle \\ \langle n, n\rangle \\ \langle b, b\rangle \\ \langle b, \dot c\rangle \\ \langle b, n\rangle \\ \langle n, \dot c\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2w & -2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & -w \\ 0 & -w & w & -k & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & w & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \dot c, \dot c\rangle \\ \langle n, n\rangle \\ \langle b, b\rangle \\ \langle b, \dot c\rangle \\ \langle b, n\rangle \\ \langle n, \dot c\rangle \end{pmatrix}
$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung mit einer eindeutigen Lösung.
Zur Zeit $t = 0$ ist $\dot c, n, b$ eine senkrechte Basis mit Geschwindigkeit 1, d.h. es gilt

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Die konstante Funktion

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt das System linearer Differentialgleichung mit diesen Anfangswerten. Wegen der Eindeutigkeit gilt für alle $t \in I$

$$\begin{pmatrix} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle \\ \langle n, n \rangle \\ \langle b, b \rangle \\ \langle b, \dot{c} \rangle \\ \langle b, n \rangle \\ \langle n, \dot{c} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\forall t \in I$ ist $\dot{c}, n, b$ senkrechte Basis mit Länge 1.
c) Die senkrechte Basis bleibt positiv orientiert. Annahme:

$$\exists t_1 < t_2 : \begin{cases} \det(\dot{c}, n, b)(t_1) = +1 \\ det(\dot{c}, n, b)(t_2) = -1 \end{cases}$$

Wegen der Stetigkeit von det gilt

$$\exists t_1 < t_3 < t_2 : \ \det(\dot{c}, n, b)(t_3) = 0$$

im Widerspruch dazu, dass $\forall t \in I : \ \dot{c}, n, b$ Basis ist.
d) Wegen $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$ hat c Geschwindigkeit 1.
Eindeutigkeit: Sei $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}$ eine Kurve mit Krümmung k und Windung w. Setze

$$\begin{aligned} p &:= \tilde{c}(t_0) \\ A &:= \left(\frac{d}{dt} \tilde{c}(t_0), \tilde{n}(t_0), \tilde{b}(t_0) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Da $\frac{d}{dt}\tilde{c}, \tilde{n}, \tilde{b}$ eine senkrechte Basis mit Länge 1 sind, gilt

$$\begin{aligned} A^T &= A^{-1} \\ \det A^{-1} &= \det A^T = \det A = 1 \end{aligned}$$

Sei

$$F := Ax + p$$

Wir haben schon gezeigt, dass $\hat{c} := F \circ w$ dieselbe Krümmung und Windung wie $\tilde{c}$ hat. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \hat{c}(t_0) &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt}\hat{c}(t_0), \hat{n}(t_0), \hat{b}(t_0)\right) &= (e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

$(c, v, n, b), (\hat{c}, \frac{d}{dt}\hat{c}, \hat{n}, \hat{b})$ erfüllen das System linearer Differentialgleichungen mit denselben Anfangsbedingungen und stimmen somit überein:

$$c = \hat{c} = F \circ \tilde{c}$$

■

Beispiel 5.13 *Die **Schraubenlinie***

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ t \end{pmatrix}$$

hat die Windung

$$w = \frac{1}{2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \| \dot{c}(t) \| &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right) \\ &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ \ddot{c}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}^3} \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ k &= \| \ddot{c}(t) \| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Somit läßt sich n(t) bilden für alle t.

$$
\begin{aligned}
n(t) &= \frac{\ddot{c}(t)}{k(t)} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\sin\frac{t}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
b(t) &= \dot{c}(t) \times n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{t}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\sin\frac{t}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\cos\frac{t}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
w(t) &= \langle \dot{n}(t), b(t) \rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{t}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\cos\frac{t}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

■

6. Ein Fixpunktsatz

Satz 6.1 *Sei X vollständiger Abstandsraum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to A$. Gilt für ein $0 < L < 1$*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq L \| x - y \|$$

so hat f genau einen Fixpunkt

$$\exists!\ x \in A : f(x) = x$$

und

$$\forall y \in A : \lim_{n \to \infty} f^n(y) = x$$

d.h. für jeden Startwert y in A geht die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n := f^n(y)$ gegen den eindeutigen Grenzwert x.

Beweis. a) Es gilt

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq L^n \| x_1 - x_0 \|$$

n=1:

$$\| x_2 - x_1 \| = \| f(x_1) - f(x_0) \| \leq L \| x_1 - x_0 \|$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \| x_{n+2} - x_{n+1} \| &= \| f(x_{n+1}) - f(x_n) \| \\ &\leq L \| x_{n+1} - x_n \| \\ &\leq L \cdot L^n \| x_1 - x_0 \| \\ &= L^{n+1} \| x_1 x_0 \| \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \| x_{n+p} - x_n \| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{p} (x_{n+i} - x_{n+i-1}) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \| x_{n+i} - x_{n+i-1} \| \\ &\overset{a)}{\leq} \sum_{i=1}^{p} L^{n+i} \| x_1 - x_0 \| \\ &\leq L^n \| x_1 - x_0 \| \sum_{i=1}^{p} L^i \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} \| x_1 - x_0 \| \end{aligned}$$

c) Wegen b) ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.
Da X vollständig ist, hat sie einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Da A abgeschlossen ist, und $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in A$, gilt

$$x \in A$$

d) f ist stetig: Für $\| x - y \| < \frac{\varepsilon}{L}$ gilt

$$\| f(x) - f(y) \| \leq L \| x - y \| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

e) x ist ein Fixpunkt: Da f stetig ist, gilt

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

f) x ist eindeutig: Sei y auch ein Fixpunkt, dann gilt

$$\begin{aligned} \| y - x \| &= \| f(y) - f(x) \| \leq L \| y - x \| \\ \underbrace{(1-L)}_{>0}\underbrace{\| y - x \|}_{\geq 0} &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

■

7. Der Umkehrsatz

Seien X,Y endlich-dimensionale Vektorräume.

Satz 7.1 *Sei $U \subset X$ offen und $f : U \to Y$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $y \in \overline{B(x,\varepsilon)} \subset U$:*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \| Df \|_{\overline{B(x,\varepsilon)}} \| x - y \|$$

Beweis. Da U offen ist, gilt

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon' > 0 : \ B(x,\varepsilon') &\subset U \\ \forall \varepsilon' > \varepsilon > 0 : \ \overline{B(x,\varepsilon)} &\subset U \end{aligned}$$

Da

$$\| Df \| : \overline{B(x,\varepsilon)} \to \mathbb{R}$$

stetig ist und $\overline{B(x,\varepsilon)}$ kompakt ist, nimmt $\| Df \|$ sein Maximum an. Setze

$$L := \max\{\| Df(y) \| : y \in \overline{B(x,\varepsilon)}\}$$

und

$$\begin{aligned} &g : [0,1] \to U, t \mapsto y + t(x-y) \\ &F_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \| f(g(t)) - f(y) \| - t(L+\varepsilon) \| x - y \| \end{aligned}$$

und $t_0 \in [0,1)$ beliebig mit $y = g(t_0)$. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow t_0} \left\| \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} \right\| &= \| D(f \circ g)(t_0) \| \\ &= \| Df(g(t_0)) \ g'(t_0) \| \\ &= \| Df(g(t_0)) \ (x-y) \| \\ &\leq \| Df \|_{\overline{B(x,\varepsilon)}} \| x - y \| \\ &= L \| x - y \| \end{aligned}$$

und da $\| \cdot \|$ stetig ist, gilt

$$\exists \delta > 0 \ \forall t \in (t_0, t_0 + \delta] : \ \left\| \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} \right\| \leq (L+\varepsilon) \| x - y \|$$

Wegen

$$\begin{aligned}
& \frac{F_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(t_0)}{t - t_0} \\
\overset{Def}{=} \quad & \frac{\| f(g(t)) - f(y) \| - t(L+\varepsilon) \| x - y \|}{t - t_0} \\
& - \frac{\| f(g(t_0)) - f(y) \| - t_0(L+\varepsilon) \| x - y \|}{t - t_0} \\
\overset{\Delta}{\leq} \quad & \frac{\| f(g(t)) - f(g(t_0)) \|}{t - t_0} - (L+\varepsilon) \| x - y \| \\
\leq \quad & (L+\varepsilon) \| x - y \| - (L+\varepsilon) \| x - y \| \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

ist F_ε monoton fallend in $(t_0, t_0 + \delta)$.
Da $t_0 \in [0,1]$ beliebig war, ist F_ε monoton fallend auf [0,1].
Wegen

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(0) &= \| f(g(0)) - f(y) \| - 0(L+\varepsilon) \| x - y \| \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : F_\varepsilon(1) \leq 0$$

Da F_ε stetig in ε ist, folgt

$$\begin{aligned}
\| f(x) - f(y) \| - L \| x - y \| &= F_0(1) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(1) \\
&\leq 0 \\
\| f(x) - f(y) \| &\leq L \| x - y \|
\end{aligned}$$

■

Satz 7.2 *Seien $U \subset X, V \subset Y$ offen, $F : U \to V$ umkehrbar und F, F^{-1} differenzierbar. Dann gilt mit $G = F^{-1}$*
a) $\dim X = \dim Y$
b) $\forall x \in U : \; DG(F(x)) = (DF(x))^{-1}$

Beweis. Aus

$$\begin{aligned}
F \circ G &= id_U \\
G \circ F &= id_V
\end{aligned}$$

folgt für $y = F(x)$

$$\begin{aligned}
id_Y(y) &= Did_Y(y) = D(F \circ G)(y) \\
&= DF(G(y)) \circ DG(y) \\
&= DF(x) \circ DG(F(x)) \\
id_X &= Did_X = D(G \circ F)(x) \\
&= DG(F(x)) \circ DF(x)
\end{aligned}$$

Damit ist $DF(x) : X \to Y$ umkehrbar und es gilt

$$DG(F(x)) = (DF(x))^{-1}$$

und

$$\begin{aligned}
\dim Y &\overset{Y=DF(x)X}{=} \dim Bild\ DF(x) \\
&= \dim Bild\ DF(x) + \underbrace{Null\ DF(x)}_{=0} \\
&= \dim X
\end{aligned}$$

■

Satz 7.3 *Sei $U \subset X$ offen und $a \in U$. Seien $F : U \to Y$ stetig differenzierbar und DF(a) umkehrbar.*
Dann existiert ein offenes $U_0(a) \subset U$ sodaß $V := F(U_0)$ offene Umgebung von $F(a)$ ist und

$$\begin{aligned}
&F : U_0 \to V \text{ ist umkehrbar} \\
&F^{-1} : V \to U_0 \text{ ist stetig} \\
\forall x \in U_0 : \quad &DF(x) \text{ ist umkehrbar}
\end{aligned}$$

Beweis. Da DF stetig ist, ist $\det DF$ stetig. Wegen

$$\det DF(a) \neq 0$$

und da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodaß

$$\forall x \in B(a, \varepsilon) \subset U : \det DF(x) \neq 0$$

a) Sei $y \in Y$ beliebig. Setze

$$f_y : X \to X, x \mapsto DF(a)^{-1}(y - F(x + a)) + x$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
f_y(0) &= DF(a)^{-1}(y - F(a)) \\
Df_y(x) &= -DF(a)^{-1}DF(a + x) + id_X \\
Df_y(0) &= -id_X + id_X = 0
\end{aligned}$$

Da Df_y stetig ist und wegen $Df_y(0) = 0$, gilt

$$\exists 0 < r < \varepsilon : \begin{cases} \overline{B(0,2r)} \subset B(0,\varepsilon) \\ \| Df_y \|_{\overline{B(0,2r)}} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sei

$$M = \| DF(a)^{-1} \|$$

Dann gilt für $y \in B\left(F(a), \dfrac{r}{M}\right)$ und $x \in \overline{B(0,2r)}$

$$\begin{aligned} \| f_y(x) \| &= \| f_y(x) - f_y(0) + f_y(0) \| \\ &\leq \| f_y(x) - f_y(0) \| + \| f_y(0) \| \\ &\leq \| Df_y \|_{\overline{B(0,2r)}} \| x - 0 \| + \| DF(a)^{-1}(y - F(a)) \| \\ &\leq \frac{1}{2} 2r + \underbrace{\| DF(a)^{-1} \|}_{=M} \underbrace{\| y - F(a) \|}_{< \frac{r}{M}} \\ &< r + M\frac{r}{M} = 2r \end{aligned}$$

Das ergibt

$$f_y : \overline{B(0,2r)} \to B(0,2r)$$

Für $x_1, x_2 \in \overline{B(0,2r)}$ gilt

$$\begin{aligned} \| f_y(x_2) - f_y(x_1) \| &\leq \| Df_y \|_{\overline{B(0,2r)}} \| x_2 - x_1 \| \\ &\leq \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \| \end{aligned}$$

Da $\overline{B(0,2r)}$ abgeschlossen ist, hat jede Abbildung f_y für $y \in B\left(F(a), \frac{r}{M}\right)$ genau einen Fixpunkt $x \in \overline{B(0,2r)}$.
Wegen

$$\begin{aligned} & x = f_y(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & x = DF(a)^{-1}(y - F(x+a)) + x \\ \Longleftrightarrow\quad & 0 = DF(a)^{-1}(y - F(x+a)) \\ \overset{DF(a) \text{ umkehrbar}}{\Longleftrightarrow}\quad & y = F(x+a) \end{aligned}$$

gilt

$$\forall y \in B\left(F(a), \frac{r}{M}\right) \ \exists!\ x \in B(0,2r) : \ f_y(x) = x$$
$$\forall y \in B\left(F(a), \frac{r}{M}\right) \ \exists!\ x \in B(0,2r) : \ y = F(x+a)$$

Das ergibt die Umkehrabbildung

$$F^{-1} : B\left(F(a), \frac{r}{M}\right) \to B(a, 2r), y \mapsto x$$

Da F stetig ist, ist

$$U_0 := F^{-1}\left(B\left(F(a), \frac{r}{M}\right)\right) \subset B(a, 2r)$$

offen.

b) $\mathbf{F^{-1}}$ ist stetig. Seien $y_1, y_2 \in B\left(F(a), \frac{r}{M}\right)$. Für

$$\begin{aligned} x_1 + a &:= F^{-1}(y_1) \\ x_2 + a &:= F^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f_{F(a)}(x) &= DF(a)^{-1}(F(a) - F(x+a)) + x \\ x_2 - x_1 &= f_{F(a)}(x_2) - f_{F(a)}(x_1) + DF(a)^{-1}(F(x_1 + a) - F(x_2 + a)) \\ \| x_2 - x_1 \| &\leq \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \| + M \| F(x_2 + a) - F(x_1 + a) \| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \| F^{-1}(y_2) - F^{-1}(y_1) \| &= \| x_2 - x_1 \| \\ &\leq 2M \| F(x_2 + a) - F(x_1 + a) \| \\ &= 2M \| y_2 - y_1 \| \end{aligned}$$

Damit ist F^{-1} stetig. ■

Satz 7.4 *Sei $U \subset X$ offen, $F : U \to Y$ stetig differenzierbar und*

$$\forall x \in U : \ DF(x)$$

umkehrbar. Dann gilt

$$U_1 \subset U \text{ offen} \Rightarrow F(U_1) \text{ ist offen}$$

Beweis. Sei $U_1 \subset U$ offen.

$$\forall x \in U_1 \ \exists \text{ offenes } U_x \text{ mit } F : U_x \to F(U_x) \text{ ist stetig umkehrbar}$$

Da $F^{-1} : F(U_x) \to U_x$ stetig ist, ist $F(U_x)$ offen. Somit ist

$$F(U_1) = \bigcup_{x \in U} F(U_x)$$

offen. ■

Satz 7.5 *Seien $U \subset X, V \subset Y$ offen. Sei $F : U \to V$ unendlich oft differenzierbar, eins zu eins und*

$$\forall x \in U : \ DF(x) \text{ umkehrbar}$$

Dann ist F umkehrbar und

$$F^{-1} : F(U) \to U$$

unendlich oft differenzierbar.

Beweis. Wir haben gezeigt:

$$\begin{aligned}&\forall x \in U \ \exists \text{ offenes } U_x : \ F : U_x \to F(U_x) \text{ ist umkehrbar}\\ &F^{-1} : F(U_x) \to U_x \text{ ist stetig}\end{aligned}$$

Da F eins zu eins ist, gilt

$$\begin{aligned}&F : U \to F(U) \text{ ist umkehrbar}\\ &F^{-1} : F(U) \to U \text{ ist stetig}\end{aligned}$$

Sei $B(a, \varepsilon) \subset U$. Für

$$H : B(0, \varepsilon) \to X, x \mapsto (DF(a))^{-1}(F(x + a) - F(a))$$

gilt
1.) $H(0) = (DF(a))^{-1}(F(a) - F(a)) = 0$
2.) H ist **unendlich oft differenzierbar**, da F unendlich oft differenzierbar ist auf $B(a, \varepsilon)$.
3.) $DH(0) = (DF(a))^{-1}DF(a) = id_X$.
4.) H ist **eins zu eins**, denn

$$\begin{aligned}H(y) = H(z) \quad &\Rightarrow \quad H(y) - H(z) = 0\\ &\Rightarrow \quad (DF(a))^{-1}(F(y + a) - F(z + a)) = 0\\ &\overset{DF(a) \text{ umkehrbar}}{\Rightarrow} \quad F(y + a) - F(z + a) = 0\\ &\overset{F \text{ umkehrbar}}{\Rightarrow} \quad y = z\end{aligned}$$

5.) Wegen

$$\begin{aligned}&y \in Bild(H)\\ \Longleftrightarrow \quad &y = (DF(a))^{-1}(F(x + a) - F(a))\\ \Longleftrightarrow \quad &F(x + a) = DF(a)y + F(a)\\ \Longleftrightarrow \quad &H^{-1}(y) = x = F^{-1}(DF(a)y + F(a)) - a\end{aligned}$$

und da

$$F^{-1} : B\left(F(a), \frac{r}{M}\right) \to B(a, 2r)$$

stetig ist, ist für $\varepsilon < 2r$

$$H^{-1} : H(B(0,\varepsilon)) \to B(0, 2\varepsilon)$$

stetig.

6.) H^{-1} ist unendlich oft differenzierbar in 0:

Da H unendlich oft differenzierbar in 0 ist, gilt

$$\begin{aligned} H(x) &= \underbrace{H(0)}_{=0} + \underbrace{DH(0)}_{=id} x + r(x) \\ &= x + r(x) \\ \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{\| x \|} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H^{-1}(x) &= H^{-1}(x - r(x) + r(x)) \\ &= x - r(x) \\ &= 2x - H(x) \end{aligned}$$

Da H unendlich oft differenzierbar in 0 ist, ist H^{-1} unendlich oft differenzierbar in 0.

7.) Wegen

$$\begin{aligned} a + H^{-1}(y) &= F^{-1}(DF(a)y + F(a)) \\ F^{-1}(z) &= F^{-1}(DF(a)DF(a)^{-1}(z - F(a)) + F(a)) \\ &= a + H^{-1}(DF(a)^{-1}(z - F(a)) \end{aligned}$$

ist F^{-1} unendlich oft differenzierbar in $F(a)$.

Da $a \in U$ beliebig war, ist F unendlich oft differenzierbar. ∎

8. Flächen

Kurven wurden als Ganzes definiert. Bei Flächen verlangen wir nur, dass sich kleine Stücke definieren und passend zusammenfügen lassen.
Differenzierbar heißt im Folgenden unendlich oft differenzierbar, d.h. glatt. Schreibweise: C^∞.

Definition 8.1 *$S \subset \mathbb{R}^3$ heißt* ***Fläche*** $\iff$

$\forall p \in S\ \exists$ *offene* $V(p) \subset \mathbb{R}^3, U \subset \mathbb{R}^2\ \exists\ F : U \to V \cap S :$
1.) *F ist differenzierbar*
2.) *F ist umkehrbar und F, F^{-1} sind stetig.*
3.) $\forall q \in U :\ dF_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *hat vollen Rang.*

(U,F,V) heißt ***Karte*** *von S um p.*

Satz 8.2 *F^{-1} ist differenzierbar.*

Beweis. Das haben wir im letzten Kapitel gezeigt. ■

Satz 8.3 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $(U_1, F_1, V_1), (U_2, F_2, V_2)$ Karten von S. Dann gilt*

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ist glatt.

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd} F_1^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap S) \subset \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "F_2^{-1}\circ F_1"] \arrow[dr, "F_1"'] & & F_2^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap S) \subset \mathbb{R}^2 \arrow[dl, shift right, "F_2"'] \\ & S \cap V_1 \cap V_2 \subset \mathbb{R}^3 \arrow[ur, shift right, "F_2^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Da F_2^{-1}, F_1 glatt sind, ist $F_2^{-1} \circ F_1$ glatt. ■

Satz 8.4 (Der Graph einer Funktion) *Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist*

$$\mathit{Graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}$$

eine Fläche.

Beweis. 1.) und 2.)

$$F : U \to \mathit{Graph}(f) \subset \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

ist differenzierbar, eins zu eins und ohnehin auf. Damit ist es umkehrbar und

$$F^{-1} : Graph(f) \to U, (x, y, f(x, y)) \mapsto (x, y)$$

ist stetig.

3.)

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

hat Rang 2. ∎

Jede Fläche ist lokal der Graph einer differenzierbaren Funktion.

Satz 8.5 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in S$.*
Dann existiert eine Umgebung $\overline{V}(p)$ sodaß $\overline{V} \cap S$ der Graph einer differenzierbaren Funktion $f : W \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{V}$ ist.

Beweis. Sei (U, F, V) eine Karte von S bei p und $u_0 \in U$. Wegen

$$Rang \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u_1} & \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} (u_0) = 2$$

sind zwei Zeilen der Matrix linear unabhängig. Sei

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} (u_0) \neq 0$$

und

$$pr : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$$
$$pr \circ F : U \to \mathbb{R}^2, (u_1, u_2) \mapsto (F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2))$$

d.h.

$$\begin{array}{ccc} u_0 \in U \subset \mathbb{R}^2 & \overset{(F_1,F_2)=pr\circ F}{\longrightarrow} & pr(F(u_0)) \in \mathbb{R}^2 \\ F \searrow & & \nearrow pr \\ & F(u_0) \in V \cap S & \end{array}$$

Mit dem Umkehrsatz erhalten wir offene $\overline{U}(u_0), W(pr \circ F(u_0))$ sodaß

$$(F_1, F_2) = pr \circ F : \overline{U} \to W$$

umkehrbar ist und $pr \circ F$ und

$$(F_1, F_2)^{-1} = (pr \circ F)^{-1} : W \to \overline{U}, (x, y) \mapsto (u_1(x, y), u_2(x, y))$$

differenzierbar sind.
Da F, F^{-1} stetig sind, ist $\overline{V} = F(\overline{U})$ eine Umgebung von $F(u_0)$ in S.
Wegen

$$(u_1, u_2) = (F_1, F_2)^{-1}(F_1(u_1), F_2(u_2))$$

gilt

$$\begin{aligned} S \cap \overline{V} &= \{(F_1, F_2, F_3)(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in \overline{U}\} \\ &= \{(id_1, id_2, F_3 \circ (F_1, F_2)^{-1}) \circ (F_1, F_2)(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in \overline{U}\} \\ &= \{(x, y, F_3 \circ (F_1, F_2)^{-1}) : \ (x, y) \in W\} \\ &= \text{Graph } (F_3 \circ (F_1, F_2)^{-1} : W \to \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

■

Satz 8.6 *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und*

$$f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

differenzierbar und

$$Df(a) \neq 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S &:= f^{-1}(a) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U : f(x, y, z) = a \right\} \end{aligned}$$

eine Fläche.

Beweis. Sei $p \in f^{-1}(a)$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$$

Dann ist

$$F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} DF_p &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \det DF_p &= \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \end{aligned}$$

Mit dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen $V(p), W(F(p))$ sodaß $F: V \to W$ umkehrbar und $F^{-1}: W \to V$ differenzierbar ist. Wegen

$$F(x,y,z) = (x,y,f(x,y,z))$$

gilt

$$F^{-1}: W \to V, \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y,t) \end{pmatrix}$$

Da F^{-1} differenzierbar ist, ist

$$g: W \cap \{\mathbb{R}^2 \times \{a\}\} \to \mathbb{R}, (x,y,a) \mapsto g(x,y,a)$$

als Funktion von x, y differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} Graph(g) &= \{(x,y,g(x,y,t)) : (x,y,t) \in W \cap \{\mathbb{R}^2 \times \{a\}\}\} \\ &= \{(x,y,z) \in V : f(x,y,z) = a\} \\ &= f^{-1}(a) \cap V \end{aligned}$$

Da $p \in f^{-1}(a)$ beliebig war, ist $f^{-1}(a)$ Fläche. Setzt man

$$\overline{F} = F^{-1}: W \cap \mathbb{R}^2 \times \{a\} \to V, \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

so ist

$$(W \cap \mathbb{R}^2 \times \{a\}, \overline{F}, V \cap f^{-1}(a))$$

eine Karte. ∎

Beispiel 8.7 (Die Kugeloberfläche)

$$S^2 = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

ist eine Fläche.

Beweis.

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

ist differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z \end{aligned}$$

gilt $Df(1) \neq 0$ und $f^{-1}(1) = S^2$ ist eine Fläche.
Überdecke sie mit der linken, rechten, oberen, unteren, vorderen und hinteren Halb-Kugeloberfläche. Setze $S = S^2$ und

$$V := V_3^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z > 0 \right\}$$

Dann ist $S^2 \cap V_3$ die **obere Halb-Kugeloberfläche** ohne den Äquator.
Sie ist der Graph von

$$f : U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

mit

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$$

Dann ist

$$F_3^+ : U \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

eine Karte.
untere Halb-Kugeloberfläche:

$$V_3^- := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z < 0 \right\}$$

$$F_3^- : U \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

linke bzw. rechte Halb-Kugeloberfläche:

$$V_1^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x > 0 \right\}$$

$$V_1^- := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x < 0 \right\}$$

$$F_1^\pm : U \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1 - (y^2 + z^2)} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vordere bzw. hintere Halb-Kugeloberfläche

$$V_2^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y > 0 \right\}$$

$$V_2^- := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y < 0 \right\}$$

$$F_2^\pm : U \to \mathbb{R}^3, \binom{x}{z} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{1-(x^2+z^2)} \\ z \end{pmatrix}$$

Da jeder Punkt in einem der $V_1^\pm$ liegt, ist S^2 eine Fläche. ■

Sei S^2 der Kreis in der yz-Ebene mit Mittelpunkt $(0, a, 0)$. Er ist die Lösung der Gleichung

$$(y-a)^2 + z^2 = r^2$$

Diesen Kreis dreht man mittels $y \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ um die z-Achse

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2$$

und erhält den

Beispiel 8.8 (Fahrradschlauch) *Für*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2$$

ist $T = f^{-1}(r^2)$ eine Fläche.

Beweis. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

ist r^2 ein regulärer Wert von f. ■

9. Die Tangentialebene

Bei der Differenzierbarkeit haben wir eine Abbildung

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

genähert durch

$$F(p) + D_pF(x-p)$$

Etwas Ähnliches machen wir bei Flächen.
In jedem Punkt $p \in S$ verschaffen wir uns einen Vektorraum: Die Tangentialebene. Erst dann können wir lineare Abbildungen zwischen diesen Vektorräumen betrachten.

Definition 9.1 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche und $p \in S$. Sei*

$$X = \{c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \text{ glatt } : c(0) = p, \dot{c}(0) = X\}$$

die Menge der Kurven durch p mit $\dot{c}(0) = X$
a)

$$T_pS = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \varepsilon > 0 \ \exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \text{ glatt mit } c(0) = p, \dot{c}(0) = X\}$$

*heißt die **Tangentialebene** von S in p.*
*b) Die Elemente von T_pS heißen **Tangentialvektoren**.*

Satz 9.2 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und (U,F,V) eine Karte von S um $p \in S$ und $u_0 := F^{-1}(p) \in U$.*
a) Dann gilt

$$T_pS = Bild D_{u_0}F \overset{Def}{=} D_{u_0}F\mathbb{R}^2$$

b) T_pS ist ein zweidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.
*c) $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}$ ist eine **Basis des Tangentialraumes**.*

Beweis. a) "$\supset$":

$$\forall X \in Bild(D_{u_0}F) \ \exists Y \in \mathbb{R}^2 : \ X = D_{u_0}F(Y)$$

Da U offen ist, gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \ u_0 + tY \in U$$

Setze

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, t \mapsto F(u_0 + tY)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
c(0) &= F(u_0) = p \\
\dot{c}(0) &= \frac{d}{dt}F(u_0 + tY)|_{t=0} \\
&= D_{u_0}F \cdot Y \\
&= X \\
X &\in T_pS
\end{aligned}$$

"$\subset$": Sei (U,F,V) eine Karte bei p und

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

glatt mit

$$\begin{aligned}
c(0) &= p \\
\dot{c}(0) &= X
\end{aligned}$$

Da V offen und c stetig ist, gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : \ c(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$$

und

$$u := F^{-1} \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

ist eine Kurve, d.h.

$$\begin{array}{ccc}
(-\varepsilon, \varepsilon) & \overset{F^{-1}\circ c}{\rightarrow} & U \\
c \searrow & & F \swarrow \nearrow F^{-1} \\
& V \cap S &
\end{array}$$

Mit $Y := \dot{u}(0) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
D_{u_0}F(Y) &= \frac{d}{dt}(F \circ u)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}c|_{t=0} = X \\
X &\in Bild(D_{u_0}F)
\end{aligned}$$

b)

$$\dim T_pS = \dim D_{u_0}F\mathbb{R}^2 = 2$$

c) $DF(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u_1}$ und $DF(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u_2}$ sind linear unabhängig.
■

10. Das Differential

Wir haben nun Vektorräume T_pS zur Verfügung und wollen lineare Abbildungen dazwischen konstruieren.

Definition 10.1 *Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ Flächen und $p \in S_1$.*
*Die Abbildung $f : S_1 \to S_2$ heißt **glatt nahe p** $\iff$*
$\exists (U_1, F_1, V_1)$ von S_1 um p $\exists (U_2, F_2, V_2)$ von S_2 um f(p) sodaß

$$F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2 \cap S_2)) \to U_2$$

nahe p glatt ist, d.h.

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{F_2^{-1}\circ f \circ F_1} & U_2 \\ F_1 \downarrow & & \downarrow F_2 \\ S_1 \cap V_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \cap V_2 \end{array}$$

Beweis. Sind $(\tilde{U}_i, \tilde{F}_i, \tilde{V}_i)$ Karten für S_i, so ist auch

$$\tilde{F}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{F}_1 = \underbrace{(\tilde{F}_2^{-1} \circ F_2)}_{\text{glatt}} \circ \underbrace{(F_2^{-1} \circ f \circ F_1)}_{\text{glatt}} \circ \underbrace{(F_1^{-1} \circ \tilde{F}_1)}_{\text{glatt}}$$

glatt. Damit gilt es für alle Karten. ∎

Definition 10.2 *Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ Flächen und $f : S_1 \to S_2$ glatt und $p \in S_1$. Das **Differential von f in p** ist*

$$d_pf : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2, \frac{d}{dt}c|_{t=0} \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0}$$

a) $d_pf(X)$ hängt nur von X ab, aber nicht von der Wahl der Kurve c.
b) d_pf ist linear

Beweis. Seien (U_1, F_1, V_1) und (U_2, F_2, V_2) Karten von S_1 um p und S_2 um $f(p)$. Verkleinert man U_1 und V_1, so gilt

$$f(S_1 \cap V_1) \subset V_2$$

a) Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \cap V$ glatt mit

$$\begin{aligned} c(0) &= p \\ \dot{c}(0) &= X \\ c(-\varepsilon, \varepsilon) &\subset V_1 \cap S_1 \end{aligned}$$

Wegen

$$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V_2 \cap S_2$$

gilt

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \in T_{f(p)}S_2$$

d.h.

$$\begin{array}{ccc} u_0 \in U_1 \subset \mathbb{R}^2 & \stackrel{\tilde{f}=F_2^{-1}\circ f\circ F_1}{\longrightarrow} & U_2 \subset \mathbb{R}^2 \\ F_1 \downarrow\uparrow F_1^{-1} & & F_2 \downarrow\uparrow F_2^{-1} \\ p \in V_1 \cap S_1 & \stackrel{f}{\longrightarrow} & V_2 \cap S_2 \ni f(p) \\ c \nwarrow & & \nearrow f \circ c \\ & (-\varepsilon, \varepsilon) & \end{array}$$

wobei

$$\tilde{f} \quad := \quad F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \to U_2$$

nach Definition glatt ist.

$$\begin{aligned} d_p f(X) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(F_2 \circ F_2^{-1} \circ f \circ F_1 \circ F_1^{-1} \circ c)|_{t=0} \\ &= D_p(F_2 \circ \tilde{f} \circ F_1^{-1}) \underbrace{\frac{d}{dt}c|_{t=0}}_{=X} \end{aligned}$$

enthält nur noch X und nicht mehr die gewählte Kurve c.
b) Da $F_2, \tilde{f}, F_1^{-1}$ glatt sind, ist $D_p(F_2 \circ \tilde{f} \circ F_1^{-1})$ definiert und linear.
Damit ist $d_p f$ linear. ■

Satz 10.3 *Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f : V \to \mathbb{R}$ glatt und $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ mit*

$$\forall p \in S : Df(p) \neq 0$$

Dann gilt

$$T_p S = Df(p)^{\perp}$$

Beweis. "$\subset$": Sei $X \in T_p S$. Wähle $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ glatt mit

$$\begin{aligned} c(0) &= p \\ \dot{c}(0) &= X \end{aligned}$$

Wegen $c(-\varepsilon, \varepsilon) \subset S$ gilt

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : (f \circ c)(t) = 0$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \\ &= \langle Df(c(0)), \dot{c}(0) \rangle \\ &= \langle Df(p), X \rangle \end{aligned}$$

"=": Da

$$\dim T_pS = \dim Df(p)^{\perp} = 2$$

folgt

$$T_pS = Df(p)^{\perp}$$

■

Beispiel 10.4 *Für die Kugeloberfläche S^2 gilt*

$$T_pS^2 = p^{\perp}$$

Beweis. Mit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

gilt

$$S^2 = f^{-1}(0)$$

Wegen

$$Df \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

folgt

$$T_pS^2 = p^{\perp}$$

■

11. Die 1. Fundamentalform

Wir benötigen Längen von Kurven, die in S verlaufen und Winkel zwischen zwei Tangentialvektoren.
Für jeden Punkt $p \in S$ läßt sich das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ auf T_pS einschränken und als Matrix darstellen:

Satz 11.1 *Sei v_1, v_2 eine Basis von T_pS und $v = a_1v_1 + a_2v_2, w = b_1v_1 + b_2v_2$ beliebig. Dann gilt*

$$\begin{aligned} (a_1, a_2)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \langle v, w\rangle \\ g_{ij} &:= g(v_i, v_j) \end{aligned}$$

und die Matrix $(g_{ij})_{ij}$ ist symmetrisch mit $\forall v:\ v^T(g_{ij})_{ij}v > 0$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{2} a_iv_i, \sum_{j=1}^{2} b_jv_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_ib_j\langle v_i, v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_ib_jg_{ij} \\ &= (a_1, a_2)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle = \langle X_j, X_i\rangle = g_{ji}$$

ist g_{ij} symmetrisch und

$$\begin{aligned} & \forall v \neq 0:\ v^T(g_{ij})_{ij}v > 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \forall v \neq 0:\ \langle v, v\rangle > 0 \end{aligned}$$

■

Bemerkung 11.2 *Bezüglich der Basis $D_uF(e_1), D_uF(e_2)$ ist g_p als Matrix gegeben durch*

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle D_uF(e_i), D_uF(e_j)\rangle \\ &\overset{Def}{=} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle \end{aligned}$$

Satz 11.3 *Sind* $(U,F,V),(\overline{U},\overline{F},\overline{V})$ *Karten und* $g,\overline{g}$ *die zugehörigen Matrizen und* $H := \overline{F}^{-1}\circ F$*, so gilt*

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= \sum_{k,l}\frac{\partial H^k}{\partial u^i}(u)\frac{\partial H^l}{\partial u^j}(u)\overline{g}_{kl}(H(u)) \\ g &= (D_uH)^T\cdot\overline{g}(H(u))\cdot D_uH \\ \sqrt{\det g} &= \sqrt{\det\overline{g}\circ H}\cdot\det D_uH \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= \left\langle\frac{\partial F}{\partial u^i},\frac{\partial F}{\partial u^j}\right\rangle \\ &= \left\langle\frac{\partial(\overline{F}\circ H)}{\partial u^i},\frac{\partial(\overline{F}\circ H)}{\partial u^j}\right\rangle \\ &= \left\langle\sum_k\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}^k}(H(u))\frac{\partial H^k}{\partial u^i},\sum_l\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}^l}(H(u))\frac{\partial H^l}{\partial u^j}\right\rangle \\ &= \sum_{k,l}\frac{\partial H^k}{\partial u^i}\frac{\partial H^l}{\partial u^j}\left\langle\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}^k}(H(u)),\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}^l}(H(u))\right\rangle \\ &= \sum_{k,l}\frac{\partial H^k}{\partial u^i}\frac{\partial H^l}{\partial u^j}\overline{g}_{kl}(H(u)) \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} g(u) &= (D_uH)^T\cdot\overline{g}(H(u))\cdot D_uH \\ \det g(u) &= \det(D_uH)^T\cdot\det\overline{g}(H(u))\cdot\det D_uH \end{aligned}$$

■

Beispiel 11.4 (x,y-Ebene) *a) Für* $S\subset\mathbb{R}^3$ *mit*

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,(u_1,u_2)\mapsto p_0+u^1X+u^2Y$$

für $p,X,Y\in\mathbb{R}^3$ *ist*

$$(g_{ij}(u))_{ij}=\begin{pmatrix}\langle X,X\rangle & \langle X,Y\rangle\\ \langle Y,X\rangle & \langle Y,Y\rangle\end{pmatrix}$$

konstant.
b) Für $p_0=0,X=e_1,Y=e_2$ *gilt*

$$g=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

konstant.

Beweis. Wegen
$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = X, \frac{\partial F}{\partial u_2} = Y$$
gilt
$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \right\rangle = \langle X, X \rangle \\
g_{12} &= g_{21} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle \\
g_{22} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\rangle = \langle Y, Y \rangle
\end{aligned}$$

■

Beispiel 11.5 (x,y-Ebene) *Für*
$$F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos a \\ r\sin a \\ 0 \end{pmatrix}$$
ist
$$(g_{ij}(r,a))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$
nicht *konstant.*

Beweis.
$$\begin{aligned}
g_{11}(r,a) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \cos^2 a + \sin^2 a = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12}(r,a) &= g_{21}(r,a) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial r} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -r\sin a \\ r\cos a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -r\sin a\cos a + r\cos a\sin a = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{22}(r,a) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial a} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -r\sin a \\ r\cos a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin a \\ r\cos a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= r^2\cos a + r^2 \sin a = r^2
\end{aligned}
$$

■

Bemerkung 11.6 *Die **Formeln** für die 1. Fundamentalform hängen also von der Karte ab.*

Beispiel 11.7 *Für den **Zylinder***

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

in Zylinderkoordinaten

$$F : (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \\ h \end{pmatrix}$$

ist

$$(g_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

konstant.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
g_{11}(a,h) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial a} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \cos^2 a + \sin^2 a = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{12} &= g_{21} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial h} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{22} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial h}, \frac{\partial F}{\partial h} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 1
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 11.8 *Für die **Kugeloberfläche***

$$
S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \right\}
$$

mit

$$
F : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \binom{b}{a} \mapsto \begin{pmatrix} \cos b \cos a \\ \cos b \sin a \\ \sin b \end{pmatrix}
$$

ist

$$
g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 b \end{pmatrix}
$$

nicht konstant.

Beweis. Mit

$$
\frac{\partial F}{\partial b} = \begin{pmatrix} -\sin b \cos a \\ -\sin b \sin a \\ \cos b \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = \begin{pmatrix} -\cos b \sin a \\ \cos b \cos a \\ 0 \end{pmatrix}
$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial b}, \frac{\partial F}{\partial b} \right\rangle \\
&= \sin^2 b \cos^2 a + \sin^2 b \sin^2 a + \cos^2 b \\
&= \sin^2 b + \cos^2 b \\
&= 1 \\
g_{12} &= g_{21} = -\sin b \cos a(-\cos b \sin a) - \sin b \sin a \cos b \cos a \\
&= 0 \\
g_{22} &= \cos^2 b \sin^2 a + \cos^2 b \cos^2 a \\
&= \cos^2 b
\end{aligned}
$$

■

12. Senkrechtenfelder und Orientierbarkeit

Definition 12.1 *a) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche.*
*$N : S \to \mathbb{R}^3$ ist ein **Senkrechtenfeld** auf S $\iff$*

$$\forall p \in S : N(p) \perp T_pS$$

*b) Ein Senkrechtenfeld auf S heißt **Einheitssenkrechtenfeld** $\iff$*

$$\forall p \in S : \| N(p) \| = 1$$

Bemerkung 12.2 *Mit N ist auch -N ein Einheitssenkrechtenfeld auf S.*

Beweis.

$$\forall v \in T_pS : \ \langle -N(p), v \rangle = - \langle N(p), v \rangle = 0$$

■

Definition 12.3 *Eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt **orientierbar** $\iff$*
Eine der beiden gleichwertigen Bedingungen ist erfüllt:
a) Es gibt ein glattes Einheitssenkrechtenfeld auf S
b) $\forall$ $(U, F, V), (\overline{U}, \overline{F}, \overline{V})$ mit $V \cap \overline{V} \neq \emptyset$ gilt

$$\det(\overline{F}^{-1} \circ F) > 0$$

*Die Wahl der Familie heißt **Orientierung von S**.*
*S heißt dann **orientiert**.*

Beweis. Da $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}$ und $\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_1}, \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_2}$ jeweils eine Basis von T_pS sind, gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_1} &= a_{11} \frac{\partial F}{\partial u_1} + a_{12} \frac{\partial F}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_2} &= a_{21} \frac{\partial F}{\partial u_1} + a_{22} \frac{\partial F}{\partial u_2} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} D\overline{F} &= D(\overline{F} \circ F^{-1} \circ F) \\ &= D(\overline{F} \circ F^{-1}) \circ DF \end{aligned}$$

gilt

$$A := (a_{ij})_{ij} = D(\overline{F} \circ F^{-1})$$

b) $\Rightarrow$ a): Definiere in jedem U

$$N : U \to \mathbb{R}^3, u \mapsto \frac{\frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}}{\| \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2} \|}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}_1} \times \frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}_2} \\
= & \left(a_{11}\frac{\partial F}{\partial u_1} + a_{12}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right) \times \left(a_{21}\frac{\partial F}{\partial u_1} + a_{22}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right) \\
= & \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
= & \underbrace{\det A}_{>0} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}
\end{aligned}$$

stimmen die Senkrechtenvektoren überein und

$$N : S \to \mathbb{R}^3, p \mapsto \frac{\frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}}{\| \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2} \|}$$

ist differenzierbar.
a) $\Rightarrow$ b): Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Karten, die S überdeckt.
Indem man ggf. $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}$ vertauscht, gilt

$$N(p) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}}{\| \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2} \|}(p)$$

Dann ist

$$f : F(U) \to \{\pm 1\}, p \mapsto \left\langle N(p), \frac{\frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}}{\| \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2} \|} \right\rangle$$

stetig.
Da U zusammenhängend ist, gilt

$$f \equiv \text{ konstant}$$

auf U. Wegen

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}_1} \times \frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}_2} = \det A \cdot \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}$$

gilt

$$\det A > 0$$

■

Satz 12.4 *Flächen sind im Kleinen stets orientierbar.*

Beweis. Sei (U, F, V) eine Karte von S.
Wegen $Rang D_{F^{-1}(p)} F = 2$ sind $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_1}$ linear unabhängig und mit

$$N(p) := \frac{\frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}}{\| \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2} \|}$$

erhält man ein glattes Einheitssenkrechtenfeld auf $S \cap V$.
Auch -N ist ein glattes Einheitssenkrechtenfeld. ∎

Satz 12.5 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $N : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ein Einheitssenkrechtenfeld. Es gilt*

$$N \textit{ ist stetig} \iff N \textit{ ist glatt}$$

Beweis. "$\Leftarrow$": Aus glatt folgt stetig.
"$\Rightarrow$": Es gibt eine offene Umgebung $V(u)$, sodaß

$$\begin{array}{rcl} N & = & D_uF(e_1) \times D_uF(e_2) \\ \text{oder } N & = & -D_uF(e_1) \times D_uF(e_2) \end{array}$$

$D_uF(e_1), D_uF(e_2)$ hängen glatt von u ab und somit auch

$$D_uF(e_1) \times D_uF(e_2)$$

Wenn ein stetiges Einheitssenkrechtenfeld existiert, ist es

$$\pm D_uF(e_1) \times D_uF(e_2)$$

und somit glatt. ∎

Beispiel 12.6 *a) Jede Fläche S, die sich mit einer Karte (U, F, V) überdecken läßt, ist orientierbar.*
b) Eine Fläche, die Graph einer differenzierbaren Funktion ist, ist orientierbar.

Beweis. a) Definiere als Senkrechtenfeld

$$N(p) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2}}{\| \frac{\partial F}{\partial u_1} \times \frac{\partial F}{\partial u_2} \|}$$

b) Da sie mit einer Karte überdeckt wird. ∎

Satz 12.7 *Läßt sich eine Fläche mit zwei Karten überdecken, deren Durchschnitt zusammenhängend ist, so ist die Fläche orientierbar.*

Beweis. Sei $p \in V \cap \overline{V}$. Ist $\det A < 0$, so vertausche $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial F}{\partial u_2}$ und es gilt

$$\det A > 0$$

Da $V \cap \overline{V}$ zusammenhängend ist und $\det A \neq 0$ folgt

$$\forall p \in V \cap \overline{V}: \ \det A(p) > 0$$

. ■

Satz 12.8 *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $Df(a) \neq 0$ und*

$$S = f^{-1}(a)$$

Dann ist S orientierbar.

Beweis. Wegen

$$T_pS = Df(p)^{\perp}$$

ist

$$N = \frac{Df}{\| Df \|}$$

ein glattes Einheitssenkrechtenfeld. ■

Stetige Einheitssenkrechtenfelder kann, aber muss es auf einer Fläche nicht geben.

Beispiel 12.9 *Das **Möbiusband** ist **nicht orientierbar**.*

Beweis. Seien

$$F : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \left(2 - u_2 \sin \frac{u_1}{2}\right) \sin u_1 \\ \left(2 - u_2 \sin \frac{u_1}{2}\right) \cos u_1 \\ u_2 \cos \frac{u_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overline{F} : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \left(2 - \overline{u}_2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\overline{u}_1}{2}\right)\right) \cos \overline{u}_1 \\ -\left(2 - \overline{u}_2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\overline{u}_1}{2}\right)\right) \sin \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\overline{u}_1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Bei F fehlt $u_1 = 0$, bei $\overline{F}$ fehlt $u_1 = \frac{\pi}{2}$ und $F(U), \overline{F}(\overline{U})$ überdecken S. Es gilt

$$V \cap \overline{V} = \left\{ F \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \right\} \cup \left\{ F \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

Wegen

$$\overline{F}^{-1} \circ F : U \to \overline{U}, (u_1, u_2) \mapsto \left(u_1 - \frac{\pi}{2}, u_2\right) \ \text{ in } \left\{ u_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \right\}$$

$$\overline{F}^{-1} \circ F : U \to \overline{U}, (u_1, u_2) \mapsto \left(\frac{3\pi}{2} + u_1, -u_2\right) \ \text{ in } \left\{ u_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\det D(\overline{F}^{-1} \circ F) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \text{ in } \left\{ u_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi \right) \right\} \\
\det D(\overline{F}^{-1} \circ F) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0 \text{ in } \left\{ u_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Damit ist M nicht orientierbar. ■

Beispiel 12.10 *a) Für die* ***x,y-Ebene*** *in* $\mathbb{R}^3$ *ist es*

$$N \equiv e_3$$

b) Für die ***Kugeloberfläche*** *ist es*

$$N \equiv id$$

c) Für den ***Zylinder*** $S^2 \times \mathbb{R}$ *ist es*

$$N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. a)

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

b) Mit $f = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ gilt für $p = (x, y, z)^T$

$$T_pS = Df(p)^\perp = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\perp = 2p^\perp$$

und somit

$$\forall p \in S : N(p) = p$$

c) Mit $f = x^2 + y^2 - 1 = 0$ gilt

$$T_pS = Df(p)^\perp = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}^\perp$$

■

13. Die zweite Fundamentalform

Die Länge von N ändert sich nicht, sie bleibt 1.
Wenn sich N stark ändert, muss sich also die Richtung von N stark ändern.
Daher muss die Fläche stark gekrümmt sein.
Die Ableitung von N sollte daher eine Aussage über die Krümmung der Fläche machen.

Definition 13.1 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit glattem Einheitssenkrechtenfeld*

$$N : S \to S^2$$

Dann gilt

$$d_pN : T_pS \to T_pS, X \mapsto d_pN(X)$$

und

$$II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto -\langle d_pN(X), Y\rangle$$

heißt ***zweite Fundamentalform*** *der Fläche S im Punkt p.*
Sie ist zweilinear.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} T_{N(p)}S^2 & \overset{\text{Kugeloberfläche}}{=} & N(p)^\perp \\ & \overset{Def}{=} & T_pS \end{aligned}$$

gilt

$$d_pN : T_pS \to T_pS$$

und $\langle d_pN(X), Y\rangle$ ist definiert.
Da d_pN linear ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zweilinear ist, ist II_p zweilinear. ■

Satz 13.2 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ orientierbare Fläche. Dann gilt*

$$\forall X, Y \in T_pS : \ \langle d_pN(X), Y\rangle = \langle X, d_pN(Y)\rangle$$

Beweis.
Wähle eine Karte (U,F,V) um p und setze $u := F^{-1}(p)$. Die Basisvektoren von T_pS sind

$$X_i = D_uF(e_i) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(u)$$

Wegen $N(p) \perp T_pS$ gilt für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle D_{u+te_j}F(e_i), N(F(u+te_j))\right\rangle \\
0 &= \frac{d}{dt}\left\langle D_{u+te_j}F(e_i), N(F(u+te_j))\right\rangle |_{t_0} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}(D_{u+te_j}F(e_i))_{t=0}, N(F(u))\right\rangle \\
&\quad + \left\langle D_uF(e_i), \frac{d}{dt}(N(F(u+te_j)))|_{t_0}\right\rangle
\end{aligned}$$

Wir benötigen die Ableitungen von $D_{u+te_j}F(e_i)$ und $N(F(u+te_j))$.
Für $j = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}D_{u+te_1}F(e_i)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u+te_1)\right)|_{t=0} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^1 \partial u^i} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2 \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^1 \partial u^i} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2 \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial u^1 \partial u^i} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial u^2 \partial u^i} \end{pmatrix} (u+te_1)\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u^1+t \\ u^2 \end{pmatrix}|_{t=0} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^1 \partial u^i} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2 \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^1 \partial u^i} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2 \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial u^1 \partial u^i} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial u^2 \partial u^i} \end{pmatrix} (u)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^1 \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^1 \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial u^1 \partial u^i} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^i}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}N(F(u+te_1))|_{t=0} \\
= \; & d_pN \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u^1} & \frac{\partial F_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u^1} & \frac{\partial F_2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u^1} & \frac{\partial F_3}{\partial u^2} \end{pmatrix} (u) \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u^1+t \\ u^2 \end{pmatrix}}_{=\binom{1}{0}} \\
= \; & d_pN(D_uF(e_1))
\end{aligned}$$

Mit derselben Rechnung für j=2 ergibt sich

$$0 = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p)\right\rangle + \langle X_i, d_pN(X_j)\rangle$$

Da man die zweiten Ableitungen vertauschen darf, gilt

$$\begin{aligned}\langle X_i, d_pN(X_j)\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p)\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p)\right\rangle \\ &= \langle X_j, d_pN(X_i)\rangle\end{aligned}$$

Seien $X = a_1X_1 + a_2X_2, Y = b_1X_1 + b_2X_2 \in T_pS$ beliebig.
Da d_pN linear ist, gilt

$$\begin{aligned}\langle X, d_pN(Y)\rangle &= \sum_{i,j=1}^{2} a_ib_j \langle X_i, d_pN(X_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} a_ib_j \langle X_j, d_pN(X_i)\rangle \\ &= \langle Y, d_pN(X)\rangle\end{aligned}$$

■

Satz 13.3 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in S$ und (U,F,V) eine Karte und $u := F^{-1}(p)$. g, h, w seien die Matrizen, die die erste und zweite Fundamentalform und $-d_pN$ beschreiben bzgl. der Basis $D_uF(e_1), D_uF(e_2)$ von T_pS. Dann ist g umkehrbar und es gilt*

$$h = w \cdot g$$

Beweis.

$$\begin{aligned}g_{ij}(u) &= \langle D_uF(e_i), D_uF(e_j)\rangle \\ h_{ij}(u) &= II_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j)) \\ &= \langle -d_pN(D_uF(e_i)), D_uF(e_j)\rangle\end{aligned}$$

Die Matrixkoeffizienten für $-d_pN$ seien w_i^j, d.h.

$$-d_pN(D_uF(e_i)) = \sum_{k=1}^{2} w_i^k(u) D_uF(e_k)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
h_{ij}(u) &= \langle -d_pN(D_uF(e_i)), D_uF(e_j)\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{2} w_i^k(u)\,\langle D_uF(e_k), D_uF(e_j)\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{2} w_i^k(u) g_{kj}(u) \\
&= \left(\begin{pmatrix} w_1^1 & w_1^2 \\ w_2^1 & w_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right)_{ij} \\
h &= w \cdot g
\end{aligned}$$

Da

$$\forall v \neq 0 : \; v^T g v > 0$$

ist g eins zu eins:

$$\begin{aligned}
gv = 0 \quad &\Rightarrow \quad v^T g v = 0 \\
&\Rightarrow \quad v = 0
\end{aligned}$$

Damit ist g umkehrbar. ∎

Beispiel 13.4 *a) Für die Kugeloberfläche S^2 ist $N(p) = p$ und*

$$d_pN \equiv Id$$

b) Für die x,y-Ebene ist $N = e_z$ und

$$d_pN \equiv 0$$

Beweis. a) Da $N \equiv id$, folgt

$$d_pN \equiv id$$

b) Da $N \equiv e_z$ =konstant ist

$$d_pN \equiv 0$$

∎

14. Krümmung

Definition 14.1 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitssenkrechtenfeld N. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ Kurve mit Geschwindigkeit 1. Die* ***Senkrechtenkrümmung*** *$k_\perp$ von S im Punkt p* ***in Richtung*** *$\dot{c}(0)$ ist*

$$k_\perp := \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \begin{cases} k(0) \langle n(0), N(p) \rangle & \text{für } k(0) \neq 0 \\ 0 & \text{für } k(0) = 0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$|k_\perp| \leq k(0)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |k_\perp| &= |\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle| \\ &\leq \| \ddot{c}(0) \| \underbrace{\| N \|}_{=1} \\ &= k(0) \end{aligned}$$

■

$k_\perp$ läßt sich direkt mit II_p berechnen.

Satz 14.2 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit Einheitssenkrechtenfeld N mit zweiter Fundamentalform II und $p \in S$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine Kurve mit Geschwindigkeit 1 und $c(0) = p$. Dann gilt*

$$k_\perp = II(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$$

und $k_\perp$ hängt nicht von der Wahl der Kurve ab.

Beweis. Da c in S verläuft, gilt

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \ \langle N(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = 0$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle N(c(t)), \dot{c}(t) \rangle |_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} N(c(t))|_{t=0}, \dot{c}(0) \right\rangle + \langle N(p), \ddot{c}(t)|_{t=0} \rangle \\ &= \langle d_p N(\dot{c}(0)), \dot{c}(0) \rangle + k_\perp \\ &= -II_p\,(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) + k_\perp \end{aligned}$$

■

Bemerkung 14.3 *a) Bei Orientierungswechsel der Kurve ändert sich $k_\perp$ nicht.*
b) Bei einem Orientierungswechsel der Fläche $N(p) \mapsto -N(p)$ ändert $k_\perp$ das Vorzeichen.

Beweis. a)

$$II(-\dot{c}(0), -\dot{c}(0)) = II(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$$

b)

$$\langle \ddot{c}(0), -N(p) \rangle = -\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle$$

■

Definition 14.4 *Die Eigenwerte k_1 und k_2 von d_pN heißen **Hauptkrümmungen** an S im Punkt p.*
*Die Eigenvektoren heißen **Hauptkrümmungsrichtungen**.*
Man wählt: $k_1 \leq k_2$

Beweis. Da für $d_pN : T_pS \to T_pS$ gilt

$$\forall X, Y : \langle d_pN(X), Y \rangle = \langle X, d_pN(Y) \rangle$$

gibt es eine senkrechte Basis mit Länge 1 $X_1, X_2 \in T_pS$ aus Eigenvektoren.
■

Wir haben die alte Basis $D_uF(e_1), D_uF(e_2)$ von T_pS nun durch eine neue senkrechte Basis mit Länge 1 ersetzt.

Satz 14.5 *Die Hauptkrümmungen sind nur bis auf das Vorzeichen definiert*

Beweis. Für $N(p) \to -N(p)$ gilt

$$d_p(-N)(p) \to -d_pN(p)$$

und somit

$$k_1 \to -k_1$$
$$k_2 \to -k_2$$

Die Eigenvektoren bleiben jedoch gleich. ■

Mit den Hauptkrümmungen läßt sich die Senkrechtenkrümmung längs einer gegebenen Richtung aus T_pS berechnen.

Satz 14.6 *Für $X = X_1 \cos a + X_2 \sin a \in T_pS$ gilt für die Senkrechtenkrümmung*

$$k_\perp = k_1 \cos^2 a + k_2 \sin^2 a$$

und k_1 und k_2 sind Minimum und Maximum aller Senkrechtenkrümmungswerte von S in p

Beweis. Sei $X \in T_pS$ mit $\| X \|_2 = 1$. Wegen $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ gilt

$$\begin{aligned} X &= \langle X, X_1 \rangle X_1 + \langle X, X_2 \rangle X_2 \\ &= \cos a \cdot X_1 + \sin a \cdot X_2 \\ d_pN(X) &= k_1 \cos a X_1 + k_2 \sin a X_2 \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} II(X,X) &= -\langle d_pN(X), X \rangle \\ &= \langle k_1 \cos a X_1 + k_2 \sin a X_2, \cos a X_1 + \sin a X_2 \rangle \\ &\overset{\langle X_1, X_2 \rangle = 0}{=} k_1 \cos^2 a + k_2 \sin^2 a \\ &= k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 a = k_\perp \end{aligned}$$

Wegen $k_2 - k_1 \geq 0$ wird das minimal für $\sin^2 a = 0$ und maximal für $\sin^2 a = 1$. ■

Definition 14.7 *a) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ orientierte Fläche und $p \in S$.*
*Die **Gaußkrümmung** von S in p ist*

$$K(p) = k_1 k_2 = \det(d_pN)$$

*b) Die **mittlere Krümmung** von S in p ist*

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} Spur(d_pN)$$

Satz 14.8 *a) Die Gaußkrümmung ist auch für nicht-orientierbare Flächen definiert.*
b) Die mittlere Krümmung ändert das Vorzeichen bei Orientierungswechsel der Fläche.
*c) Das **mittlere Krümmungsfeld***

$$\mathbb{H} = H \cdot N$$

ändert bei Orientierungswechsel sein Vorzeichen nicht und ist auch auf nicht orientierbaren Flächen definiert.

Beweis. a)

$$\det(d_p(-N)) = (-k_1)(-k_2) = k_1 k_2 = \det(d_pN)$$

b)

$$Spur(d_p(-N)) = \frac{-k_1 + (-k_2)}{2} = -Spur(d_pN)$$

c)

$$\mathbb{H}(-N) = \frac{-k_1 + (-k_2)}{2}(-N) = \frac{k_1 + k_2}{2} N = \mathbb{H}(N)$$

■

Beispiel 14.9 *a) Für die* ***xy-Ebene*** *in* $\mathbb{R}^3$ *gilt*

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 = 0 \\ K &\equiv H \equiv 0 \end{aligned}$$

und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.
b) Für die ***Kugeloberfläche*** *gilt*

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 = 1 \\ K &\equiv H \equiv 1 \end{aligned}$$

und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

Beweis. a) Da $d_pN \equiv 0$ gilt $k_1 = k_2 = 0$ und es gibt nur einen Eigenraum. Daher ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung.

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2 = 0 \\ H &= \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \end{aligned}$$

b) Da

$$d_pN \equiv id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $k_1 = k_2 = 1$ und es gibt nur einen Eigenraum. Daher ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung.

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2 = 1 \\ H &= \frac{k_1 + k_2}{2} = 1 \end{aligned}$$

■

Beispiel 14.10 (Zylinder)

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ z \end{pmatrix}$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen sind

$$\begin{aligned} X_1 &= (0,0,1) \ \text{zu } k_1 = 0 \\ X_2 &= (-\sin t_0, \cos t_0, 0) \ \text{zu } k_2 = 1 \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} W_p &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ K &= 0 \\ H &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= (-\sin t_0, \cos t_0, 0) \\
\frac{\partial F}{\partial r} &= (0,0,1) \\
N &= \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von d_pN benötigen wir zwei Kurven.

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ z \end{pmatrix}$$

gilt

$$c(0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ z \end{pmatrix} = p, \quad \dot{c}(0) \quad = \quad \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ \sin(t_0) \\ z+t \end{pmatrix}$$

gilt

$$c(0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ z \end{pmatrix} = p, \quad \dot{c}(0) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit

$$N \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
W_p \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix} &= -d_pN \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} N \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ z \end{pmatrix}_{t=0} \\
&= -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ 0 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -d_p N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} N \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ z+t \end{pmatrix}_{t=0} \\
&= -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
W &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
k_1 &= 0 \\
k_2 &= 1 \\
K &\equiv H \equiv \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 14.11 *Die* ***Sattelfläche***

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\right\}$$

ist der Graph der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y^2 - x^2$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -2 \\
k_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Beweis. $S = f^{-1}(0)$ für

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z - y^2 + x^2$$

Da

$$Df \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir ein Einheitssenkrechtenfeld durch

$$N(x, y, z) = \frac{Df(x, y, z)}{\| Df(x, y, z) \|} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Sei $p = 0 \in \mathbb{R}^3$. Wegen

$$N_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine senkrechte Basis mit Länge 1 von T_pS. Für die Kurve

$$c : \mathbb{R} \to S, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

gilt $c(0) = p$ und

$$c_1(t)^2 - c_2(t)^2 + c_3(t) = t^2 - t^2 = 0$$

$$\dot{c}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix}|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1$$

$$\begin{aligned} d_pN(X_1) &= \frac{d}{dt}N(c(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}|_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1 \end{aligned}$$

d.h. $W_p(X_1) = -2X_1$ und $k_1 = -2$.
Für

$$c : \mathbb{R} \to S, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

gilt $c(0) = p$ und

$$c_1(t)^2 - c_2(t)^2 + c_3(t) = -t^2 + t^2 = 0$$

$$\dot{c}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_2$$

$$
\begin{aligned}
d_pN(X_2) &= \frac{d}{dt}N(c(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\begin{array}{c} 0 \\ -2t \\ 1 \end{array}\right)\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}|_{t=0} \\
&= \left(\begin{array}{c} 0 \\ -2 \\ 0 \end{array}\right) = -2X_2
\end{aligned}
$$

d.h. $W_p(X_2) = 2X_2$ und $k_2 = 2$.
Somit gilt in $p = 0 \in \mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
K(p) &= -4 \\
H(p) &= 0
\end{aligned}
$$

■

15. Näherung 2.Ordnung von Flächen

Definition 15.1 $f \in O(\| u \|^3) \iff$

$$\exists \text{ Umgebung } U(0)\ \exists c \in \mathbb{R}\ \forall u \in U(0) : \left| \frac{f(u)}{\| u \|^3} \right| \leq c$$

Satz 15.2 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche und $p \in S$ und X_1, X_2 senkrechte Basis mit Länge 1 von T_pS. Sei N glattes Einheitssenkrechtenfeld auf S definiert in einer Umgebung von p, sodaß $(X_1, X_2, N(p))$ positiv orientierte, senkrechte Basis mit Länge 1 von $\mathbb{R}^3$ sind*
Dann gibt es (U, F, V) von S um p sodaß

$$\begin{aligned} F(0,0) &= p \text{ und } (0,0) \in U \\ \forall i,j = 1,2 : \ g_{ij}(0,0) &= \delta_{ij} \\ \forall i,j,k = 1,2 : \ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0,0) &= 0 \\ F(u) - p &= u^1 X_1 + u^2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(0,0) u^i u^j N(u) \\ &\quad + O(\| u \|^3) \end{aligned}$$

Beweis. Sei (U_1, F_1, V_1) Karte von S um p.
a) Sei $x_0 \in U_1$ sodaß $F_1(x_0) = p$.
Mit

$$\begin{aligned} &V_2 = V_1 \\ &U_2 := U_1 - x_0 \\ &F_2 : U_2 \to V_2 \cap S, x \mapsto F_1(x + x_0) \end{aligned}$$

ist (U_2, F_2, V_2) Karte von S um p mit $(0,0) \in U_2$ und $F_2(0,0) = p$
b) Seien $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^2$ sodaß

$$\forall j = 1,2 : \ D_{(0,0)} F_2(Y_j) = X_j$$

Sei

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, e_j \mapsto Y_j \text{ für } j = 1,2$$

Mit

$$\begin{aligned} V_3 &:= V_2 \\ U_3 &:= A^{-1}(U_2) \\ F_3 &:= F_2 \circ A \end{aligned}$$

gilt für (U_3, F_3, V_3) nun $F_3(0) = p$ und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_3}{\partial u^i}(0,0) &= D_{(0,0)} F_3(e_i) \\
&= D_{(0,0)}(F_2 \circ A) e_i \\
&= (D_{(0,0)} F_2 \circ A) e_i \\
&= D_{(0,0)} F_2(Y_i) = X_i
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{(F_3)}(0,0) &= \left\langle \frac{\partial F_3}{\partial u^i}(0,0), \frac{\partial F_3}{\partial u^j}(0,0) \right\rangle \\
&= \langle X_i, X_j \rangle \\
&\overset{Vor}{=} \delta_{ij}
\end{aligned}$$

c) Entwickle F_3 um (0,0)

$$\begin{aligned}
F_3(v^1, v^2) - p &= \frac{\partial F_3}{\partial v^1} v^1 + \frac{\partial F_3}{\partial v^2} v^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0) v^i v^j + O(\| v \|^3) \\
&= v^1 X_1 + v^2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), N(p) \right\rangle N(p) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_k \right\rangle X_k + O(\| v \|^3) \\
&= \left(v^1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_1 \right\rangle \right) X_1 \\
&\quad + \left(v^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_2 \right\rangle \right) X_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), N(p) \right\rangle N(p) + O(\| v \|^3)
\end{aligned}$$

Für

$$G : U_3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v^1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_1 \right\rangle \\ v^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_2 \right\rangle \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} G(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D_{(0,0)}G &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es offene $U_3'(0,0)$ und $U(0,0)$ mit $U_3' \subset U_3$ sodaß

$$G : U_3' \to U$$

umkehrbar und G, G^{-1} differenzierbar sind.
Verkleinern mittels $V_3' \subset V_3$ und Einschränken $F_3' = F_3|_{U_3'}$ ergibt (U_3', F_3', V_3').
Setze

$$\begin{aligned} F &:= F_3' \circ G^{-1} \\ V &:= V_3' \end{aligned}$$

d) (U,F,V) hat die Eigenschaft: i)

$$F(0,0) = F_3'(G^{-1}(0,0)) = F_3'(0,0) = F_3(0,0) = p$$

iv) Mit

$$u^k := v^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_k \right\rangle$$

folgt

$$\begin{aligned} & F(u^1, u^2) - p \\ = \; & F_3'(G^{-1}(u^1, u^2)) - p \\ = \; & F_3(v^1, v^2) - p \\ = \; & \sum_{k=1}^{2} \left\{ v^k + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_k \right\rangle \right\} X_k \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), N(p) \right\rangle + O(\| v \|^3) \\ = \; & \sum_{k=1}^{2} u^k X_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j h_{ij}^{(F_3)}(0,0) N(p) + O(\| v \|^3) \end{aligned}$$

wobei

$$h_{ij}^{(F_3)} = \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}, N \circ F_3 \right\rangle$$

die Komponente der zweiten Fundamentalform bzgl. (U_3, F_3, V_3) ist.
Wegen

$$\begin{aligned} G(0,0) &= \binom{0}{0} \\ D_{\binom{0}{0}}G &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} G^{-1}(0,0) &= \binom{0}{0} \\ D_{\binom{0}{0}}(G^{-1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} v^j &= u^j + O(\| u \|^2) \\ O(\| v \|^3) &= O(\| u \|^3) \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} & F(u^1, u^2) - p \\ = \; & \sum_{k=1}^{2} u^k X_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} (u^i u^j + O(\| u \|^3) h_{ij}^{(F_3)}(0,0) N(p) + O(\| u \|^3) \\ = \; & \sum_{k=1}^{2} u^k X_k + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{2} u^i u^j h_{ij}^{(F_3)}(0,0) N(p) + O(\| u \|^3) \end{aligned}$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} h_{ij}^F(0,0) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i \partial u^j}(0,0), N(p) \right\rangle \\ &= \left\langle h_{ij}^{(F_3)}(0,0) N(p), N(p) \right\rangle \\ &= h_{ij}^{(F_3)}(0,0) \end{aligned}$$

ii) und iii): Wegen iv) gilt

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}(u) = X_i + \sum_{k=1}^{2} h_{ik}(0,0) u^k N(p) + O(\| u \|^2)$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned}
g_{ij}(u) &= \Big\langle X_i + \sum_{k=1}^{2} h_{ik}(0,0)u^k N(p) + O(\| u \|^2), \\
&\qquad X_j + \sum_{l=1}^{2} h_{il}(0,0)u^l N(p) + O(\| u \|^2) \Big\rangle \\
&= \langle X_i, X_j\rangle + \sum_{k=1}^{2} h_{ik}(0,0)u^k \underbrace{\langle N(p), X_j\rangle}_{=0} \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{2} h_{jl}(0,0)u^l \underbrace{\langle X_i, N(p)\rangle}_{=0} + O(\| u \|^2) \\
&= \delta_{ij} + O(\| u \|^2)
\end{aligned}$$

■

Satz 15.3 *a) Für $K(p) > 0$ ist S näherungsweise parabolisch.*
b) Für $K(p) < 0$ ist S näherungsweise Sattelfläche
c) Für $K(p) = 0, K \neq 0$ ist S näherungsweise Zylinderfläche über einer Parabel
d) Für $K(p) = 0$ ist S näherungsweise die Tangentialebene.

Beweis. a) h_{ij} hat 2 positive oder zwei negative Eigenwerte.
b) h_{ij} hat einen positiven und einen negativen Eigenwert.
c) $\det h_{ij} = 0$, aber h_{ij} hat einen Eigenwert $\neq 0$.
d) $\forall i, j = 1, 2 : \ h_{ij} = 0$ ■

Satz 15.4 *Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^3$ kompakte Fläche. Dann besitzt S einen Punkt mit K(p)>0*

Beweis. a) Da S kompakt ist, ist S beschränkt. Sei

$$\begin{aligned}
R_0 &:= \inf\{R : S \subset \overline{B(0,R)}\} \\
&= \inf_{R\in[0,\infty)} \{\forall x \in S : \| x \|_2 \leq R\}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \forall R \geq R_0 \ \forall x \in S : \| x \|_2 \leq R \\
\Rightarrow \ & \forall x \in S : \| x \|_2 \leq R_0 \\
\Rightarrow \ & S \subset \overline{B(0,R_0)}
\end{aligned}$$

Da S kompakt ist und $\partial B(0, R_0)$ abgeschlossen ist, gilt

$$\exists x \in S, y \in \partial B(0, R_0) : d(x,y) = dist(S, S^2(R_0))$$

Annahme: $d(x,y) > 0$. Dann gilt

$$S \subset \overline{B\left(0, R_0 - \frac{1}{2} d(x,y)\right)}$$

im Widerspruch zur Minimalität von R_0.
b) Sei $p \in S \cap S^2(R_0)$. Es gilt

$$T_p S = T_p S^2(R_0)$$

Annahme nicht: Wegen

$$T_p S^2(R_0) = p^\perp$$

gilt

$$\exists X \in T_p S : \langle X, p \rangle \neq 0$$

Ohne Einschränkung gilt $\langle X, p \rangle > 0$, wechsle ggf. zu -X.
Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine Kurve mit

$$\begin{aligned} c(0) &= p \\ \dot{c}(0) &= X \end{aligned}$$

Reihenentwicklung liefert

$$\begin{aligned} c(t) &= p + Xt + r(t) \\ \lim_{t \to \infty} \frac{r(t)}{t} &= 0 \\ \| c(t) \|^2 &= \| p \|^2 + 2 \langle p, X \rangle t + r(t) \\ &= R_0^2 + 2 \underbrace{\langle p, X \rangle}_{>0} t + r(t) \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\| c(t) \|^2 - R_0^2}{t} = 2 \langle p, X \rangle + O(t)$$

ist für kleine t positiv.

$$\| c(t) \| > R_0$$

Aber aus $S \subset \overline{B(0, R_0)}$ folgt

$$\| c(t) \| \leq R_0$$

Ein Widerspruch.
c) Sei $X \in T_pS$ und $E = Lin(N(p), X)$. Wegen $S \subset \overline{B(0,R_0)}$ liegt $S \cap E$ immer im Inneren der Kreislinie $S^2(R_0) \cap E$ und berührt S in p.
Sei $c(t)$ eine Kurve mit Geschwindigkeit 1 und $c(0) = p, X = \dot{c}(0)$.
Wegen $c(0) = -R_0 \cdot N(p)$ liefert Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} c(t) &= p + tX + \frac{1}{2}t^2\ddot{c}(0) + r(t) \\ \lim_{t\to 0}\frac{r(t)}{t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Da $T_pS = T_pS^2(R_0)$ gilt

$$\ddot{c}(0) \perp X \perp p$$

und

$$\begin{aligned} \| c(t) \|^2 &= \langle c(t), c(t) \rangle \\ &= \left\langle p + tX + \frac{1}{2}t^2\ddot{c}(0) + r(t), p + tX + \frac{1}{2}t^2\ddot{c}(0) + r(t) \right\rangle \\ &= \underbrace{\langle p, p \rangle}_{=R_0^2} + t^2 \underbrace{\langle p, \ddot{c}(0) \rangle}_{-R_0 k_\perp} + \langle p, r(t) \rangle \\ &\quad + t^2 \underbrace{\langle X, X \rangle}_{=1} + 2t\,\langle X, r(t) \rangle + t^4 \frac{1}{4}\,\langle \ddot{c}(0), \ddot{c}(0) \rangle \\ &\quad + t^2\,\langle \ddot{c}(0), r(t) \rangle + \left\langle r(t), p + tX + \frac{1}{2}t^2\ddot{c}(0) + r(t) \right\rangle \end{aligned}$$

und für $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\| c(t_n) \|^2 - R_0^2}{t_n^2} \\ &= -(R_0 k_\perp - 1) + b_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n &= 0 \\ k_\perp &\geq \frac{1}{R_0} \\ K &> 0 \end{aligned}$$

■

16. Innere Geometrie von Flächen

Definition 16.1 *Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ Flächen.*
a) Ein glattes $f : S_1 \to S_2$ heißt ***lokal senkrecht*** $\iff$

$$\forall p \in S_1 : \ D_p f \text{ ist senkrecht.}$$

b) S_1 und S_2 heißen ***lokal senkrecht*** $\iff$
1.) $\forall p \in S_1\ \exists$ offene $U_1(p) \subset S_1, U_2 \subset S_2\ \exists$ senkrechtes $f : U_1 \to U_2$
2.) $\forall q \in S_2\ \exists$ offene $U_2'(q) \subset S_2, U_1' \subset S_1\ \exists$ senkrechtes $f : U_2' \to U_1'$

Satz 16.2 *Sei $f : S_1 \to S_2$ eine (lokal) senkrechte Abbildung. Dann gilt*
a) $f^{-1} : S_2 \to S_1$ ist eine (lokal) senkrechte Abbildung.
b) S_1 und S_2 sind lokal senkrecht.
c) Senkrecht und lokal senkrecht sind Gleichwertigkeitsbeziehungen.

Beweis. a) $D_p f$ ist senkrecht $\iff$ $D_p f^{-1} = (D_p f)^{-1}$ ist senkrecht.
b) $f : S_1 \to S_2$ und $f^{-1} : S_2 \to S_1$ sind senkrecht.
c) Da id senkrecht ist, gilt

$$S_1 \sim S_1$$

Da df^{-1} senkrecht ist, gilt

$$S_1 \sim S_2 \Rightarrow S_2 \sim S_1$$

Da $f_1 \circ f_2$ senkrecht ist, gilt

$$S_1 \sim S_2, S_2 \sim S_3 \Rightarrow S_1 \sim S_3$$

■

Alles was innerhalb der Fläche gemessen werden kann, z.B. die Länge von Kurven oder der Winkel zwischen zwei Tangentialvektoren hängt von $\langle \cdot, \cdot \rangle |_{T_pS \times T_pS}$ ab.
Gibt es eine lokale senkrechte Abbildung, so ist der Winkel zwischen den Bildvektoren derselbe wie zwischen den ursprünglichen Tangentialvektoren. Kleine $U \subset S_1$ können deshalb von ihrem senkrechten Bild $f(U) \subset S_2$ nicht unterschieden werden.

Definition 16.3 *$F_S : S \to \mathbb{R}$ heißt eine Größe der* ***inneren Geometrie*** $\iff$ *Sie ändert sich nicht unter lokal senkrechten Abbildungen:*
$\forall$ lokale senkrechte Abbildung $f : S_1 \to S_2$ gilt

$$F_{S_1} = F_{S_2} \circ f$$

Satz 16.4 *Die mittlere Krümmung ist keine Größe der inneren Geometrie. Somit sind die Hauptkrümmungen keine Größe der inneren Geometrie.*

Beweis. Für eine lokal senkrechte Abbildung müsste gelten

$$H_{Ebene} = H_{Zylinder} \circ f$$

Wegen

$$\begin{aligned} H_{Ebene} &\equiv 0 \\ H_{Zylinder} &\equiv \frac{1}{2} \end{aligned}$$

folgt

$$f = 0$$

Aber das ist keine senkrechte Abbildung. ∎

Bemerkung 16.5 *a) Das Differential einer lokal senkrechten Abbildung hat maximalen Rang.*
b) Zwei Flächen können lokal senkrecht sein, ohne global senkrecht zu sein.

Beweis. a) f ist lokal senkrecht $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} D_p f^T D_p f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Rang D_p f &= 2 \end{aligned}$$

b) Sei $S_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die xy-Ebene, $S_2 = S^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Dann ist

$$f : S_1 \to S_2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ y \end{pmatrix}$$

eine lokale senkrechte Abbildung. Wegen

$$\begin{aligned} D_p f &= \begin{pmatrix} -\sin t & 0 \\ \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_p f^T D_p f &= \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t & 0 \\ \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin^2 t + \cos^2 t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sind S_1, S_2 lokal senkrecht.
Aber f ist nicht eins zu eins.

$$f\begin{pmatrix} t+2\pi \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+2\pi) \\ \sin(t+2\pi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} t \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

17. Christoffelsymbole

Definition 17.1 *Sei (U,F,V) eine Karte von S.*
a) Die zweiten Ableitungen von F lassen sich in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, N(F(u))$ *darstellen durch*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = C_{ij}^1 \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) + C_{ij}^2 \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) + h_{ij}(u) N(F(u))$$

mit der Matrix der zweiten Fundamentalform $(h_{ij})_{ij}$.
b) Für die $C_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$C_{ij}^k = C_{ji}^k$$

Beweis. a) Im Beweis zu

$$\forall X, Y \in T_pS : \langle d_pN(X), Y\rangle = \langle X, d_pN(Y)\rangle$$

haben wir gezeigt

$$0 = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p) \right\rangle - \langle X_i, -d_pN(X_j)\rangle$$

d.h.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p) \right\rangle &= \langle X_i, -d_pN(X_j)\rangle \\ &= h_{ij} \end{aligned}$$

b) Da die Ableitungen vertauschen gilt

$$C_{ij}^k = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}\right)^k = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}\right)^k = C_{ji}^k$$

■

18. Vektorfelder und kovariante Ableitung

Satz 18.1 *Für alle $p \in S$ ist*

$$pr_p : \mathbb{R}^3 \to T_pS, X \mapsto X - \langle X, N(p)\rangle \cdot N(p)$$

linear.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} & \langle X - \langle X, N(p)\rangle\, N(p), N(p)\rangle \\ = \;& \langle X, N(p)\rangle \underbrace{\langle N(p), N(p)\rangle}_{=1} - \langle X, N(p)\rangle \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

gilt

$$pr_{T_pS}(X) \in T_pS$$

und mit

$$\begin{aligned} pr(X + aY) &= X + aY - \langle X + aY, N(p)\rangle\, N(p) \\ &= X - \langle X, N(p)\rangle\, N(p) + a\,(Y - \langle Y, N(p)\rangle\, N(p)) \\ &= prX + a \cdot prY \end{aligned}$$

ist pr linear. ■

Definition 18.2 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche.*
a) Das ***Tangentialbündel*** *von S ist*

$$TS = \{(p, X) : p \in S, X \in T_pS\}$$

b) Eine Abbildung

$$v : S \to TS, p \mapsto (p, v(p))$$

heißt ***Vektorfeld****.*
c) Das Vektorfeld v heißt ***differenzierbar*** $\Longleftrightarrow$
In einer Darstellung $v = \sum_{i=1}^{2} a_i(p) \frac{\partial F}{\partial u^i}(p)$ sind alle $a_i(p)$ differenzierbar.
d) Sei $c : I \to S$ stetig. Ein ***Vektorfeld auf S längs c*** *ist eine Abbildung*

$$v : I \to \mathbb{R}^3, t \mapsto v(t) \in T_{c(t)}S$$

Die Ableitung eines Vektorfeldes

$$\frac{d}{dt} v : I \to \mathbb{R}^3$$

liegt eventuell nicht mehr in T_pS. Deshalb definieren wir

Definition 18.3 *Sei $v : I \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld an S längs c. Dann heißt das Vektorfeld längs c*

$$\frac{\nabla}{dt}v : I \to \bigcup_{p \in S} T_pS, t \mapsto pr_{c(t)}(\dot{v}(t))$$

*die **kovariante Ableitung von v.***

Beweis. Wegen $pr_{T_{c(t)}S}(X) \in T_{c(t)}S$ ist $\frac{\nabla}{dt}v$ ein Vektorfeld längs c. ■

Satz 18.4 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, $c : I \to S$ Kurve und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien v,w Vektorfelder an S längs c.*
Dann sind $v + aw$ und $f \cdot v$ Vektorfelder an S längs c und es gilt

$$\begin{array}{ll} a) & \frac{\nabla}{dt}(v+aw)(t) = \frac{\nabla}{dt}v(t) + a\frac{\nabla}{dt}w(t) \\ b) & \frac{\nabla}{dt}(fv)(t) = \dot{f}(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t) \\ c) & \frac{d}{dt}\left\langle v,w \right\rangle(t) = \left\langle \frac{\nabla}{dt}v(t), w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t) \right\rangle \end{array}$$

Sei $h : J \to I$ umkehrbar und $h, h^{-1} \in C^\infty$. Dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt}(v \circ h) = \dot{h} \cdot \frac{\nabla v}{dt} \circ h$$

Beweis. a) Da $T_{c(t)}S$ ein Vektorraum ist, gilt

$$\begin{aligned} (v+aw)(t) &= v(t) + aw(t) \in T_{c(t)}S \\ (fv)(t) &= \underbrace{f(t)}_{\in\mathbb{R}} \cdot v(t) \in T_{c(t)}S \end{aligned}$$

a) Da pr punktweise linear ist, gilt

$$\begin{aligned} pr\left(\frac{d}{dt}(v+aw)\right) &= pr\left(\frac{d}{dt}v + a\frac{d}{dt}w\right) \\ &= pr\left(\frac{d}{dt}v\right) + apr\left(\frac{d}{dt}w\right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} pr\left(\frac{d}{dt}(fv)\right) &= pr\left(\frac{df}{dt} \cdot v + f(t)\frac{dv}{dt}\right) \\ &= \dot{f}(t)pr(v) + f(t)pr\left(\frac{dv}{dt}\right) \\ &= \dot{f}(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\nabla}{dt} v, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{\nabla w}{dt} \right\rangle \\
= \quad & \left\langle \frac{dv}{dt} - \left\langle \frac{dv}{dt}, N \right\rangle \cdot N, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{dw}{dt} - \left\langle \frac{dw}{dt}, N \right\rangle \cdot N \right\rangle \\
\overset{v \perp N \perp w}{=} \quad & \left\langle \frac{dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{dw}{dt} \right\rangle \\
= \quad & \frac{d}{dt} \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}(v \circ h) \quad &= \quad pr\left(\frac{d}{dt}(v \circ h)\right) \\
&= \quad pr\left(\left(\frac{dv}{dt} \circ h\right) \cdot \frac{dh}{dt}\right) \\
&\overset{pr \text{ linear}}{=} \quad \dot{h} \cdot \frac{\nabla v}{dt} \circ h
\end{aligned}$$

■

Definition 18.5 *a) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, v ein Vektorfeld auf S und $w_p \in T_pS$.*
Die ***kovariante Ableitung von v in Richtung*** *w_p ist*

$$\nabla_{w_p} v = \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v^i \right) w^j \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

Für jede Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $\dot{c}(0) = w_p$ setze

$$\nabla_{w_p} v := \frac{\nabla}{dt}(v \circ c)(0)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{\nabla}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2} a^i(c(t)) \frac{\partial F}{\partial u^i}(c(t))\right) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{2} \left(\dot{a}^k(c(t)) + \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij}^k(c(t)) a^i(c(t)) \dot{c}_j(t) \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}(c(t))
\end{aligned}$$

b) Sie ist nur abhängig von der ersten Fundamentalform.
c) Sind v,w zwei Vektorfelder auf S, so erhalten wir ein Vektorfeld $\nabla_w v$ durch

$$\nabla_w v(p) := \nabla_{w(p)} v(p)$$

Beweis. a) Sei (U, F, V) eine Karte der Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ und $c : I \to S$ eine Kurve mit $c(I) \subset V$ und

$$v : I \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \sum_{i=1}^{2} a^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(c(t))$$

ein glattes Vektorfeld an S längs c, d.h.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{c} & V \cap S & \xrightarrow{v} & \bigcup_{t \in I} T_{c(t)} S \\ & & F^{-1} \downarrow\uparrow F & & \\ & & U & & \end{array}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u^i}(c(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u^i} F \circ F^{-1} \circ F \circ c\right) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(F^{-1} \circ F \circ c)(t) \left(\frac{\partial(F^{-1} \circ F \circ c(t))}{dt}\right)_j \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(c(t)) \cdot \dot{c}_j(t) \\ \frac{d}{dt} a(c(t)) &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a}{\partial u^j} \dot{c}_j \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a}{\partial u^j} w^j \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla}{dt}(v \circ c)(t) \\ \overset{\text{Def}}{=} \quad & pr_{T_{c(t)}S}\left(\sum_{i=1}^{2} \dot{a}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(c(t)) + \sum_{i,j=1}^{2} a^i(t) \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(c(t)) \dot{c}_j(t)\right) \\ \overset{N(c(t)) \perp T_{c(t)}S}{=} \quad & \sum_{i=1}^{2} \dot{a}^i \frac{\partial F}{\partial u^i}(c(t)) + \sum_{i,j=1}^{2} a^i(t) \underbrace{\dot{c}_j(t)}_{=w^j} \sum_{k=1}^{2} C_{ij}^k(c(t)) \frac{\partial F}{\partial u^i}(c(t)) \\ = \quad & \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial a^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k(c(t)) a^i(t)\right) w^j \frac{\partial F}{\partial u^k}(c(0)) \end{aligned}$$

Da nur $p = c(0)$ und $w_j = \dot{c}(0)$ auftreten, hängt

$$\nabla_{\dot{c}(0)} v : T_p S \to T_p S, \frac{d}{dt} c|_{t=0} \mapsto \frac{\nabla}{dt} v \circ c|_{t=0}$$

nicht von der Wahl der Kurve c ab.
b) Die kovariante Ableitung hängt nur von der ersten Fundamentalform ab, da nur C_{ij}^k eingehen. ■

Bemerkung 18.6 *$\dot{c}(t)$ ist die Geschwindigkeit eines Punktes.*
$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)$ ist die tangentiale Komponente der Beschleunigung, d.h. die Beschleunigung innerhalb der Fläche.

Erweitere den Begriff zu einem kovarianten Differential eines Vektorfeldes längs der Fläche $F : U \to S$

Satz 18.7 *Sei S eine Fläche, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 Vektorfelder auf S und sei $f : S \to \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt*
a) Linearität

$$\begin{aligned} \nabla_w(b_1 v_1 + b_2 v_2) &= b_1 \nabla_w v_1 + b_2 \nabla_w v_2 \\ \nabla_{b_1 w_1 + b_2 w_2} v &= b_1 \nabla_{w_1} v + b_2 \nabla_{w_2} v \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \nabla_{fw} v &= f \nabla_w v \\ \nabla_w(fv) &= Df(w)v + f\nabla_w v \\ D(\langle v_1, v_2 \rangle)(w) &= \langle \nabla_w v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, \nabla_w v_2 \rangle \end{aligned}$$

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \nabla_w(b_1 v_2 + b_2 v_2) &= \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial (b_1 v_1^k + b_2 v_2^k)}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k (b_1 v_1^i + b_2 v_2^i) \right) w \frac{\partial F}{\partial u^k} \\ &= b_1 \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v_1^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v_1^i \right) w^j \frac{\partial F}{\partial u^k} \\ &\quad + b_2 \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v_2^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v_2^i \right) w^j \frac{\partial F}{\partial u^k} \\ &= b_1 \nabla_w v_1 + b_2 \nabla_w v_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\nabla_{b_1 w_1 + b_2 w_2} v &= \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v^i \right) (b_1 w_1^j + b_2 w_2^j) \frac{\partial F}{\partial u^k} \\
&= b_1 \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v^i \right) w_1^j \frac{\partial F}{\partial u^k} \\
&\quad + b_2 \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v^i \right) w_2^j \frac{\partial F}{\partial u^k} \\
&= b_1 \nabla_{w_1} v + b_2 \nabla_{w_2} v
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla_{fw} v &= \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v^i \right) fw \frac{\partial F}{\partial u^k} \\
&= f \sum_{j,k=1}^{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^j} + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k v^i \right) w \frac{\partial F}{\partial u^k} \\
&= f \nabla_w v
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{\nabla}{dt}((fv) \circ c)|_{t=0} \\
= \; & pr_{T_{c(0)}S} \left(\frac{d}{dt}(fv) \circ c \right) |_{t=0} \\
= \; & pr_{T_{c(0)}S} \left(Df(\dot{c}) \cdot v + f \cdot Dv\dot{c} \right) \\
= \; & Df(w) \cdot v + f \nabla_w v
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&D \langle v_1(w), v_2(w) \rangle \\
= \; & \langle Dv_1(w), v_2(w) \rangle + \langle v_1(w), Dv_2(w) \rangle \\
= \; & \left\langle pr_{T_{c(t)}S} \frac{d}{dt}(v_1 \circ c)(t), v_2(w) \right\rangle + \left\langle v_1(w), pr_{T_{c(t)}S} \frac{d}{dt}(v_2 \circ c)(t) \right\rangle \\
= \; & \langle \nabla_w v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, \nabla_w v_2 \rangle
\end{aligned}$$

■

19. Der Krümmungstensor

Wenn man $\nabla_w z$ nach v kovariant ableitet, treten auch Ableitungen von w nach v auf. Diese zieht man wieder ab.

Definition 19.1 *Die* ***zweite kovariante Ableitung von z nach v und w*** *ist*

$$\nabla^2_{v,w} z = \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z$$

Sei (U,F,V) eine Karte der Fläche S und v,w,z Vektorfelder auf S. In der Basis $\dfrac{\partial F}{\partial u^k}$ *gilt*

$$\begin{aligned}(\nabla^2_{v,w} z)^m &= \sum_{ij} \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} v^i w^j + \sum_{ijk} C^m_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial u^k}(v^i w^k + v^k w^i) \\ &\quad - \sum_{ijk} C^k_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial u^k} v^i w^j \\ &\quad + \sum_{ijk} \left(\frac{\partial C^m_{kj}}{\partial u^i} + \sum_l (C^m_{li} C^l_{kj} - C^m_{kl} C^l_{ij}) \right) v^i w^j z^k\end{aligned}$$

Bemerkung 19.2 *Damit ist zweite kovariante Ableitung eine Größe der inneren Geometrie.*
Es treten keine Ableitungen von (v^1, v^2) *oder* (w^1, w^2) *auf.*
Da nur die Koeffizienten von v,w eingehen, läßt sich das zweite kovariante Differential von z definieren als

$$\nabla^2 z : T_pS \times T_pS \to T_pS, (v_p, w_p) \mapsto (\nabla^2_{v,w} z)(p)$$

wobei v und w beliebige Vektorfelder auf S sind mit $v(p) = v_p, w(p) = w_p$.

Beweis. Für $k = 1, 2$ gilt

$$(\nabla_w z)^k := \sum_l \frac{\partial z^k}{\partial u^l} w^l + \sum_{ij} C^k_{ij} z^i w^j$$

Sei $q := \nabla_w z$. Für $a = 1, 2$ gilt

$$\begin{aligned}(\nabla_v(\nabla_w z))^a &= (\nabla_v q)^a = \sum_{m=1}^2 v^m \left(\frac{\partial q^a}{\partial u^m} v^m + \sum_{b=1}^2 C^a_{bm} q^b \right) \\ &\overset{q=\nabla_w z}{=} \sum_{m=1}^2 v^m \frac{\partial}{\partial u^m} \left(\sum_{i,l=1}^2 \frac{\partial z^a}{\partial u^l} w^l + \sum_{i=1}^2 C^a_{il} z^i w^l \right) \\ &\quad + \sum_{b,m=1}^2 v^m C^a_{bm} \left(\sum_{l=1}^2 \frac{\partial z^b}{\partial u^l} w^l + \sum_{i,l=1}^2 C^b_{il} z^i w^l \right)\end{aligned}$$

Für $r := \nabla_v w$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\nabla_v w} z)^a &= (\nabla_r z)^a = \sum_{m=1}^{2} r^m \left(\frac{\partial z^a}{\partial u^m} + \sum_{b=1}^{2} C^a_{bm} z^b \right) \\
&= \sum_{m=1}^{2} \left(\frac{\partial z^a}{\partial u^m} + \sum_{b=1}^{2} C^a_{bm} z^b \right) \cdot \sum_{l=1}^{2} v^l \left(\frac{\partial w^m}{\partial u^l} + \sum_{i=1}^{2} C^m_{il} w^i \right)
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla^2_{v,w} z\right)^a &= (\nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z)^a \\
&= \sum_{ml} \left(\frac{\partial^2 z^a}{\partial u^l \partial u^m} w^l + \underbrace{\frac{\partial z^a}{\partial u^l} \frac{\partial w^l}{\partial u^m}}_{A} \right) v^m \\
&\quad + \sum_{ilm} \left(\frac{\partial C^a_{il}}{\partial u^m} z^i w^l + C^a_{il} \frac{\partial z^i}{\partial u^m} w^l + \underbrace{C^a_{il} z^i \frac{\partial w^l}{\partial u^m}}_{B} \right) v^m \\
&\quad + \sum_{lbm=1}^{2} \left(\frac{\partial z^b}{\partial u^l} w^l + \sum_{i=1}^{2} C^b_{il} z^i w^l \right) C^a_{bm} v^m \\
&\quad - \sum_{ml} \underbrace{\frac{\partial z^a}{\partial u^m} \frac{\partial w^m}{\partial u^l}}_{A} v^l - \sum_{mil} \frac{\partial z^a}{\partial u^m} C^m_{il} w^i v^l \\
&\quad - \sum_{lbm} \underbrace{\frac{\partial w^m}{\partial u^l} v^l C^a_{bm} z^b}_{B} - \sum_{ilbm=1}^{2} C^m_{il} C^a_{bm} w^i v^l z^b
\end{aligned}
$$

Die mit A, B markierten Terme mit Ableitungen von v^p, w^p heben sich weg. Damit hängt $\nabla^2_{v,w} z$ in $p \in S$ nur von $v(p), w(p)$ und der Ableitung von z in p bis zur Ordnung 2 ab. ■

Die zweite kovariante Ableitung hängt ab von der Reihenfolge in der differenziert wird. Der Krümmungstensor misst den Unterschied, der bei Vertauschung der Ableitungen auftritt.

Definition 19.3 *Sei S eine Fläche und $p \in S, v_p, w_p \in T_pS$ und z ein Vektorfeld auf S.*

$$R(v_p, w_p)z := \nabla^2_{v_p,w_p} z - \nabla^2_{w_p,v_p} z$$

heißt ***Krümmungstensor****. Sei (U,F,V) eine Karte,* $p = F(u_0)$ *und*

$$v_p = \sum_i v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0), w_p = \sum_j w^j \frac{\partial F}{\partial u^j}(u_0), z = \sum_k z^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

Dann gilt

$$R(v_p, w_p)z = \sum_{ijkl=1}^{2} R^l_{ijk}(u_0) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u^0)$$

mit

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial C^l_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial C^l_{ki}}{\partial u^j} + \sum_m (C^l_{mi} C^m_{jk} - C^l_{mj} C^m_{ki})$$

und R ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} C^k_{ij} &= C^k_{ji} \\ \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^j \partial u^i} \end{aligned}$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& (R(v_p,w_p)z)^m \\
= \; & \underbrace{\sum_{ij}\frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j}v^i w^j}_{A} + \underbrace{\sum_{ijk} C_{ij}^m \frac{\partial z^j}{\partial u^k} v^i w^k}_{B} + \underbrace{\sum_{ijk} C_{ij}^m \frac{\partial z^j}{\partial u^k} v^k w^i}_{C} \\
& \underbrace{-\sum_{ijk} C_{ij}^k \frac{\partial z^m}{\partial u^k} v^i w^j}_{D} + \sum_{ijk}\left(\frac{\partial C_{kj}^m}{\partial u^i} + \sum_l (C_{li}^m C_{kj}^l - \underbrace{C_{kl}^m C_{ij}^l)}_{E}\right) v^i w^j z^k \\
& \underbrace{-\sum_{ij}\frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j}w^i v^j}_{A} \underbrace{-\sum_{ijk} C_{ij}^m \frac{\partial z^j}{\partial u^k} w^i v^k}_{B} \underbrace{-\sum_{ijk} C_{ij}^m \frac{\partial z^j}{\partial u^k} w^k v^i}_{C} \\
& \underbrace{+\sum_{ijk} C_{ij}^k \frac{\partial z^m}{\partial u^k} w^i v^j}_{D} - \sum_{ijk}\left(\frac{\partial C_{kj}^m}{\partial u^i} + \sum_l (C_{li}^m C_{kj}^l - \underbrace{C_{kl}^m C_{ij}^l)}_{E}\right) w^i v^j z^k \\
= \; & \sum_{ijk}\frac{\partial C_{kj}^m}{\partial u^i} v^i w^j z^k - \sum_{ijk}\frac{\partial C_{kj}^m}{\partial u^i} w^i v^j z^k \\
& + \sum_{ijkl} C_{li}^m C_{kj}^l v^i w^j z^k - \sum_{ijkl} C_{li}^m C_{kj}^l w^i v^j z^k \\
= \; & \sum_{ijk} v^i w^j z^k \left(\frac{\partial C_{kj}^m}{\partial u^i} - \frac{\partial C_{ki}^m}{\partial u^j} + \sum_l (C_{li}^m C_{kj}^l - C_{lj}^m C_{ki}^l)\right) \\
= \; & \sum_{ijk} R_{ijk}^l v^i w^j z^k
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke, die Ableitungen in z enthalten, sind mit A-D markiert. Sie sind symmetrisch in v_p und w_p und heben sich weg. ■

Satz 19.4 *Sei*

$$R_p : T_pS \times T_pS \times T_pS \to T_pS, (v_p, w_p, z_p) \mapsto R(v_p, w_p)z$$

a) R ist linear in jedem Argument.
b) R ist schiefsymmetrisch in den ersten beiden Argumenten

$$R_p(v_p, w_p)z_p = -R_p(w_p, v_p)z_p$$

c)

$$R(v, v)z = 0$$

Beweis. a)

$$R(v_p, w_p)z = \sum_{ijkl=1}^{2} R^l_{ijk}(u_0)v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u^0)$$

ist linear in v, w, z.
b) Wegen

$$\begin{aligned} R^l_{ijk} &= \frac{\partial C^l_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial C^l_{ki}}{\partial u^j} + \sum_m (C^l_{mi}C^m_{jk} - C^l_{mj}C^m_{ki}) \\ &= -\left(\frac{\partial C^l_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial C^l_{kj}}{\partial u^i} + \sum_m (C^l_{mj}C^m_{ik} - C^l_{mi}C^m_{kj}) \right) \\ &= -R^l_{jik} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} R_p(v_p, w_p)z_p &= \sum_{ijkl=1}^{2} R^l_{ijk}(u_0)v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u^0) \\ &= -\sum_{ijkl=1}^{2} R^l_{jik}(u_0)v^j w^i z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u^0) \\ &= -R_p(w_p, v_p)z_p \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} R(v,v)z &= -R(v,v)z \\ 2R(v,v)z &= 0 \end{aligned}$$

■

Satz 19.5 *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $p \in S$.*
Für $v, w \in T_pS$ gilt mit $W(v) = -d_pN(v)$

$$R(v,w)z = II(w,z)W(v) - II(v,z)W(w)$$

Beweis. Für eine Karte (U, F, V) gilt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k C^k_{ij} \frac{\partial F}{\partial u^k} + h_{ij} \cdot N \circ F$$

Ableiten nach u^l liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} \\
= &\sum_k \left(\frac{\partial C_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + C_{ij}^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^l \partial u^k} \right) + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} \cdot N \circ F + h_{ij} \frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^l} \\
= &\sum_k \left(\frac{\partial C_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + C_{ij}^k \sum_m C_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{ Senkrechtenanteil} \right) \\
&+ \text{Senkrechtenanteil } + h_{ij} DN \left(\frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \\
= &\sum_m \left(\frac{\partial C_{ij}^m}{\partial u^l} + \sum_k C_{ij}^k C_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{ Senkrechtenanteil}
\end{aligned}$$

Da man die Ableitung nach u^i, u^l vertauschen darf, gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} \\
&= \sum_m \left(\frac{\partial C_{ij}^m}{\partial u^l} - \frac{\partial C_{lj}^m}{\partial u^i} + \sum_k (C_{ij}^k C_{lk}^m - C_{lj}^k C_{ik}^m) - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \\
&\quad \cdot \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{ Senkrechtenanteil} \\
&= \sum_m (R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Senkrechtenanteil}
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m &= 0 \\
R_{ijk}^l &= h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l
\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
W(v) &= \sum_{i,l=1}^{2} w_i^l v^i \frac{\partial F}{\partial u^l} \\
II(w, z) &= \sum_{j,k=1}^{2} w^j h_{jk} z^k
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
R(v,w)z &= \sum_{ijkl=1}^{2} R_{ijk}^{l} v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l} \\
&= \sum_{ijkl=1}^{2} (h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l} \\
&= II(w,z) \sum_{i,l=1}^{2} w_i^l v^i \frac{\partial F}{\partial u^l} - II(v,z) \sum_{j,l=1}^{2} w_j^l w^j \frac{\partial F}{\partial u^l} \\
&= II(w,z)W(v) - II(v,z)W(w)
\end{aligned}$$

■

Satz 19.6 *Sei S eine Fläche, $p \in S$ und $v, w, x, y \in T_pS$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\langle R(v,w)x, y\rangle &= \langle R(x,y)v, w\rangle \\
\langle R(v,w)x, y\rangle &= -\langle R(v,w)y, x\rangle \\
R(v,w)x + R(x,v)w + R(w,x)v &= 0
\end{aligned}$$

Beweis. **a)** Da die 2. Fundamentalform symmetrisch ist, gilt

$$\begin{aligned}
& \langle R(v,w)x, y\rangle \\
=\ & \langle II(w,x)W(v) - II(v,x)W(w), y\rangle \\
=\ & II(w,x)II(v,y) - II(v,x)II(w,y) \\
=\ & II(y,v)II(x,w) - II(x,v)II(y,w) \\
=\ & \langle II(y,v)W(x) - II(x,v)W(y), w\rangle \\
=\ & \langle R(x,y)v, w\rangle
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\langle R(v,w)x, y\rangle &= \langle R(x,y)v, w\rangle \\
&= \langle -R(y,x)v, w\rangle \\
&= -\langle R(v,w)y, x\rangle
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& R(v,w)x + R(x,v)w + R(w,x)v \\
=\ & II(w,x)W(v) - II(v,x)W(w) + II(v,w)W(x) - II(x,w)W(v) \\
& + II(x,v)W(w) - II(w,v)W(x) \\
=\ & 0
\end{aligned}$$

■

Satz 19.7 *Sei $p \in S$ und v, w eine senkrechte Basis mit Länge 1 von T_pS. Dann gilt*

$$K(p) = \langle R_p(v,w)w, v\rangle$$

d.h. die Gaußkrümmung ist eine Größe der inneren Geomtrie.

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \langle R(v,w)w, v\rangle \\
= \; & \langle II(w,w)W(v) - II(v,w)W(w), v\rangle \\
= \; & II(w,w) \cdot II(v,v) - II(v,w)II(w,v) \\
= \; & \langle -d_pN(w), w\rangle \langle -d_pN(v), v\rangle - \langle -d_pN(v), w\rangle \langle -d_pN(v), w\rangle \\
= \; & \det(-d_pN) \\
= \; & K
\end{aligned}$$

■

Satz 19.8 *Sei S Fläche, $p \in S$. Für alle $v, w, x \in T_pS$ gilt*

$$R(v,w)x = K(p)(\langle w, x\rangle v - \langle v, x\rangle w)$$

Beweis. a) Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = 2$ und

$$V_1 := \left\{ \begin{array}{l} f : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R} \text{ vierlinear mit} \\ f(v,w,x,y) = -f(w,v,x,y) \\ f(v,w,x,y) = -f(v,w,y,x) \end{array} \right\}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
f(u,u,v,w) &= -f(u,u,v,w) \\
2f(u,u,v,w) &= 0 \\
f(u,v,w,w) &= -f(u,v,w,w) \\
2f(u,v,w,w) &= 0
\end{aligned}$$

gilt in der Basis e_1, e_2 von V

$$\begin{aligned}
f(v,w,x,y) &= v^1w^2 f(e_1,e_2,x,y) + v^2w^1 f(e_2,e_1,x,y) \\
&= (v^1w^2 - v^2w^1) f(e_1,e_2,x,y) \\
&= (v^1w^2 - v^2w^1)(x^1y^2 f(e_1,e_2,e_1,e_2) + x^2y^1 f(e_1,e_2,e_2,e_1)) \\
&= (v^1w^2 - v^2w^1)(x^1y^2 - x^2y^1) f(e_1,e_2,e_1,e_2)
\end{aligned}$$

und V_1 ist ein eindimensionaler Vektorraum.
b) Sei e_1, e_2 senkrechte Basis mit Länge 1 von T_pS. Für

$$\begin{aligned}
f_1(v,w,x,y) &= \langle R(v,w)x, y\rangle \\
f_2(v,w,x,y) &= -K(p)(\langle w, x\rangle \langle v, y\rangle - \langle v, x\rangle \langle w, y\rangle)
\end{aligned}$$

gilt

$$f_1, f_2 \in V_1$$

Wegen

$$f_1(e_1, e_2, e_1, e_2) = K(p) = f_2(e_1, e_2, e_1, e_2)$$

gilt

$$f_1 \equiv f_2$$

■

Da sich die Gaußkrümmung und der Krümmungstensor auseinander berechnen lassen, haben sie dieselbe Information über die Fläche.
Die Gaußsche Krümmung K(u) hängt nicht von den Koeffizienten der zweiten Fundamentalform ab, wie man es vermuten würde, sondern von den Koeffizienten der ersten Fundamentalform und ihrer Ableitung.
Für die mittlere Krümmung ist das falsch (ihr Vorzeichen ändert sich bei orientierungsumkehrender Bewegung).

20. Anfangswertprobleme

Definition 20.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für ein* ***stetiges***

$$f : U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

heißt

$$y' = f(x, y)$$

eine ***Differentialgleichung 1. Ordnung****.*
Eine differenzierbare Funktion

$$g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

heißt ***Lösung*** *der Differentialgleichung* $\iff$

$$\begin{array}{ll} a) & Graph(g) = \{(x, g(x)) \in I \times \mathbb{R}\} \subset U \\ b) & \forall x \in I : \; g'(x) = f(x, g(x)) \end{array}$$

Die Funktion g durchläuft also $\mathbb{R}$ so, daß ihre Steigung immer die Gleichung $g'(x) = f(x, g(x))$ erfüllt. Die Definition geht auch im n-Dimensionalen:

Definition 20.2 *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Für eine* ***stetige*** *Funktion*

$$f : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

heißt $y' = f(x, y)$, d.h.

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y) \\ & \vdots & \\ y_n' & = & f_n(x, y) \end{array}$$

ein ***System von Differentialgleichungen 1.Ordnung****.*
Ein differenzierbares

$$g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

heißt ***Lösung*** *der Differentialgleichung* $\iff$

$$\begin{array}{ll} a) & Graph(g) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}^n : y = g(x)\} \subset U \\ b) & \forall x \in I : g'(x) = f(x, g(x)) \end{array}$$

Definition 20.3 *Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen.*
a) $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt ***Lipschitz stetig*** *in U mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$* $\iff$

$$\forall (x, y), (x, z) \in U : \| f(x, y) - f(x, z) \| \leq L \| y - z \|$$

b) $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt ***lokal Lipschitz stetig*** $\iff$
$\forall (a, b) \in U \; \exists$ offenes $V(a, b) \subset U : \; f : V \to \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz stetig.

Satz 20.4 *Seien $g, h : (x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit*

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon] : \; g(x) < h(x) \\ 2.) & \forall x \in (x_0, x_0+a] : \; g'(x) - f(x, g(x)) < h'(x) - f(x, h(x)) \end{array}$$

Dann gilt

$$\forall x \in (x_0, x_0+a] : g(x) < h(x)$$

Beweis. a) Annahme nicht, d.h.

$$\exists x_1 \in (x_0, x_0+a] : \; g(x) \geq h(x)$$

Wegen 1.) gilt $x_1 > \varepsilon$.
Wähle x_1 minimal. Mit der Stetigkeit von g gilt

$$\begin{aligned} \exists x_1 \in (x_0, x_0+a] \; \forall x \in (x_0, x_1] : g(x) &< h(x) \\ g(x_1) &= h(x_1) \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > \delta > 0$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{g(x_1) - g(x_1 - \delta)}{\delta} &> \frac{h(x_1) - h(x_1 - \delta)}{\delta} \\ \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{g(x_1) - g(x_1 - \delta)}{\delta} &\geq \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{h(x_1) - h(x_1 - \delta)}{\delta} \\ g'(x_1) &\geq h'(x_1) \end{aligned}$$

im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} g'(x_1) &= g'(x_1) \underbrace{- f(x_1, g(x_1)) + f(x_1, g(x_1))}_{=0} \\ &\overset{2.)}{<} h'(x_1) - f(x_1, h(x_1)) + f(x_1, \underbrace{g(x_1)}_{=h(x_1)}) \\ &= h'(x_1) \underbrace{- f(x_1, h(x_1)) + f(x_1, h(x_1))}_{=0} \\ &= h'(x_1) \end{aligned}$$

d.h.

$$\forall x \in (x_0, x_0+a] : g(x) < h(x)$$

■

Satz 20.5 *Ist $g : J \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0, so gilt*

$$\begin{array}{l} \| g(x) \| \ \textit{ist in } x_0 \textit{ stetig} \\ \liminf\limits_{h\downarrow 0}, \limsup\limits_{h\downarrow 0} \left| \dfrac{\| g(x_0) \| - \| g(x_0 \pm h) \|}{h} \right| \leq \| g'(x_0) \| \end{array}$$

Insbesondere existieren die einseitigen Ableitungen

$$- \| g'(x) \| \leq \| g(x) \|'_{\pm} \leq \| g'(x) \|$$

Beweis. Da $\| \cdot \|$ stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\| g(x_0) \| - \| g(x_0 \pm h) \|}{h} \right| &\leq \left\| \frac{g(x_0) - g(x_0 \pm h)}{h} \right\| \\ \limsup_{h\downarrow 0}, \liminf_{h\downarrow 0} \left| \frac{\| g(x_0) \| - \| g(x_0 \pm h) \|}{h} \right| &\leq \| g'(x_0) \| \end{aligned}$$

■

Satz 20.6 *Sei J beliebiges Intervall, $x_0 \in J$ und f Lipschitz stetig in D mit Lipschitzkonstante L. Sei $u : J \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung, $z : J \to \mathbb{R}^m$ eine Näherungslösung des Anfangswertproblems und $b, d \in \mathbb{R}, Graph(y), Graph(z) \subset D$ sodaß*

$$\begin{aligned} \| z(x_0) - u(x_0) \| &< b \\ \forall x \in J : \| z'(x) - f(x, z) \| &< d \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\forall x \in J : \| u(x) - z(x) \| < b \exp(L(x - x_0)) + \frac{d}{L}(\exp(L(x - x_0)) - 1)$$

Beweis. a) Sei

$$r(x) = b \exp(L(x - x_0)) + \frac{d}{L}(\exp(L(x - x_0)) - 1)$$

Wegen

$$\begin{aligned} r'(x) &= bL \exp(L(x - x_0)) + \frac{d}{L} L \exp(L(x - x_0)) \\ &= L \left(b \exp(L(x - x_0)) + \frac{d}{L} L \exp(L(x - x_0)) \right) + d \\ &= Lr(x) + d \end{aligned}$$

ist r die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \forall x \in J: \ r'(x) &= Lr(x) + d \\ r(x_0) &= b \end{aligned}$$

b) Wegen

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{\| (z-y)(x) \| - \| (z-y)(x \pm h) \|}{h} \\ \leq \quad & \| z'(x) - y'(x) \| \\ = \quad & \| z'(x) - f(x,z) + f(x,z) - f(x,y) \| \\ \leq \quad & \| z'(x) - f(x,z) \| + \| f(x,z) - f(x,y) \| \\ \overset{\text{Vor}}{<} \quad & d + L \| z - y \| \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} r'(x) - Lr(x) &= d \\ &> \| z - y \|'_{-} (x) - L \| z(x) - y(x) \| \end{aligned}$$

Wegen

$$r(x_0) = b > \| z(x_0) - y(x_0) \|$$

und da y, z stetig in x_0 sind, gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall (x_0, x_0 + \varepsilon] : \| z(x) - y(x) \| < r(x)$$

Wir haben gerade gezeigt, dass dann mit $f(x, g(x)) = Lg(x)$ folgt

$$\begin{aligned} \forall x \in J : \| y(x) - z(x) \| &< r(x) \\ &= b \exp(L(x - x_0)) + \frac{d}{L}(\exp(L(x - x_0)) - 1) \end{aligned}$$

■

Satz 20.7 (stetige Abhängigkeit der Lösung)
Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $x_0 \in J$ und

$$\begin{aligned} \forall x \in J : u'(x) &= f(x, u(x)) \\ u(x_0) &= u_0 \end{aligned}$$

Sei

$$S_a = \{(x, y) : x \in J, y \in \overline{B(u(x), a)}\}$$

Wähle $a > 0$ sodaß $f : S_a \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz stetig ist.
Sei $g : S_a \to \mathbb{R}^n$ stetig und

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in S_a : \| g(x,y) - f(x,y) \| &< \delta \\ \| z_0 - u_0 \| &< \delta \end{aligned}$$

Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodaß die Lösungen z(x) des gestörten Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} z' &= g(x, z(x)) \\ z(x_0) &= z_0 \end{aligned}$$

auf ganz J existieren und

$$\| z(x) - u(x) \| < \varepsilon$$

D.h. die Lösung $u(x)$ hängt stetig vom Anfangswert und von f ab.

Beweis. Solange $z(x)$ in S_a verläuft, d.h. $(x, z(x)) \in S_a$ gilt

$$\begin{aligned} \| z(x_0) - u(x_0) \| &= \| z_0 - u_0 \| < \delta \\ \| z'(x) - f(x, z(x)) \| &= \| g(x, z(x)) - f(x, z(x)) \| < \delta \end{aligned}$$

Mit $b = d = \delta$ folgt

$$\| u(x) - z(x) \| \quad < \quad \delta \exp(L(x - x_0)) + \frac{\delta}{L}(\exp(L(x - x_0)) - 1)$$

Da exp stetig ist, wähle $\delta > 0$ so klein, dass

$$\forall x \in J : \| u(x) - z(x) \| \leq \frac{a}{2}$$

Solange $z(x)$ in S_a verläuft, d.h.

$$\| u(x) - z(x) \| < a$$

gilt also

$$\| u(x) - z(x) \| \leq \frac{a}{2}$$

Somit kann $z(x)$ S_a nicht verlassen. Damit gilt

$$\forall x \in J : \| u(x) - z(x) \| < \delta \exp(L(x - x_0)) + \frac{\delta}{L}(\exp(L(x - x_0)) - 1)$$

Da J kompakt ist, ist $\exp(L(x - x_0))$ auf J beschränkt.
Wählt man δ klein genug, gilt

$$\forall x \in J : \| u(x) - z(x) \| < \varepsilon$$

■

21. Parallelverschiebung

So wie man einen Vektor in der Ebene verschiebt, wollen wir Vektoren auf Flächen verschieben.

Definition 21.1 *Sei S Fläche und $c : I \to S$ Kurve.*
Ein Vektorfeld $v : I \to \mathbb{R}^3$ längs c heißt ***parallel*** $\iff$

$$\forall t \in I : \ \frac{\nabla}{dt} v \equiv 0$$

Beweis. Sei $h : J \to I$ umkehrbar und $\bar{c} = c \circ h$. Wegen

$$\forall t \in J : \ \dot{h}(t) \neq 0$$

gilt

$$\begin{aligned} v \text{ ist parallel} \quad &\iff \quad \forall t \in I : \ \frac{\nabla}{dt} v = 0 \\ &\iff \quad \forall t \in J : \ \underbrace{\dot{h}(t)}_{\neq 0} \frac{\nabla v}{dt} \circ h = 0 \\ &\iff \quad v \circ h \text{ ist parallel} \end{aligned}$$

■

Satz 21.2 (Existenz und Eindeutigkeit des parallelen Vektorfeldes)
Sei S Fläche und $c : I \to S$ glatte Kurve mit $t_0 \in I, v_0 \in T_{c(t)}S$.
Dann existiert ein eindeutiges paralleles Vektorfeld v längs c mit

$$v(t_0) = v_0$$

Die Abbildung

$$P_c : T_{c(t_0)}S \to T_{c(t_1)}S, v_0 \mapsto v(t_1)$$

heißt ***Parallelverschiebung längs c.***

Beweis. 1. Fall: Sei (U,F,V) eine Karte mit $c(I) \subset V$. Wegen

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & & F \downarrow\uparrow F^{-1} \\ I & \xrightarrow{c} & V \end{array}$$

sei

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_k a^k(t) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u(t)) \\ c(t) &= F \circ F^{-1} \circ c(t) \\ &= F(u_1(t), u_2(t)) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla}{dt} v \equiv 0 \\ \iff \quad & \dot{a}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij}^k(c(t)) a^i(t) \frac{d}{dt} c_j(t) \equiv 0 \text{ für k=1,2} \end{aligned}$$

Das ist ein System von 2 linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen für a^k.
Da es linear ist, existiert die Lösung auf ganz I.
Da es 1. Ordnung ist, genügt es den Anfangswert vorzugeben,
2. Fall: Da I kompakt ist und c stetig, ist c(I) kompakt. Wegen

$$c(I) \subset \bigcup_{j \in J} V_j \cap S$$

gibt es $(U_1, F_1, V_1), \ldots, (U_n, F_n, V_n)$ mit

$$c(I) \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_j \cap S$$

Auf den nicht-leeren Durchschnitten ist es eindeutig. ■

Satz 21.3 *a) Seien X(t), Y(t) parallele Vektorfelder längs c(t). Dann gilt*

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = 0$$

b)

$$P_c|_{t_0}^{t_1} c : T_{c(t_0)} S \to T_{c(t_1)} S, X_0 \mapsto X(t_1)$$

ist linear, umkehrbar und erhält das Skalarprodukt.

Beweis. a) Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle &= \left\langle \underbrace{\frac{\nabla X}{dt}}_{=0}, Y \right\rangle + \left\langle X, \underbrace{\frac{\nabla Y}{dt}}_{=0} \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\langle X(t), Y(t) \rangle = konstant$$

b) linear: Seien $v_0, w_0 \in T_{c(t_0)} S$ und v, w die parallelen Vektorfelder längs c mit $v(t_0) = v_0, w(t_0) = w_0$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$z(t) := av(t) + bw(t)$$

Wegen

$$\frac{\nabla}{dt}z = a\frac{\nabla}{dt}v + b\frac{\nabla}{dt}w = 0$$

ist z parallel längs c und wegen

$$\begin{aligned} z(t_0) &= av_0 + bw_0 \\ P_c(av_0 + bw_0) &= z(t_0) \\ &= av(t_0) + bw(t_0) \\ &= aP_c(v_0) + bP_c(w_0) \end{aligned}$$

ist P_c linear. ■

22. Geodäten

In der Ebene ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die Gerade. Auf Flächen sind es die Geodäten.

Definition 22.1 *Sei S Fläche und I ein Intervall.*
Eine Kurve $c : I \to S$ heißt ***Geodäte*** $\iff$

$$\forall t \in I : \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

Geodäten haben konstante Geschwindigkeit

$$\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = \textit{konstant}$$

Wir betrachten nur Geodäten mit

$$\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = a \neq 0$$

Beweis. Sei c Geodäte. Wegen

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \\ = & \left\langle \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t), \dot{c}(t) \right\rangle + \left\langle \dot{c}(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) \right\rangle \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

ist

$$\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = \text{ konstant}$$

■

Satz 22.2 *Sei $c : I \to S$ glatt.*

$$c \textit{ ist Geodäte} \iff \dot{c} \textit{ ist parallel}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{c ist Geodäte} & \overset{Def}{\iff} \frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0 \\ & \overset{Def}{\iff} \dot{c} \text{ ist parallel} \end{aligned}$$

■

Bestimme die lokale Gleichung, die eine Geodäte in einer Karte (U, h) bei $c(t_0)$ erfüllt.

Satz 22.3 *Einer Kurve $c : I \to U$ entspricht eine Kurve*

$$c : I \to TU, t \mapsto (c(t), c'(t))$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& c \text{ ist Geodäte} \\
\iff \quad & 0 = \frac{\nabla}{dt}\dot{c} \\
\iff \quad & 0 = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} C_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\
\iff \quad & \forall 1 \le k \le n : \ 0 = \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} C_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} \\
\iff \quad & \frac{dx_k}{dt} = y_k \\
& \forall 1 \le k \le n : \ \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} C_{ij}^k y_i y_j
\end{aligned}$$

bzgl. der Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ von TU, $(x_1, \ldots, x_n)$ von U.

Satz 22.4 *$\forall p \in S \exists$ Umgebung $V(p) \subset S, \varepsilon > 0$ und eine C^∞-Abbildung*

$$F : (-2, 2) \times B_{\varepsilon_1}(q) \times B_{\varepsilon_2}(0_p) \to S, t \mapsto F(t, q, w)$$

sodaß $F(t, q, w)$ die eindeutige Geodäte von S ist, mit

$$\begin{aligned}
F(0, q, w) &= q \\
F'(0, q, w) &= w
\end{aligned}$$

und

$$F(t, q, av) = F(at, q, v)$$

Die Geschwindigkeit der Geodäte läßt also sich erhöhen, wenn man das Intervall verkleinert, und umgekehrt.

Beweis. a) Da C_{ij}^k glatt ist, gilt nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_k}{dt} &= y_k \\
\forall 1 \le k \le n : \ \frac{dy_k}{dt} &= -\sum_{i,j} C_{ij}^k y_i y_j
\end{aligned}$$

$\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta > 0$ und $\exists C^\infty$-Abbildung

$$F : (-\delta, \delta) \times B_{\varepsilon_1}(q) \times B_{\varepsilon_2}(0_p) \to TU, t \mapsto F(t, q, v)$$

die

$$\begin{aligned}
F(0,q,v) &= q \\
F'(0,q,v) &= v \\
\frac{dx_k}{dt} &= y_k \\
\forall 1 \leq k \leq n : \ \frac{dy_k}{dt} &= -\sum_{i,j} C_{ij}^k y_i y_j
\end{aligned}$$

erfüllt.
b) Wegen

$$\forall a \in (0, \infty) : \ F(t, q, av) \text{ ist definiert auf } \left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$$

definiere

$$h : \left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right) \to M, t \mapsto F(at, q, v)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
h(0) &= q \\
h'(0) &= av \\
h'(t) &= aF'(at, q, v) \\
\frac{D}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) &= \nabla_{h'(t)} h'(t) \\
&= a^2 \nabla_{F'(at,q,v)} F'(at, q, v) \\
&\overset{Vor}{=} 0
\end{aligned}$$

Damit ist h die Geodäte, die bei $t = 0$ durch q verläuft mit Geschwindigkeit av.
Mit der Eindeutigkeit folgt

$$h(t) = F(t, q, av) = F(at, q, v)$$

c)

$$\begin{aligned}
&F(t, q, v) \text{ ist definiert für } |t| < \delta, |v| < \varepsilon_1 \\
&F\left(\frac{\delta t}{2}, q, \frac{2v}{\delta}\right) \text{ ist definiert für } |t| < 2, |v| < \frac{\delta \varepsilon_1}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

■

Definition 22.5 *Sei $p \in M$ und $TU \subset TM$ offen wie oben. Die Abbildung*

$$\exp : TU \to M, (q,v) \mapsto F(1,q,v) = F\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$$
$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qU \to M, v \mapsto F(1,q,v) = F\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$$

heißt ***Exponentialabbildung*** *auf $\overline{U}$.*

Satz 22.6 *a)* $\exp, \exp_q$ *sind differenzierbar und*

$$\begin{aligned} \exp_q(0) &= q \\ d(\exp_q)_0(v) &= v \\ d(\exp_q)_0 &\equiv id \end{aligned}$$

b) Sei $q \in M$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$$

ist umkehrbar und $\exp_q, \exp_q^{-1}$ *sind differenzierbar.*

Beweis. a) Da

$$F : (-2,2) \times B_{\varepsilon_1}(q) \times B_{\varepsilon_2}(0_p) \to \mathbb{R}$$

glatt ist.

$$\begin{aligned} \exp_q(0) &= F(1,q,0) \\ &= F(0,q,0) \\ &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(F(1,q,tv))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(F(t,q,v)|_{t=0} \\ &= F'(0,q,v) \\ &= v \\ d(\exp_q)_0 &= id_{T_qM} \end{aligned}$$

b) Mit dem Umkehrsatz gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \exp_q : B(0,\varepsilon) \to \exp(B(0,\varepsilon)$$

ist umkehrbar und $\exp_q^{-1}$ differenzierbar. ■
d.h.
a) $\forall p \in M\ \forall v \in T_pM\ \exists!$ Geodäte c_v durch p mit $\dot{c}(0) = v$.
b) $\forall v \in T_pM\ \exists s > 0 :\ c_{sv}(1)$ ist definiert.

Satz 22.7 *Sei S Fläche und $c : I \to S$ Geodäte mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$\tilde{c} : I \to S, t \mapsto c(at + b)$$

eine Geodäte.

Beweis.

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}c(at + b) = a\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(at + b) = 0$$

■

Teil II. Mengentheoretische Topologie

23. Topologische Räume

Definition 23.1 *Sei (X,d) Abstandsraum. $U \subset X$ heißt* ***offen*** $\iff$

$$\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 : \ B(x,\varepsilon) \in U$$

Um jeden Punkt kann man eine kleine Kugel legen, die noch ganz in U enthalten ist.

Satz 23.2 ***a)*** *Sei (X,d) ein Abstandsraum. Für die offenen Mengen gilt*

$$\begin{aligned}&1.)\ \emptyset, X \ \textit{sind offen}\\ &2.)\ \forall 1 \le i \le n : \ U_i \ \textit{sind offen} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \ \textit{ist offen}\\ &3.)\ \forall i \in I : \ U_i \ \textit{sind offen} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \ \textit{ist offen}\end{aligned}$$

b) *$B(x,\varepsilon)$ ist offen.*

Beweis. a) 1.) X ist offen:

$$\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset X$$

$\emptyset$ ist offen: Da kein x in $\emptyset$ liegt, gilt

$$\forall x \in \emptyset \ \exists \varepsilon > 0 : \ B(x,\varepsilon) \in \emptyset$$

2.) Seien U_i offen und $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Da die U_i offen sind, gilt

$$\forall 1 \le i \le n \ \exists \varepsilon_i : \ B(x,\varepsilon_i) \subset U_i$$

Für

$$\varepsilon := \min_{1 \le i \le n} \varepsilon_i$$

gilt

$$\begin{aligned}\forall 1 \le i \le n : \ B(x,\varepsilon) &\subset U_i\\ B(x,\varepsilon) &\subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i\end{aligned}$$

und $\bigcap_{i=1}^n U_i$ ist offen.
3.) Seien U_i offen $\forall i \in I$ und $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann gilt

$$\exists j \in I: \ x \in U_j$$

Da U_j offen ist, gilt

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0: \ B(x,\varepsilon) &\subset U_j \\ \exists \varepsilon > 0: \ B(x,\varepsilon) &\subset \bigcup_{i\in I} U_i \end{aligned}$$

und $\bigcup_{i\in I} U_i$ ist offen.
b) Sei $y \in B(x,\varepsilon)$ beliebig. Für $z \in B(y, \varepsilon - d(x,y))$ gilt

$$\begin{aligned} d(z,x) &\leq d(z,y) + d(y,x) \\ &< \varepsilon - d(x,y) + d(x,y) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} z &\in B(x,\varepsilon) \\ B(y, \varepsilon - d(x,y)) &\subset B(x,\varepsilon) \end{aligned}$$

und $B(x,\varepsilon)$ ist offen.

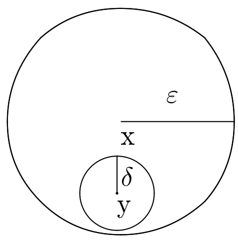


Abbildung 1: $B(x,\varepsilon)$ ist offen

■

Bemerkung 23.3 *a) In einem Abstandsraum gilt*

$$\forall \text{ Umgebungen } U(x) \ \exists n \in \mathbb{N}: B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U(x)$$

Das sind abzählbar viele $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.
Wenn wir den punktweisen Grenzwert von Funktionen auf $(0,1)$ *beschreiben wollen, müssen wir an* ***überabzählbar*** *vielen Punkten den Grenzwert überprüfen:*

$$\forall x \in (0,1): \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Und dazu benötigen wir zwangsläufig eine Verallgemeinerung des Abstandes.
b) In Abstandsräumen sind nur endliche Schnitte offener Mengen offen, z.B ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(x, \frac{1}{n}\right) = \{x\}$$

nicht offen. Wenn man eine Verallgemeinerung des Abstandes sucht, darf man höchstens endliche Schnitte fordern.
c) Die Verallgemeinerung der $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ führt zur Umgebungsbasis.

Die Eigenschaften offener Mengen in Abstandsräumen benutzen wir als Definition der Topologie.

Definition 23.4 *a) Die Teilmengen von X sind*

$$Pot(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$$

b) Eine ***Topologie*** *auf der Menge X ist eine Teilmenge $T \subset Pot(X)$ mit*

$$\begin{aligned}
&1.)\ \emptyset, X \in T \\
&2.)\ U, V \in T \Rightarrow U \cap V \in T \\
&3.)\ U_i \in T \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T
\end{aligned}$$

c) (X,T) heißt ***topologischer Raum.***
d) Pot(X) ist eine Topologie.

Beweis. d)

$$\begin{aligned}
&1.)\ \emptyset, X \in Pot(X) \\
&2.)\ U, V \in Pot(X) \Rightarrow U \cap V \in Pot(X) \\
&3.)\ U_i \in Pot(X) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in Pot(X)
\end{aligned}$$

■

Definition 23.5 *Sei (X,T) topologischer Raum.*
a) $U \subset X$ heißt ***offen*** $\Longleftrightarrow$

$$U \in T$$

b) $A \subset X$ heißt ***abgeschlossen*** $\Longleftrightarrow$

$$A^C \in T$$

c) $N \subset X$ heißt ***Umgebung*** *von $x \in X$* $\Longleftrightarrow$

$$\exists U \in T: \ x \in U \subset N$$

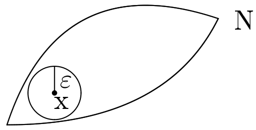


Abbildung 2: N ist Umgebung von x

d) Eine Menge von Umgebungen $\mathbb{V}(x)$ heißt ***Umgebungsbasis*** *für $x \in X \iff$*

$$\forall \text{ Umgebungen } N(x) \exists V \in \mathbb{V}(x) : V(x) \subset N(x)$$

Satz 23.6

$$V \subset X \text{ ist offen } \iff V \text{ ist Umgebung jedes ihrer Punkte}$$

Die offenen Mengen sind der intuitive Umgebungsbegriff, weil sie Umgebung für ***alle*** *ihre Punkte sind.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $x \in V$ beliebig. Wegen

$$\begin{gathered} \text{V ist offen} \\ V \subset V \end{gathered}$$

ist V eine Umgebung von x.
"$\Leftarrow$": Nach Voraussetzung gilt:

$$\forall x \in V \; \exists \text{ offenes } U(x) \subset V : \; x \in U(x) \subset V$$

Da eine beliebige Vereinigung offener Mengen offen ist, gilt

$$V = \bigcup_{x \in V} U(x) \text{ ist offen}$$

■

Beispiel 23.7 *Die Kreisscheibe mit Stiel ist in dem Abstandsraum $\mathbb{R}^2$ eine Umgebung von x aber nicht von y, da keine ε-Kugel um y ganz in der Menge liegt. Also ist die Kreisscheibe mit Stiel nicht offen.*

Satz 23.8 *Seien $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossen.*
Dann sind $\bigcap_{i \in I} A_i$ und $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ abgeschlossen,

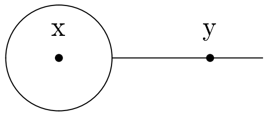


Abbildung 3: Eine nicht-offene Menge

Beweis. Da A_i^C offen sind, gilt

$$\begin{aligned}
\forall i \in I: \ A_i^C \text{ ist offen} \quad &\Rightarrow \quad \bigcup_{i\in I} A_i^C \text{ ist offen} \\
&\Rightarrow \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^C\right)^C \quad \text{ist abgeschlossen} \\
\forall 1 \leq i \leq n: \ A_i^C \text{ ist offen} \quad &\Rightarrow \quad \bigcap_{j=1}^{n} A_j^C \text{ ist offen} \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j^C\right)^C \quad \text{ist abgeschlossen}
\end{aligned}$$

■

Satz 23.9 *Sei $Y \subset X$. Der **Abschluss von Y***

$$\overline{Y} = \bigcap_{A \supset Y,\ A \text{ abgeschlossen}} A$$

ist die kleinste abgeschlossene Menge, die Y enthält.
Hier wird der Abschluß von außen definiert. Viel wichtiger ist später die Definition von innen.

Beweis. a) Da alle A abgeschlossen sind, ist der Schnitt aller A abgeschlossen, d.h. $\overline{Y}$ ist abgeschlossen.
b) Da rechts über alle abgeschlossenen Mengen geschnitten wird, die Y enthalten, ist $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die Y enthält. ■

Satz 23.10 *a)*

$$Y \text{ ist abgeschlossen} \iff Y = \overline{Y}$$

b) Für $Y \subset X$ gilt

$$y \in \overline{Y} \iff \forall \text{ Umgebungen } N(y) : N(y) \cap Y \neq \emptyset$$

d.h. $y \in \overline{Y} \backslash Y$ ist zwar nicht in Y, aber so nahe an Y, daß man keine Umgebung findet, die es von Y trennt.

Beweis. a) "$\Leftarrow$": Da $\overline{Y}$ abgeschlossen ist, gilt

$$Y = \overline{Y} \text{ ist abgeschlossen}$$

"$\Rightarrow$": Da Y abgeschlossen ist, ist Y eine der Mengen im Schnitt, d.h.

$$\begin{aligned} Y &\subset \left(Y \cap \bigcap_{A \supset Y, A \text{ abgeschlossen}} A \right) \subset Y \\ Y &\subset \overline{Y} \subset Y \\ Y &= \overline{Y} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & z \in \overline{Y} = \bigcap_{A \supset Y, A \text{ abgeschlossen}} A \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall \text{ A abgeschlossen} : (A \supset Y \Rightarrow z \in A) \\ \overset{\text{Verneinung}}{\Longleftrightarrow} \quad & \forall \text{ A abgeschlossen} : \left(z \in A^C \Rightarrow Y \cap A^C \neq \emptyset\right) \\ \overset{U=A^C}{\Longleftrightarrow} \quad & \forall\, U \text{ offen} : \ z \in U \Rightarrow Y \cap U \neq \emptyset \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall\, U(z) \text{ offen} : \ U \cap Y \neq \emptyset \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall\, N(z) \text{ Umgebung} : \ N \cap Y \neq \emptyset \end{aligned}$$

■

Beispiel 23.11 *Sei*

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^2 : \| y \|_2 < 1\}$$

Ein y mit $\| y \|_2 = 1$ ist beliebig nahe an Y, aber nicht in Y.

Definition 23.12 *Sei I eine Menge.*
*a) $(I, \leq)$ heißt **geordnet** $\Longleftrightarrow$*

$$\begin{aligned} 1.) \quad & i \leq i \\ 2.) \quad & i \leq j, j \leq i \Rightarrow i = j \\ 3.) \quad & i_1 \leq i_2, i_2 \leq i_3 \Rightarrow i_1 \leq i_3 \end{aligned}$$

***Warnung**: Zwei Elemente sind nicht notwendig vergleichbar!*
*b) Eine geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt **gerichtet** $\Longleftrightarrow$*

$$\forall i_1, i_2 \in I \ \exists i_3 \in I : (i_1 \leq i_3 \textit{ und } i_2 \leq i_3)$$

Es existiert immer ein gemeinsames Größeres.
*c) Ein **Netz** ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge $(I, \leq)$ nach X*

$$I \to X, i \mapsto x_i$$

*d) Ein Netz $(x_i)_{i \in (I, \leq)}$ in einem topologischen Raum X **geht gegen** $x \in X$ (Schreibweise: $x_i \to x$) $\iff$*

$$\forall \text{ Umgebungen } N(x) \; \exists i_0 \in I \; \forall i \geq i_0 : \; x_i \in N$$

d.h. egal wie klein man die Umgebung N von x wählt, existiert ein i_0 sodaß für alle $i \geq i_0$ die x_i in N sind.

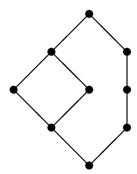


Abbildung 4: Eine gerichtete Menge

Satz 23.13 *Die Menge der Umgebungen von $x \in X$ ist gerichtet durch*

$$U_1 \leq U_2 \overset{Def}{\iff} U_1 \supset U_2$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
U_1 \supset U_1 &\Rightarrow U_1 \leq U_1 \\
U_1 \leq U_2 \text{ und } U_2 \leq U_1 &\Rightarrow U_1 \supset U_2 \text{ und } U_2 \supset U_1 \\
&\Rightarrow U_1 = U_2 \\
U_1 \leq U_2, U_2 \leq U_3 &\Rightarrow U_1 \supset U_2, U_2 \supset U_3 \\
&\Rightarrow U_1 \supset U_3 \\
&\Rightarrow U_1 \leq U_3
\end{aligned}$$

Da $U_3 := U_1 \cap U_2$ Umgebung von z ist und

$$\forall i = 1, 2 : \; U_1 \cap U_2 \subset U_i$$

gilt

$$\begin{aligned}
U_3 &\geq U_1 \\
U_3 &\geq U_2
\end{aligned}$$

■

Satz 23.14 *Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Dann gilt:*
a)

$$z \in \overline{Y} \iff \exists \text{ Netz } (y_i)_i \text{ in } Y \ : y_i \to z$$

d.h.

$$\overline{Y} = \{ \text{ Grenzwerte von Netzen in } Y \ \}$$

*$\overline{Y}$ sind alle Elemente, die sich beliebig genau durch Elemente **aus Y** nähern lassen bzgl. der gegebenen Topologie.*
Alle Punkte aus $(\overline{Y})^C$ sind zu weit weg von Y.
b)

$$T_1 \text{ und } T_2 \text{ haben dieselben Netze mit einem Grenzwert} \iff T_1 = T_2$$

c) Für zwei Topologien auf X gilt:

$$T_1 \subset T_2 \iff \forall x \in X \ \forall U(x) \in T_1 \ \exists V(x) \in T_2 : \ V \subset U$$

Beweis. a) "$\Leftarrow$": Sei $(x_i)_i$ ein Netz in Y mit $x_i \to z$ und $U(z)$ eine beliebige Umgebung von z.

$$\begin{aligned} & \text{Das Netz hat einen Grenzwert} \\ \Rightarrow \quad & \exists i_0 \ \forall i \geq i_0 : \ x_i \in U(z) \\ \Rightarrow \quad & \forall \text{ Umgebungen } U(z) : \ U \cap Y \neq \emptyset \\ \iff \quad & z \in \overline{Y} \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$": Wegen

$$z \in \overline{Y} \iff \forall \text{ Umgebungen } U_i(z) \ \exists y_i \in Y \cap U_i$$

und da die Umgebungen von z eine gerichtete Menge sind, erhält man ein Netz in Y mit den Umgebungen als Indexmenge I.

$$\begin{aligned} & \forall i \geq i_0 : U_i \subset U_{i_0} \\ \Rightarrow \quad & \forall i \geq i_0 : y_i \in U_i \subset U_{i_0} \\ \Rightarrow \quad & y_i \to z \end{aligned}$$

b) Die abgeschlossenen Mengen lassen sich charakterisieren durch den Grenzwert von Netzen.
Durch die Komplemente sind die offenen Mengen definiert.
Damit ist die Topologie festgelegt.
c) "$\Rightarrow$" Für $U \in T_1 \subset T_2$ wähle $V = U \in T_2$.
"$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} U \in T_1 \quad \Rightarrow \quad & \forall x \in U \ \exists V_x \in T_2 : V_x \subset U \\ \Rightarrow \quad & U = \bigcup_{x \in U} V_x \in T_2 \end{aligned}$$

■

Definition 23.15 ***Die Topologie trennt die Punkte von X*** $\Longleftrightarrow$

$$\forall x \neq y\ \exists \textit{ offene } U(x), V(y):\ U(x) \cap V(y) = \emptyset$$

Satz 23.16 *In einem Abstandsraum X trennt die Topologie die Punkte.*

Beweis. Sei $x \neq y$. Annahme

$$\exists z \in B\left(x, \frac{d(x,y)}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{d(x,y)}{3}\right)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ &< \frac{d(x,y)}{3} + \frac{d(x,y)}{3} \\ &= \frac{2}{3} d(x,y) \end{aligned}$$

ein Widerspruch, d.h.

$$B\left(x, \frac{d(x,y)}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{d(x,y)}{3}\right) = \emptyset$$

■

Satz 23.17 *Sei (X,T) topologischer Raum.*
Die Topologie trennt die Punkte von X $\Longleftrightarrow$
Der Grenzwert von Netzen ist eindeutig:

$$(x_i \to x \textit{ und } x_i \to y) \Rightarrow x = y$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Annahme: $x \neq y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\forall \text{ Umgebungen } U(x)\ \exists i_0 \in I\ \forall i \geq i_0:\ x_i \in U(x) \\ &\forall \text{ Umgebungen } V(y)\ \exists i_1 \in I\ \forall i \geq i_1:\ x_i \in V(y) \end{aligned}$$

Da I gerichtet ist, gilt

$$\exists i_2 \in I:\ (i_2 \geq i_0 \text{ und } i_2 \geq i_1)$$

d.h.

$$\forall \text{ Umgebungen } U(x), V(y)\ \exists i_2\ \forall i \geq i_2:\ x_i \in U(x) \cap V(y)$$

Da die Topologie die Punkte von X trennt, gilt aber

$$\forall x \neq y\ \exists U(x), V(y):\ U(x) \cap V(y) = \emptyset$$

Ein Widerspruch, d.h.

$$x = y$$

"$\Leftarrow$" Seien x, y beliebig mit

$$\forall \text{ Umgebungen } U(x), V(y): \; U(x) \cap V(y) \neq \emptyset$$

a) Die Menge

$$I = \{U(x) \cap V(y) \mid U(x), V(y) \text{ Umgebungen}\}$$

ist durch $\supset$ gerichtet:

$$\begin{aligned}
& U(x) \cap V(y) \supset U(x) \cap V(y) \\
& U_1(x) \cap V_1(y) \leq U_2(x) \cap V_2(y) \text{ und } U_2(x) \cap V_2(y) \leq U_1(x) \cap V_1(y) \\
\Rightarrow \quad & U_1(x) \cap V_1(y) \supset U_2(x) \cap V_2(y) \text{ und } U_2(x) \cap V_2(y) \supset U_1(x) \cap V_1(y) \\
\Rightarrow \quad & U_1(x) \cap V_1(y) = U_2(x) \cap V_2(y) \\
& U_1(x) \cap V_1(y) \leq U_2(x) \cap V_2(y) \text{ und } U_2(x) \cap V_2(y) \leq U_3(x) \cap V_3(y) \\
\Rightarrow \quad & U_1(x) \cap V_1(y) \supset U_2(x) \cap V_2(y) \text{ und } U_2(x) \cap V_2(y) \supset U_3(x) \cap V_3(y) \\
\Rightarrow \quad & U_1(x) \cap V_1(y) \supset U_3(x) \cap V_3(y) \\
\Rightarrow \quad & U_1(x) \cap V_1(y) \leq U_3(x) \cap V_3(y)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& U_1(x) \cap V_1(y) \text{ und } U_2(x) \cap V_2(y) \\
\Rightarrow \quad & \forall i = 1, 2: \; U_1(x) \cap U_2(x) \cap V_1(y) \cap V_2(y) \subset U_i(x) \cap V_i(y) \\
\Rightarrow \quad & \forall i = 1, 2: \; U_1(x) \cap U_2(x) \cap V_1(y) \cap V_2(y) \geq U_i(x) \cap V_i(y)
\end{aligned}$$

b) Wegen

$$\forall \text{ Umgebungen } U(x), V(y): \; U(x) \cap V(y) \neq \emptyset$$

erhält man ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ durch

$$I \to X, U(x) \cap V(y) \mapsto x_{U(x) \cap V(y)}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
& \forall U(x) \quad \exists U(x) \cap V(y) \quad \forall U'(x) \cap V'(y) \subset U(x) \cap V(y): \\
& x_{U'(x) \cap V'(y)} \in U'(x) \cap V'(y) \subset U(x) \cap V(y) \subset U(x)
\end{aligned}$$

gilt

$$x_i \to x$$

Wegen

$$\begin{array}{l}\forall V(y) \quad \exists U(x) \cap V(y) \quad \forall U'(x) \cap V'(y) \subset U(x) \cap V(y) : \\ x_{U'(x)\cap V'(y)} \in U'(x) \cap V'(y) \subset U(x) \cap V(y) \subset V(y)\end{array}$$

gilt

$$y_i \to y$$

und nach Voraussetzung

$$x = y$$

Für alle $x \neq y$ muss also gelten

$$\exists \text{ offene } U(x), V(y) : \; U(x) \cap V(y) = \emptyset$$

■

Beispiel 23.18 *a) Sei Unt die Menge aller Unterteilungen*

$$a = t_0 < ... < t_n = b$$

des Intervalles $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *und*

$$Unt_1 \leq Unt_2 \iff Unt_2 \textit{ verfeinert die Unterteilung } Unt_1$$

Dann ist $(Unt, \leq)$ *eine gerichtete Menge, indem man die gemeinsame Unterteilung wählt*

$$t_0, \dots, t_n, t'_0, \dots, t'_{n'}$$

b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist*

$$s : \{Unt\} \to \mathbb{R}, (a = t_0, \dots, t_n = b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

ein Netz und es gilt

$$s_{Unt} \to \int_a^b f(t)dt$$

Beweis.

$$Unt_1 \text{ verfeinert } Unt_1 \Rightarrow Unt_1 \leq Unt_1$$

und

$$\begin{array}{rl} & Unt_1 \leq Unt_2 \text{ und } Unt_2 \leq Unt_1 \\ \Rightarrow & Unt_2 \text{ verfeinert } Unt_1 \text{ und } Unt_1 \text{ verfeinert } Unt_2 \\ \Rightarrow & Unt_1 = Unt_2 \end{array}$$

und

$$\begin{aligned} & Unt_1 \leq Unt_2, Unt_2 \leq Unt_3 \\ \Rightarrow\ & Unt_2 \text{ verfeinert } Unt_1, Unt_3 \text{ verfeinert } Unt_2 \\ \Rightarrow\ & Unt_3 \text{ verfeinert } Unt_1 \\ \Rightarrow\ & Unt_1 \leq Unt_3 \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} t_0, \ldots, t_n &\text{ die Unterteilung von } Unt_1 \\ t'_0, \ldots, t'_{n'} &\text{ die Unterteilung von } Unt_2 \end{aligned}$$

Für die gemeinsame Unterteilung

$$Unt_1 \cup Unt_2 := t_0, \ldots, t_n, t'_0, \ldots, t'_{n'}$$

gilt

$$\forall i = 1, 2 : \ Unt_1 \cup Unt_2 \text{ verfeinert } Unt_i$$

d.h.

$$\begin{aligned} Unt_1 \cup Unt_2 &\geq Unt_1 \\ Unt_1 \cup Unt_2 &\geq Unt_2 \end{aligned}$$

Schon in der Einführung haben wir gezeigt

$$s_{Unt} \to \int_a^b f(t)dt$$

■

24. Stetigkeit

In der Einführung haben wir gezeigt:

Satz 24.1 *Seien X,Y Abstandsräume.*

$$\begin{aligned} & f: X \to Y \text{ ist stetig in } x \in X \\ \Longleftrightarrow\quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon) \end{aligned}$$

und

$$f \text{ ist stetig } \Longleftrightarrow \forall\, U \subset Y \text{ offen } : \ f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

Stetig in x heißt: egal wie klein die Umgebung N von f(x) ist, die nächsten an x werden von f dorthin abgebildet.

Deshalb definiert man:

Definition 24.2 *Seien X, Y topologische Räume.*
a) $f: X \to Y$ heißt ***stetig in*** $x \in X$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\quad & \forall \text{ Umgebungen } N(f(x))\ \exists \text{ Umgebung } U(x): \ f(U(x)) \subset N \\ \Longleftrightarrow\quad & \forall \text{ Umgebungen } N(f(x)): \ f^{-1}(N) \text{ ist Umgebung von } x \end{aligned}$$

b) f heißt ***stetig***

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\quad & \forall x \in X: \ f \text{ ist stetig in } x \\ \Longleftrightarrow\quad & \forall\, U \subset Y \text{ offen } : \ f^{-1}(U) \text{ ist offen} \end{aligned}$$

Beweis. a) "⇐":

$$\begin{aligned} & f^{-1}(N) \text{ ist Umgebung von x} \\ \Rightarrow\quad & \exists \text{ offenes } U(x): \ U(x) \subset f^{-1}(N) \\ \Rightarrow\quad & \exists \text{ offenes } U(x): \ f(U(x)) \subset N \end{aligned}$$

"⇒":

$$\begin{aligned} & \exists \text{ Umgebung } U(x): \ f(U(x)) \subset N \\ \Rightarrow\quad & \exists \text{ offenes } V(x) \subset U(x): \ f(V(x)) \subset N \\ \Rightarrow\quad & \exists \text{ offenes } V(x): \ V(x) \subset f^{-1}(N) \\ \Rightarrow\quad & f^{-1}(N) \text{ ist Umgebung von } x \end{aligned}$$

b) "$\Leftarrow$": Sei $x \in X$ beliebig und N eine Umgebung von $f(x)$.

$$\begin{array}{rl} & N \text{ ist Umgebung von } f(x) \\ \Rightarrow & \exists \text{ offenes } U(f(x)) : \ U(f(x)) \subset N \\ \overset{Vor.}{\Rightarrow} & f^{-1}(U) \text{ ist offen} \\ \Rightarrow & x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(N) \\ \Rightarrow & f^{-1}(N) \text{ ist Umgebung von } x \\ \overset{a)}{\Rightarrow} & f \text{ ist stetig in x} \end{array}$$

"$\Rightarrow$":

$$\begin{array}{rcl} \text{U ist offen} & \Rightarrow & \forall y \in U : \ U \text{ ist Umgebung von } y \\ & \Rightarrow & \forall f(x) \in U : U \text{ ist Umgebung von } f(x) \\ & \overset{a)}{\Rightarrow} & \forall f(x) \in U : f^{-1}(U) \text{ ist Umgebung von x} \\ & \Rightarrow & \forall x \in f^{-1}(U) : f^{-1}(U) \text{ ist Umgebung von x} \\ & \overset{\text{früher}}{\Rightarrow} & f^{-1}(U) \text{ ist offen} \end{array}$$

■

Satz 24.3 *Seien U offen und f stetig. Dann ist f(U) nicht notwendig offen.*

Beweis. $\mathbb{R}$ ist offen und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5$$

ist stetig, aber

$$f(\mathbb{R}) = \{5\}$$

ist nicht offen. ■

Satz 24.4 *Seien X, Y topologische Räume und $z \in X$. Dann gilt*

$$f : X \to Y \textit{ ist stetig in } z \iff (x_i \to z \Rightarrow f(x_i) \to f(z))$$

Beweis. "$\Rightarrow$":

$$\begin{array}{rl} & \text{N ist Umgebung von z} \\ \overset{\text{f stetig}}{\Rightarrow} & f^{-1}(N) \text{ ist eine Umgebung von } z \\ \overset{x_i \to z}{\Rightarrow} & \exists i_0 \ \forall i \geq i_0 : x_i \in f^{-1}(N) \\ \Rightarrow & \exists i_0 \ \forall i \geq i_0 : f(x_i) \in N \\ \Rightarrow & f(x_i) \to f(z) \end{array}$$

"$\Leftarrow$": Annahme: f ist nicht stetig in z, d.h.

$$
\begin{aligned}
& \exists \text{ Umgebung } N(f(z)) : f^{-1}(N(z)) \text{ ist keine Umgebung von } z \\
\Rightarrow \quad & \neg \big(\exists \text{ offenes } U(z) :\ U(z) \subset f^{-1}(N)\big) \\
\Rightarrow \quad & \forall \text{ offene } U(z) :\ U(z) \cap f^{-1}(N)^C \neq \emptyset \\
\Rightarrow \quad & z \in \overline{f^{-1}(N)^C}
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
& \exists \text{ Netz } (x_i)_i \text{ in } f^{-1}(N)^C :\ x_i \to z \\
\Rightarrow \quad & f(x_i) \to f(z) \\
\Rightarrow \quad & \forall \text{ Umgebung } N(f(z))\ \exists i_0\ \forall i \geq i_0 :\ f(x_i) \in N(f(z)) \\
\Rightarrow \quad & x_i \in f^{-1}(N)
\end{aligned}
$$

d.h.

$$x_i \in f^{-1}(N)^C \cap f^{-1}(N) = \emptyset$$

ein Widerspruch, d.h. f ist stetig. ■

25. Die Produkttopologie

Definition 25.1 *Sei $M \subset Pot(X)$. Die* ***von M erzeugte Topologie*** *ist die kleinste Topologie, die M enthält*

$$\begin{aligned} T(M) &= \bigcap_{T_i \ \text{Topologie},\ M \subset T_i} T_i \\ &= \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} M_k \ \text{mit}\ M_k \in M, n_i \in \mathbb{N} \right\} \cup \{X, \emptyset\} \end{aligned}$$

Es kann geschehen, dass

$$T = Pot(X)$$

Beweis. a) Der Schnitt ist nicht leer, da Pot(X) eine Topologie ist.

$$\begin{aligned} \forall i : \emptyset, X \in T_i &\Rightarrow \emptyset, X \in \bigcap_i T_i = T \\ A, B \in T &\Rightarrow \forall i : A, B \in T_i \\ &\overset{T_i \text{Topologie}}{\Rightarrow} \forall i : A \cap B \in T_i \\ &\Rightarrow A \cap B \in \bigcap_i T_i = T. \\ A_j \in T &\Rightarrow \forall i : A_j \in T_i \\ &\overset{T_i \text{Topologie}}{\Rightarrow} \forall i : \bigcup_{j \in J} A_j \in T_i \\ &\Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \bigcap_i T_i = T \end{aligned}$$

Sie ist die kleinste Topologie, die M enthält, da über alle solchen Topologien geschnitten wird.
b) 1.) T ist eine Topologie: $\emptyset, X \in T$ nach Definition.

$$\begin{aligned} \bigcap_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{i_j \in I} \bigcap_{k_{i_j}=1}^{n_{i_j}} M_{k_{i_j}} \right) &= \bigcup_{i_j \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{k_j=1}^{n_{i_j}} M_{k_{i_j}} \right) \in T \\ \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i_j \in I} \bigcap_{k_j=1}^{n_{i_j}} M_{k_j} \right) &= \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i_j \in I} \left(\bigcap_{k_j=1}^{n_{i_j}} M_{k_j} \right) \in T \end{aligned}$$

2.) T ist die kleinste Topologie, die M enthält:
Jede Topologie T', die M enthält, enthält endliche Schnitte der M_k und beliebige Vereingungen davon, also $T \subset T'$. ∎

Beispiel 25.2 (Produkttopologie) *Seien X, Y topologische Räume. Suche die kleinste Topologie auf $X \times Y$, die alle $U \times V$ mit $U \in T_X, V \in T_Y$ enthält. Diese ist*

$$T_{X \times Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) \mid U_i \in T_X, V_i \in T_Y \right\}$$

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} & X \times Y, \emptyset \times \emptyset \in T \\ (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) &= \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\in T_X} \times \underbrace{(V_1 \cap V_2)}_{\in T_Y} \in T \\ \left(\bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in J} (U_i \times V_i) \right) &= \left(\bigcup_{i \in I \cup J} (U_i \times V_i) \right) \in T \end{aligned}$$

ist $T_{X \times Y}$ eine Topologie. Wegen

$$\bigcap_{k=1}^{n_i} (U_k \times V_k) = \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} U_k \right)}_{\in T_X} \times \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} V_k \right)}_{\in T_Y}$$

entfallen die endlichen Schnitte in der Definition, Vereinigungen sind nicht von der Form $U_i \times V_i$ (siehe Abbildung). ■

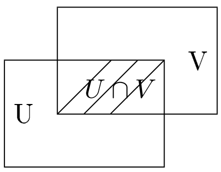


Abbildung 5: Produkttopologie

Satz 25.3

$$\begin{aligned} & N \subset X \times Y \textit{ ist Umgebung von } (x, y) \\ \iff & \exists \textit{ Umgebungen } U(x), V(y) : \ U \times V \subset N. \end{aligned}$$

Beweis. "⇒": Sei N Umgebung von (x,y). Dann gilt

$$\begin{aligned} & \exists \text{ offene } U_i, V_i : (x, y) \in \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) \subset N \\ \Rightarrow \ & \exists i_0 \in I : \ (x, y) \in U_{i_0} \times V_{i_0} \subset N \end{aligned}$$

und U_{i_0}, V_{i_0} sind offene Umgebungen von x,y.
"$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned} & U(x), V(y) \text{ sind Umgebungen} \\ \Rightarrow \quad & \exists \text{ offene } U_0(x), V_0(y) : \begin{cases} U_0(x) \subset U(x) \\ V_0(y) \subset V(y) \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & U_0(x) \times V_0(y) \text{ ist offen} \end{aligned}$$

und wegen

$$(x, y) \in U_0(x) \times V_0(y) \subset N$$

ist N Umgebung von (x,y). ■

Satz 25.4 *Seien X, Y, Z topologische Räume.*
$f : X \times Y \to Z$ ist stetig in (x, y) $\iff$

$$\forall \textit{ Umgebungen } N(f(x,y)) \exists \textit{ Umgebungen } U(x), V(y) : \ f(U \times V) \subset N$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & f : X \times Y \to Z \text{ ist stetig in } (x, y) \\ \overset{Def}{\iff} \quad & \forall \text{ Umgebungen N von } f(x,y) : f^{-1}(N) \text{ Umg. von } (x, y) \\ \iff \quad & \forall \text{ Umgebungen N von } f(x,y) \ \exists \text{ offene } U(x), V(y) : \\ & U \times V \subset f^{-1}(N) \\ \iff \quad & \forall \text{ Umgebungen N von } f(x,y) \ \exists \text{ offene } U(x), V(y) : f(U \times V) \subset N \end{aligned}$$

■

Satz 25.5 *Seien X, Y topologische Räume mit $x_i \to x, y_j \to y$.*
a) Durch

$$(i, j) \leq (i', j') \overset{Def}{\iff} (i \leq i' \textit{ und } j \leq j')$$

ist $I \times J$ gerichtet.
b) Für das Netz $(x_i, y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ auf $X \times Y$ mit der Produkttopologie gilt

$$(x_i, y_j)_{i,j} \to (x, y) \iff (x_i \to x \textit{ und } y_j \to y)$$

Beweis. a) 1.) Wegen $i \leq i, j \leq j$ gilt

$$(i, j) \leq (i, j)$$

2.) Sei $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$ und $(i_2, j_2) \leq (i_1, j_1)$. Nach Definition gilt

$$i_1 \leq i_2 \text{ und } j_1 \leq j_2 \text{ und } i_2 \leq i_1 \text{ und } j_2 \leq j_1$$

Da I,J gerichtet sind, gilt

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 \text{ und } j_1 = j_2 \\ (i_1, j_1) &= (i_2, j_2) \end{aligned}$$

3.) Sei $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$ und $(i_2, j_2) \leq (i_3, j_3)$. Nach Definition gilt

$$i_1 \leq i_2 \text{ und } j_1 \leq j_2 \text{ und } i_2 \leq i_3 \text{ und } j_2 \leq j_3$$

Da I,J gerichtet sind, gilt

$$\begin{aligned} i_1 &\leq i_3 \text{ und } j_1 \leq j_3 \\ (i_1, j_1) &\leq (i_3, j_3) \end{aligned}$$

Seien $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ beliebig. Da I,J gerichtet sind, gilt

$$\exists i_3, j_3 : \ i_1 \leq i_3 \text{ und } i_2 \leq i_3 \text{ und } j_1 \leq j_3 \text{ und } j_2 \leq j_3$$

und somit

$$\forall 1 \leq k \leq 2 : \ (i_k, j_k) \leq (i_3, j_3)$$

b) "$\Rightarrow$": Wähle Umgebungen $U(x), V(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\exists \text{ offene } U_0(x), V_0(y) : \left\{ \begin{array}{l} U_0(x) \subset U \\ V_0(y) \subset V \end{array} \right. \\ &U_0(x) \times V_0(y) \text{ ist offen} \end{aligned}$$

Wegen $(x_i, y_j)_{i,j} \to (x, y)$ gilt

$$\begin{aligned} & \exists (i_0, j_0) \ \forall (i,j) \geq (i_0, j_0) : (x_i, y_j) \in U_0 \times V_0 \\ \Rightarrow \ & \exists i_0 \ \forall i \geq i_0 : \ x_i \in U_0 \subset U(x) \text{ und } \exists j_0 \ \forall j \geq j_0 : y_j \in V_0 \subset V(x) \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Sei N Umgebung von (x,y). Dann gilt

$$\exists \text{ offene } U(x), V(y) : \ U \times V \subset N$$

Wegen $x_i \to x, y_j \to y$ gilt

$$\begin{aligned} & \forall U(x) \ \exists i_0 \ \forall i \geq i_0 : x_i \in U(x) \\ & \forall V(y) \ \exists j_0 \ \forall j \geq j_0 : y_j \in V(y) \\ \Rightarrow \ & \exists (i_0, j_0) \ \forall i \geq i_0 \ \forall j \geq j_0 : (x_i, y_j) \in U \times V \\ \Rightarrow \ & \exists (i_0, j_0) \ \forall (i,j) \geq (i_0, j_0) : (x_i, y_j) \in U \times V \subset N \end{aligned}$$

■

Satz 25.6 $f : X \times Y \to Z$ *ist stetig* $\iff$

$$(x_i \to x \textit{ und } y_j \to y) \Rightarrow f(x_i, y_j)_{i,j} \to f(x, y)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & f : X \times Y \to Z \text{ ist stetig} \\ \iff \quad & ((x_i, y_j)_{i,j} \to (x, y) \Rightarrow f(x_i, y_j) \to f(x, y)) \\ \iff \quad & (x_i \to x \text{ und } y_j \to y \Rightarrow f(x_i, y_j)_{i,j} \to f(x, y)) \end{aligned}$$

■

26. Mengenlehre

Definition 26.1 *a)* $(I, <)$ *heißt* ***teilgeordnet*** $\iff$

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall i \in I: \; i \not< i \\ 2.) & (i < j \text{ und } j < k) \Rightarrow i < k \end{array}$$

b) Eine teilgeordnete Menge heißt ***linear geordnet*** $\iff$

$$3.) \qquad \forall i, j \in I: \; (i < j \text{ oder } j < i \text{ oder } i = j)$$

c) $\emptyset \neq K \subset I$ *heißt eine* ***Kette in I*** $\iff$

$$(K, <) \text{ ist linear geordnet}$$

d) $a \in I$ *ist* ***obere Schranke*** *von* $\emptyset \neq J \subset I$ $\iff$

$$\forall i \in J: \; i \leq a$$

e) Sei $\emptyset \neq J \subset I$. $a \in J$ *heißt* ***maximales Element von J*** $\iff$

$$\forall i \in J: \; a \not< i$$

Satz 26.2 *Sei* $I \neq \emptyset$. *Ist* $(I, <)$ *teilgeordnet mit*

Jede Kette in I hat eine obere Schranke

so gilt

I hat ein maximales Element

Wenn wir diesen "Satz" in der Mengenlehre fordern, bleibt das Axiomensystem widerspruchsfrei und wir können die folgenden Aussagen beweisen:

Jeder Vektorraum hat ein maximal linear unabhängiges System
Es gibt maximale Filter, das Produkt kompakter Räume ist kompakt
Ein stetiges $f: G \subset X \to \mathbb{K}$ läßt sich fortsetzen zu stetigem $f: X \to \mathbb{K}$
Jeder Hilbertraum hat eine maximale senkrechte Familie der Länge 1
Es gibt maximale Ideale

Beispiel 26.3 *Jeder Vektorraum V hat ein maximal linear unabhängiges System. Dieses heißt Basis.*

Beweis. Sei

$$F = \{v_i : i \in J, v_i \text{ linear unabhängig}\}$$

mit

$$(v_i)_{i\in J_1} < (v_i)_{i\in J_2} \iff \{v_i : i \in J_1\} \subsetneqq \{v_i : i \in J_2\}$$

Wegen

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall J : \{v_i : i \in J\} = \{v_i : i \in J\} \\ 2.) & (\{v_i : i \in J_1\} \subsetneqq \{v_i : i \in J_2\} \text{ und } \{v_i : i \in J_2\} \subsetneqq \{v_i : i \in J_3\}) \\ & \Rightarrow \{v_i : i \in J_1\} \subsetneqq \{v_i : i \in J_3\} \end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall J : (v_i)_{i\in J} \not< (v_i)_{i\in J} \\ 2.) & ((v_i)_{i\in J_1} < (v_i)_{i\in J_2} \text{ und } (v_i)_{i\in J_2} < (v_i)_{i\in J_3}) \Rightarrow (v_i)_{i\in J_1} < (v_i)_{i\in J_3} \end{array}$$

und F ist teilgeordnet.
Sei $F_1 \subset F$ eine Kette, d.h. es gilt

3.)$\forall J_1, J_2 : ((v_i)_{i\in J_1} < (v_i)_{i\in J_2}$ oder $(v_i)_{i\in J_1} > (v_i)_{i\in J_2}$ oder $(v_i)_{i\in J_1} = (v_i)_{i\in J_2})$

Betrachte

$$\bigcup_{J_k \in F_1} \{v_i : i \in J_k, v_i \text{ linear unabhängig}\}$$

Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & v_1, \ldots, v_n \in \bigcup_{J_k \in F_1} \{v_i : i \in J_k, v_i \text{ linear unabhängig}\} \\ \Rightarrow & \exists k_1, \ldots, k_n : \ v_j \in \{v_i : i \in J_{k_j}, v_i \text{ linear unabhängig}\} \\ \Rightarrow & v_1, \ldots, v_n \in \{v_i : i \in J_{\max\{k_1,\ldots,k_n\}}, v_i \text{ linear unabhängig}\} \\ \Rightarrow & v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig} \end{array}$$

Damit ist $\bigcup_{J_k\in F_1}\{v_i : i \in J_k, v_i$ linear unabhängig$\}$ eine obere Schranke von F_1.
Da die Kette beliebig war, existiert ein maximales Element in F. ■

27. Filter

Definition 27.1 *a) Seien $\mathbb{U}(x)$ die Umgebungen von x.*
b) $\mathbb{F} \subset Pot(X)$ heißt ***Filter*** $\iff$

$$\begin{aligned} &1.) \quad X \in \mathbb{F}, \emptyset \notin \mathbb{F} \\ &2.) \quad F_1, F_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F} \\ &3.) \quad F \in \mathbb{F}, F' \supset F \Rightarrow F' \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

c) Seien $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ Filter auf X.

$$\mathbb{F}_1 \textit{ heißt } \textbf{\textit{feiner}} \textit{ als } \mathbb{F}_2 \iff \mathbb{F}_1 \supset \mathbb{F}_2$$

d) Ein Filter $\mathbb{F}$ auf X heißt ***maximal*** $\iff$

$$\mathbb{F} \supset \mathbb{G} \Rightarrow \mathbb{F} = \mathbb{G}$$

d.h. es gibt keinen Filter auf X, der echt feiner ist als $\mathbb{F}$.

Bemerkung 27.2 *1.) Es soll immer ein Element y in $F \in \mathbb{F}$ sein, das gegen x gehen kann. Deshalb wird die leere Menge ausgeschlossen.*
$X \in \mathbb{F}$ sorgt dafür, dass ein Filter immer definiert ist.
2.) Wie bei der Topologie werden nur endliche Schnitte zugelassen.
3.) Alle größeren Mengen sollen zum Filter gehören, das passt zur Vorstellung von Umgebungen.

Beispiel 27.3 *$\mathbb{U}(x)$ ist ein Filter auf X. Er heißt* ***Umgebungsfilter*** *von x.*

Beweis. 1.) Da X offen und $x \in X$ gilt

$$X \text{ ist Umgebung von } x$$

Wegen $x \notin \emptyset$ gilt

$$\emptyset \text{ ist keine Umgebung von } x$$

2.) Seien N_1, N_2 Umgebungen von x, d.h.

$$\begin{aligned} & \exists \text{ offene } U_i : \ x \in U_i \subset N_i \\ \Rightarrow \quad & x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\text{offen}} \subset N_1 \cap N_2 \\ \Rightarrow \quad & N_1 \cap N_2 \text{ ist Umgebung von } x \end{aligned}$$

3.) Da N Umgebung von x ist, gilt

$$\exists \text{ offene } U : \ x \in U \subset N$$

Für $N' \supset N$ gilt

$$x \in U \subset N \subset N'$$

d.h. N' ist eine Umgebung von x. ■

Definition 27.4 *$\emptyset \neq \mathbb{B} \subset \mathbb{F}$ mit $\emptyset \notin \mathbb{B}$ heißt **Filterbasis** für den Filter $\mathbb{F}$ $\Leftrightarrow$*

$$\forall F \in \mathbb{F}\ \exists B \in \mathbb{B} : B \subset F$$

Satz 27.5 *Eine Menge $\emptyset \neq \mathbb{B} \subset Pot(X)$ mit $\emptyset \notin \mathbb{B}$ ist Filterbasis für einen Filter $\mathbb{F}$ $\Leftrightarrow$*

$$\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B}\ \exists B_3 \in \mathbb{B} :\ B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

Beweis. $'' \Rightarrow''$: Wegen

$$\begin{array}{rl} & B_1, B_2 \in \mathbb{B} \subset \mathbb{F} \\ \overset{\text{Filter}}{\Rightarrow} & B_1 \cap B_2 \in \mathbb{F} \end{array}$$

Wähle $B_3 = B_1 \cap B_2$.
$'' \Leftarrow''$: Setze

$$\mathbb{F} = \{F \subset X \mid \exists B \in \mathbb{B} :\ B \subset F\}$$

Sei $F' \supset F$. Wegen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{B} \neq \emptyset & \Rightarrow & X \in \mathbb{F} \\ \emptyset \notin \mathbb{B} & \Rightarrow & \emptyset \notin \mathbb{F} \\ F_1, F_2 \in \mathbb{F} & \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} & \exists B_i \subset F_i \\ & \overset{\text{Filterbasis}}{\Rightarrow} & \exists B_3 \in \mathbb{B} :\ B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2 \\ & \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} & F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F} \\ B \subset F & \Rightarrow & B \subset F \subset F' \\ & \Rightarrow & F' \in \mathbb{F} \end{array}$$

ist $\mathbb{F}$ ein Filter. Da

$$\forall F \in \mathbb{F}\ \exists B \in \mathbb{B} : B \subset F$$

ist $\mathbb{B}$ Filterbasis von $\mathbb{F}$. ■

Satz 27.6 *a) Jeder Filter $\mathbb{F}$ ist in einem maximalen Filter enthalten.*
b) $\mathbb{F}$ ist maximaler Filter auf X $\Leftrightarrow$

$$\forall A \subset X :\ A \in \mathbb{F} \text{ oder } A^C \in \mathbb{F}$$

Beweis. a) Betrachte die Menge der Filter auf X, die echt feiner sind als $\mathbb{F}$

$$H = \{\mathbb{F}_i : \mathbb{F}_i \text{ Filter}, \mathbb{F}_i \underset{\neq}{\supseteq} \mathbb{F}\}$$

mit

$$\mathbb{F}_i < \mathbb{F}_j \iff \mathbb{F}_i \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{F}_j$$

Wegen

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall i \in I: \ \mathbb{F}_i = \mathbb{F}_i \\ 2.) & (\mathbb{F}_i \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{F}_j \text{ und } \mathbb{F}_j \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{F}_k) \Rightarrow (\mathbb{F}_i \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{F}_k) \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall i \in I: \ \mathbb{F}_i \not< \mathbb{F}_k \\ 2.) & (\mathbb{F}_i < \mathbb{F}_j \text{ und } \mathbb{F}_j < \mathbb{F}_k) \Rightarrow (\mathbb{F}_i < \mathbb{F}_k) \end{array}$$

ist H teilgeordnet.
Sei $H_1 \subset H$ eine Kette, d.h. es gilt

$$3.) \qquad \forall i, j \in I: \ \mathbb{F}_i < \mathbb{F}_j \text{ oder } \mathbb{F}_i > \mathbb{F}_j \text{ oder } \mathbb{F}_i = \mathbb{F}_j$$

Betrachte

$$\bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i$$

1.)

$$\begin{aligned} \forall i \in I: \ \emptyset \notin \mathbb{F}_i \quad &\Rightarrow \quad \emptyset \notin \bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i \\ \forall i \in I: \ X \in \mathbb{F}_i \quad &\Rightarrow \quad X \in \bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i \end{aligned}$$

2.) Seien $F, G \in \bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \exists i: \ F \in \mathbb{F}_i \text{ und } \exists j: G \in \mathbb{F}_j \\ \overset{i \leq j}{\Rightarrow} \quad & F, G \in \mathbb{F}_j \\ \overset{\mathbb{F}_i \text{Filter}}{\Rightarrow} \quad & F \cap G \in \mathbb{F}_j \\ \Rightarrow \quad & F \cap G \in \bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i \end{aligned}$$

3.) Seien $F \in \bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i$ und $F' \supset F$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \exists i \in I: \ F \in \mathbb{F}_i \\ \overset{\text{Filter}}{\Rightarrow} \quad & \exists i \in I: \ F' \in \mathbb{F}_i \\ \Rightarrow \quad & F' \in \bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i \end{aligned}$$

Damit ist $\bigcup_{\mathbb{F}_i \in H_1} \mathbb{F}_i$ ein Filter und eine obere Schranke von der Kette H_1.
Da H_1 eine beliebige Kette war, existiert ein maximales Element $\mathbb{G}$.
Annahme: Es existiert ein Filter $\mathbb{H}$ mit $\mathbb{H} \supsetneqq \mathbb{G}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\in H \\ \mathbb{H} &> \mathbb{G} \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Maximalität von $\mathbb{G}$ in H.
Damit ist $\mathbb{G}$ maximaler Filter.
b) "$\Rightarrow$": Sei $A \subset X$ beliebig. Annahme:

$$\begin{array}{rl} & \exists F_1 \in \mathbb{F}: \; F_1 \subset A \\ \text{und} & \exists F_2 \in \mathbb{F}: \; F_2 \subset A^C \end{array}$$

Dann folgt

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset \in \mathbb{F}$$

ein Widerspruch, d.h. es gilt

$$\begin{array}{rl} \text{Entweder} & \forall F_1 \in \mathbb{F}: \; F_1 \cap A^C \neq \emptyset \\ \text{oder} & \forall F_2 \in \mathbb{F}: \; F_2 \cap A \neq \emptyset \end{array}$$

Ohne Einschränkung gelte

$$\forall F \in \mathbb{F}: \; F \cap A \neq \emptyset$$

d.h. $A \neq \emptyset$. Betrachte

$$\mathbb{B} := \{F \cap A : F \in \mathbb{F}\}$$

2.) Seien $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$. Wegen

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{X}_{\in \mathbb{F}} \cap A = A \in \mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B} \neq \emptyset \\ \forall F \in \mathbb{F}: \; F \cap A \neq \emptyset & \Rightarrow & \emptyset \notin \mathbb{B} \end{array}$$

und

$$(F_1 \cap A) \cap (F_2 \cap A) = \underbrace{(F_1 \cap F_2)}_{\in \mathbb{F}} \cap A \in \mathbb{B}$$

ist $\mathbb{B}$ Filter-Basis für einen Filter $\mathbb{G}$.
3.) Wegen

$$\forall F \in \mathbb{F}: \; A \cap F \subset F$$

gilt

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{G} \supset \mathbb{F} \\ \overset{\mathbb{F} \text{ maximal}}{\Rightarrow} & \mathbb{G} = \mathbb{F} \end{array}$$

und

$$A = X \cap A \in \mathbb{G} = \mathbb{F}$$

"$\Leftarrow$": Annahme: $\mathbb{G}$ ist echt feiner als $\mathbb{F}$, d.h.

$$\exists G_1 \in \mathbb{G} \setminus \mathbb{F}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} G_1^C &\in \mathbb{F} \subset \mathbb{G} \\ \emptyset &= G_1 \cap G_1^C \in \mathbb{G} \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Damit ist $\mathbb{F}$ maximaler Filter. ■

Definition 27.7 *a) Ein Filter $\mathbb{F}$ geht gegen $x \in X$ (Schreibweise: $\mathbb{F} \to x$) $\iff$*

$$\mathbb{F} \supset \mathbb{U}(x)$$

*Dann heißt x **ein Grenzwert** von $\mathbb{F}$.*
*b) $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** des Filters $\mathbb{F} \Leftrightarrow$*

$$\forall U \in \mathbb{U}(x)\ \forall F \in \mathbb{F} : F \cap U \neq \emptyset$$

Satz 27.8

$$\bigcap_{F \in \mathbb{F}} \overline{F} = \{\text{ Berührungspunkte von } \mathbb{F} \}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & x \text{ ist Berührungspunkt von } \mathbb{F} \\ \overset{Def}{\iff} \quad & \forall U \in \mathbb{U}(x)\ \forall F \in \mathbb{F} : F \cap U \neq \emptyset \\ \overset{\text{Kapitel 1}}{\iff} \quad & \forall F \in \mathbb{F} : x \in \overline{F} \\ \iff \quad & x \in \bigcap_{F \in \mathbb{F}} \overline{F} \end{aligned}$$

■

Satz 27.9 *Ein Punkt $x \in X$ ist Berührungspunkt eines Filters $\mathbb{F}$ $\iff$*

$$\exists \mathbb{G} : \mathbb{G} \supset \mathbb{F} \textit{ und } \mathbb{G} \to x$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Betrachte

$$\mathbb{B} = \{F \cap U : F \in \mathbb{F}, U \in \mathbb{U}(x)\}$$

Wegen

$$\underbrace{X}_{\in\mathbb{F}} \cap \underbrace{X}_{\in\mathbb{U}(x)} = X \quad\Rightarrow\quad \mathbb{B} \neq \emptyset$$

$$\forall U \in \mathbb{U}(x)\ \forall F \in \mathbb{F} : F \cap U \neq \emptyset \quad\Rightarrow\quad \emptyset \notin \mathbb{B}$$

und

$$\underbrace{(U_1 \cap F_1)}_{\in\mathbb{B}} \cap \underbrace{(U_2 \cap F_2)}_{\in\mathbb{B}} = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\in\mathbb{U}(x)} \cap \underbrace{(F_1 \cap F_2)}_{\in\mathbb{F}} \in \mathbb{B}$$

ist $\mathbb{B}$ eine Basis für einen Filter $\mathbb{G}$. Wegen

$$\forall F \in \mathbb{F} :\ F = X \cap F \in \mathbb{B} \subset \mathbb{G}$$

gilt

$$\mathbb{G} \supset \mathbb{F}$$

Wegen

$$U(x) = U(x) \cap X \in \mathbb{B} \subset \mathbb{G}$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{U}(x) & \subset & \mathbb{G} \\ \mathbb{G} & \to & x \end{array}$$

"$\Leftarrow$": Wegen $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ und $\mathbb{G} \to x$ gilt

$$\forall F \in \mathbb{F}\ \forall U \in \mathbb{U}(x) : F, U(x) \in \mathbb{G}$$

und da $\mathbb{G}$ ein Filter ist

$$\forall F \in \mathbb{F}\ \forall U \in \mathbb{U}(x) : F \cap U(x) \neq \emptyset$$

Damit ist x Berührungspunkt. ■

Satz 27.10 *Sei $\emptyset \neq A \subset X$.*
a) Für den Filter

$$\mathbb{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$$

gilt

$$\overline{A} = \text{ Berührungspunkte des Filters } \mathbb{F}$$

b)

$$x \in \overline{A} \iff (\exists \mathbb{G} :\ A \in \mathbb{G} \text{ und } \mathbb{G} \to x)$$

Die abgeschlossenen Mengen und damit die Topologie lassen sich mit Filtern beschreiben.

Beweis. a) Wegen

$$\begin{array}{rcl} A \subset X & \Rightarrow & X \in \mathbb{F} \\ A \neq \emptyset & \Rightarrow & \emptyset \notin \mathbb{F} \\ F_1, F_2 \in \mathbb{F} & \Rightarrow & A \subset F_1 \cap F_2 \\ & \stackrel{Def}{\Rightarrow} & F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F} \\ F' \supset F \in \mathbb{F} & \Rightarrow & A \subset F' \\ & \stackrel{Def}{\Rightarrow} & F' \in \mathbb{F} \end{array}$$

ist $\mathbb{F}$ ein Filter. Nach Definition des Abschlusses ist

$$\overline{A} = \bigcap_{Y \supset A} \overline{Y}$$

Nach Definition des Filters gilt

$$\bigcap_{Y \supset A} \overline{Y} = \bigcap_{F \in \mathbb{F}} \overline{F}$$

Damit ist

$$\begin{array}{rcl} \overline{A} & = & \bigcap\limits_{Y \supset A} \overline{Y} \\ & = & \bigcap\limits_{F \in \mathbb{F}} \overline{F} \\ & = & \{\text{Berührungspunkte von } \mathbb{F}\} \end{array}$$

b) "$\Rightarrow$": Da x Berührungspunkt von $\mathbb{F}$ ist, gilt:

$$\exists \mathbb{G}: \ \mathbb{G} \supset \mathbb{F} \text{ und } \mathbb{G} \to x$$

Wegen $A \in \mathbb{F}$ gilt

$$\exists \mathbb{G}: \ A \in \mathbb{G} \text{ und } \mathbb{G} \to x$$

"$\Leftarrow$":

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathbb{G} & \stackrel{\mathbb{G}\text{ Filter}}{\Rightarrow} & \mathbb{F} = \{F \subset X : A \subset F\} \subset \mathbb{G} \\ & \stackrel{\mathbb{G} \to x}{\Rightarrow} & \text{x ist Berührungspunkt von } \mathbb{F} \\ & \stackrel{a)}{\Rightarrow} & x \in \overline{A} \end{array}$$

∎

Definition 27.11 *Sei $\mathbb{F}$ ein Filter auf X und $f : X \to Y$.*
Sei $f(\mathbb{F})$ der Filter auf Y, der

$$\mathbb{B} = \{f(F) : F \in \mathbb{F}\}$$

als Basis hat. Er heißt ***Bildfilter*** *oder Bild von $\mathbb{F}$ unter f.*

Beweis. Wegen

$$\begin{array}{rcl} f(X) \in \mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B} \neq \emptyset \\ \emptyset \notin \mathbb{F} & \Rightarrow & \emptyset \notin \mathbb{B} \\ F_1 \cap F_2 \neq \emptyset & \Rightarrow & \exists x \in F_1 \cap F_2 \\ & \Rightarrow & f(x) \in f(F_1 \cap F_2) = f(F_1) \cap f(F_2) \end{array}$$

ist $\mathbb{B}$ eine Filterbasis. ∎

Satz 27.12 *Seien X, Y topologische Räume und $A \subset X$. Dann gilt:*

$$f : X \to Y \textit{ ist stetig in } x \in X \iff \forall \mathbb{F} : (\mathbb{F} \to x \Rightarrow f(\mathbb{F}) \to f(x))$$

Filter beschreiben die Stetigkeit genau wie Netze es tun.

Beweis. "⇒":

$$\begin{array}{cl} & V \text{ ist Umgebung von } f(x) \\ \overset{\text{f stetig}}{\Rightarrow} & \exists U \in \mathbb{U}(x) : f(U) \subset V(f(x)) \\ \overset{\mathbb{U}(x)\subset\mathbb{F},\text{Bildfilter}}{\Rightarrow} & V(f(x)) \in f(\mathbb{F}) \\ \overset{V \text{ beliebig}}{\Rightarrow} & \mathbb{U}(f(x)) \subset f(\mathbb{F}) \\ \Rightarrow & f(\mathbb{F}) \to f(x) \end{array}$$

"⇐" Setze $\mathbb{F} = \mathbb{U}(x)$. Dann gilt

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{F} \to x \\ \Rightarrow & \mathbb{U}(f(x)) \subset f(\mathbb{F}) \\ \Rightarrow & \forall \text{ Umgebungen } V(f(x)) : \; V(f(x)) \in f(\mathbb{U}(x)) \\ \overset{\text{Definition von } f(\mathbb{U}(x))}{\Rightarrow} & \exists\, U \in \mathbb{U}(x) : f(U) \subset V(f(x)) \end{array}$$

∎

Definition 27.13 *Seien $(X_i, T_i)_{i \in I}$ topologische Räume, $f_i : X \to X_i$ Abbildungen.*

$$T = T\left(\bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in T_i\}\right)$$

heißt die ***von den f_i erzeugte Topologie.***
Alle f_i sind stetig bzgl dieser Topologie.

Beweis.

$$\begin{aligned} U_i \in T_i &\overset{Def}{\Rightarrow} f_i^{-1}(U_i) \in T \\ &\Rightarrow f_i \text{ ist stetig} \end{aligned}$$

■

Satz 27.14 *Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume, T die von den $f_i : X \to X_i$ erzeugte Topologie und sei $\mathbb{F}$ ein Filter auf X. Dann gilt:*

$$\mathbb{F} \to x \in X \Leftrightarrow \forall i \in I: \; f_i(\mathbb{F}) \to f_i(x)$$

Beweis. "⇒"

$$\mathbb{F} \to x \overset{f_i \text{ stetig}}{\Rightarrow} f_i(\mathbb{F}) \to f_i(x)$$

"⇐"

$$f_i(\mathbb{F}) \to f_i(x) \Rightarrow \mathbb{U}(f_i(x)) \subset f_i(\mathbb{F})$$

Da $f_i(F)$ Basis von $f_i(\mathbb{F})$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} &\forall U(f_i(x)) \, \exists F_i \in \mathbb{F}: \; f_i(F_i) \subset U(f_i(x)) \\ &\forall U(f_i(x)) \, \exists F_i \in \mathbb{F}: \; F_i \subset f_i^{-1}(U(f_i(x))) \end{aligned}$$

Sei $V(x)$ offen. Da die Topologie von $\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \subset T_i\}$ erzeugt wird, gilt

$$\begin{aligned} & V(x) = \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I_j, |I_j|<\infty} f_i^{-1}(U_i) \\ \Rightarrow \quad & \underbrace{\bigcap_{i\in I_j} F_i}_{\in\mathbb{F}} \subset \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I_j, |I_j|<\infty} f_i^{-1}(U_i(f_i(x))) \\ \overset{\mathbb{F} \text{ Filter}}{\Rightarrow} \quad & \mathbb{U}(x) \subset \mathbb{F} \\ \Rightarrow \quad & \mathbb{F} \to x \end{aligned}$$

■

Satz 27.15 *Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume und*

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} X_i &= \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i\} \\ &= X_1 \times X_2 \times \dots \end{aligned}$$

der Produktraum und

$$p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i, (x_i)_{i\in I} \to x_i$$

Die von den p_i erzeugte Topologie heißt ***Produkttopologie*** *und es gilt*

$$\mathbb{F} \to x \Leftrightarrow \forall i \in I : p_i(\mathbb{F}) \to p_i(x)$$

Beweis. Das haben wir gerade gezeigt. ■

Definition 27.16 *X heißt kompakt* ⇔

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X, U_i \text{ offen } \Rightarrow \exists I' \subset I, |I'| < \infty : \bigcup_{i\in I'} U_i = X$$

Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung von X.

Satz 27.17 *Gleichwertig sind*
a) X ist kompakt.
b) Seien $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossene Mengen.

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset \Rightarrow \exists |I'| < \infty : \bigcap_{i\in I'} A_i = \emptyset$$

c) Jeder Filter auf X besitzt einen Berührungspunkt.
d) Jeder maximale Filter hat einen Grenzwert.

Beweis. a) ⇒ b)

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i\in I} A_i^C \text{ ist eine offene Überdeckung von } X \\ \Rightarrow\quad & \exists\ I', |I'| < \infty : \bigcup_{i\in I'} A_i^C = X \\ \Rightarrow\quad & \exists\ I', |I'| < \infty : \bigcap_{i\in I'} A_i = \emptyset \end{aligned}$$

b) ⇒ c) Sei $\mathbb{F}$ beliebig. Es gilt

$$\text{Menge der Berührungspunkte } = \bigcap_{F\in\mathbb{F}} \overline{F}$$

Annahme: Es gibt keine Berührungspunkte. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcap_{F\in\mathbb{F}} \overline{F} = \emptyset \quad & \overset{b)}{\Rightarrow} \quad \bigcap_{i\in I'} \overline{F_i} = \emptyset \\ & \Rightarrow \quad \emptyset = \bigcap_{i\in I'} \overline{F_i} \supset \bigcap_{i\in I'} F_i \in \mathbb{F} \\ & \Rightarrow \quad \emptyset \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

ein Widerspruch.
c) ⇒ d) Wir haben schon gezeigt

$$\mathbb{F} \text{ hat Berührungspunkt } x \Leftrightarrow \exists \mathbb{G} : \mathbb{F} \subset \mathbb{G} \text{ und } \mathbb{G} \to x$$

Da $\mathbb{F}$ maximaler Filter ist, folgt

$$\mathbb{F} = \mathbb{G} \to x$$

d) $\Rightarrow$ **a)** Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Setze

$$\forall L \subset I, |L| < \infty : \; A_L := \left(\bigcup_{i \in L} U_i \right)^C \neq \emptyset$$

Wegen

$$\begin{aligned} (A_L \cap A_M)^C &= A_L^C \cup A_M^C \\ &= \bigcup_{i \in L} U_i \cup \bigcup_{i \in M} U_i \\ &= \bigcup_{i \in L \cup M} U_i \neq X \end{aligned}$$

gilt

$$A_L \cap A_M \neq \emptyset$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in L} U_i \right)^C \cap \left(\bigcup_{i \in M} U_i \right)^C &= \left(\left(\bigcup_{i \in L} U_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in M} U_i \right) \right)^C \\ &= \left(\bigcup_{i \in L \cup M} U_i \right)^C \end{aligned}$$

gilt

$$\forall A_L, A_M \; \exists A_{L \cup M} : \; A_{L \cup M} = A_L \cap A_M$$

Damit ist

$$\mathbb{B} = \{ A_L : L \subset I, |L| < \infty, \} \neq \emptyset$$

eine Basis für einen Filter $\mathbb{F}$.
$\mathbb{F}$ ist in einem maximalen Filter $\mathbb{G}$ enthalten.

$$\begin{aligned} \mathbb{G} \text{ maximal} &\overset{Vor}{\Rightarrow} \; \exists x : \; \mathbb{G} \to x \\ &\Rightarrow \; \mathbb{U}(x) \subset \mathbb{G} \\ X = \bigcup_{i \in I} U_i &\Rightarrow \; \exists i \in I : \; x \in U_i \end{aligned}$$

Da die U_i offen sind, gilt

$$U_i \in \mathbb{U}(x) \subset \mathbb{G}$$

Nach Definition von $\mathbb{F}$ gilt mit $|\{i\}| = 1 < \infty$

$$\begin{aligned} & (U_i)^C \in \mathbb{F} \subset \mathbb{G} \\ \Rightarrow \quad & \emptyset = U_i \cap U_i^C \in \mathbb{G} \end{aligned}$$

Ein Widerspruch. Damit hat $(U_i)_i$ eine endliche Teilüberdeckung. ■

Satz 27.18 *Seien alle $X_i \neq \emptyset$ und T die Produkttopologie auf $X = \prod_{i \in I} X_i$. Dann gilt:*

$$\prod_{i \in I} X_i \quad \textit{ist kompakt} \quad \Longleftrightarrow \forall i \in I : X_i \ \textit{ist kompakt}$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Da $p_i : X \to X_i$ stetig ist, gilt

$$X_i = p_i(X) \text{ ist kompakt}$$

"$\Leftarrow$": Sei $\mathbb{F}$ ein maximaler Filter auf X. Dann gilt

$$\forall i \in I : \ p_i(\mathbb{F}) \text{ ist Filter auf } X_i$$

Da $\mathbb{F}$ maximaler Filter ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{Entweder} \qquad & \ldots X_j \times A \times X_k \times \ldots \in \mathbb{F} \\ \text{oder} \qquad & \ldots X_j \times A^C \times X_k \times \ldots \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \text{Entweder} \qquad & A \in p_i(\mathbb{F}) \\ \text{oder} \qquad & A^C \in p_i(\mathbb{F}) \end{aligned}$$

d.h. $p_i(\mathbb{F})$ ist maximaler Filter.
Mit der Kompaktheit folgt

$$\exists x_i \in X_i : \ p_i(\mathbb{F}) \to x_i$$

Mit der Produkttopologie gilt

$$\mathbb{F} \to (x_i)_{i \in I} \in X$$

Da $\mathbb{F}$ beliebig war, ist X kompakt. ■

28. Kompakte Abstandsräume

Satz 28.1 *Sei (X,d) Abstandsraum. Dann sind gleichwertig:*
a) X ist kompakt
b) Jede Folge in X hat eine Teilfolge, die einen Grenzwert hat. (Irgendeinem Punkt muss sie sich beliebig genau nähern).
c) X ist vollständig und

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \exists x_1, \ldots, x_n \in X : \; X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Annahme: $(x_n)_n$ hat keine Teilfolge, die einen Grenzwert hat. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \forall x \in X : \; x \text{ ist nicht Häufungspunkt von } (x_n)_n \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in X \; \neg \left(\exists (x_{n_k})_k : \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x \right) \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in X \; \neg \left(\exists \text{ unendlich viele } x_{n_k} \in B(x, \varepsilon_x) \right) \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in X \; \exists \varepsilon_x > 0 : \; B(x, \varepsilon_x) \text{ enthält nur endlich viele } x_k
\end{aligned}$$

Wegen

$$X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x) \overset{X \text{kompakt}}{\Rightarrow} X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_{x_i})$$

sind dann nur endlich viele Folgenglieder in X, ein Widerspruch.
b) $\Rightarrow$ c): 1.) Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge.
Nach b) hat eine Teilfolge den Grenzwert x.
Damit hat $(x_n)_n$ den Grenzwert x und X ist vollständig.
2.) Annahme: Es gilt nicht

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \exists x_1, \ldots, x_n \in X : \; X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x_1, \ldots, x_n \in X : \; \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subsetneqq X$$

Erzeuge damit eine Folge ohne Teilfolgen mit einem Grenzwert:
Sei $x_1 \in X$ beliebig. n=1:

$$\begin{aligned}
& B(x_1, \varepsilon) \subsetneqq X \\
\Rightarrow \quad & \exists x_2 \in X : \; d(x_2, x_1) \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

$n \to n+1:$

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subsetneqq X \\
\Rightarrow \quad & \exists x_{n+1} \in X \; \forall 1 \leq i \leq n: \; d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Das ergibt eine Folge $(x_n)_n$ mit

$$\forall k > n: \; d(x_n, x_k) \geq \varepsilon$$

Somit kann keine Teilfolge Cauchyfolge sein.
Somit kann keine Teilfolge einen Grenzwert haben im Widerspruch zu b).
Damit ist die Annahme falsch und es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \exists x_1, \ldots, x_n \in X: \; X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

c) $\Rightarrow$ a): Annahme: Es existiert eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

ohne endliche Teilüberdeckung.
Nach Voraussetzung gilt

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \; \exists x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)} \in X: \; X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i^{(1)}, 1)$$

Annahme: $B(x_1^{(1)}, 1), \ldots, B(x_{n_1}^{(1)}, 1)$ sind endlich überdeckbar durch $(U_i)_i$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ ist endlich überdeckbar}$$

ein Widerspruch, d.h. ein $B(x_i^{(1)}, 1)$ ist nicht endlich überdeckbar.
Nach Umbenennen der $x_i^{(1)}$ gilt

$$B(x_1, 1) \text{ ist nicht endlich überdeckbar}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
X &= \bigcup_{k=1}^{n_2} B\left(x_k^{(2)}, \frac{1}{2}\right) \\
B\left(x_1, 1\right) &= \bigcup_{k=1}^{n_2} \underbrace{B\left(x_1^{(1)}, 1\right) \cap B\left(x_k^{(2)}, \frac{1}{2}\right)}_{\text{offen}}
\end{aligned}$$

Wähle ein $x_k^{(2)} \in B(x_1, 1)$.
Wegen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt nach Umbennenen

$$B(x_1, 1) \cap B\left(x_2, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset \text{ ist nicht endlich überdeckbar}$$

Induktion ergibt eine Folge $(x_n)_n$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{1}{2^{k-1}}\right) \neq \emptyset \text{ ist nicht endlich überdeckbar}$$

$$\forall m \geq n_0 : x_m \in \bigcap_{k=1}^{n_0} B\left(x_k, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0 :\ d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n) \\ &< \frac{1}{2^{n_0-1}} + \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.
Da X vollständig ist, hat $(x_n)_n$ einen Grenzwert x.
Da $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt

$$\begin{aligned} &\exists i_0 :\ x \in U_{i_0} \\ \overset{U_{i_0} \text{ offen}}{\Rightarrow}\ &\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset U_{i_0} \end{aligned}$$

Wähle n so groß, daß

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\delta}{2} \\ \frac{1}{2^{n-1}} &< \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Für $z \in B\left(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ gilt:

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, x_n) + d(x_n, x) \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{\delta}{2} < \delta \\ \bigcap_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2^{i-1}}\right) &\subset B\left(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\subset B(x, \delta) \subset U_{i_0} \end{aligned}$$

und $\bigcap_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ ist endlich überdeckbar durch U_{i_0} im Widerspruch zur Konstruktion der x_n.
■

Satz 28.2 *Sei X vollständiger Abstandsraum, $A \subset X$.*
Dann ist $\overline{A}$ ein vollständiger Abstandsraum und es sind gleichwertig:
1.) $\overline{A}$ ist kompakt.
2.) Jede Folge in $\overline{A}$ hat eine Teilfolge, die einen Grenzwert hat.
3.) Jede Folge in A hat eine Teilfolge, die Cauchyfolge ist.
4.) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \overline{A}:\ \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$

Beweis. Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge in A.
Da X vollständig ist, hat sie einen Grenzwert $x \in X$.
Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in A$ und A ist vollständig.
1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 4): schon gezeigt.
2) $\Rightarrow$ 3): Eine Teilfolge mit einem Grenzwert, ist eine Cauchyfolge.
3) $\Rightarrow$ 2): Eine Teilfolge, die Cauchyfolge ist, hat in dem vollständigen A einen Grenzwert. ■

Satz 28.3 *Sei X kompakter Abstandsraum, $M \subset C(X, \mathbb{K})$. Dann gilt:*
$\overline{M}$ ist kompakt $\Longleftrightarrow$
i) M ist ***punktweise beschränkt****, d.h.*

$$\forall x \in X\ \exists C_x > 0:\ \sup_{f \in M} |f(x)| \leq C_x$$

ii) M ist ***gleichgradig stetig****, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in M: \quad (d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei $(f_n)_n$ beliebige Folge in M.
1.) X ist kompakt $\Rightarrow$ X hat eine abzählbare dichte Teilmenge
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{1}{n}\right) \overset{X \text{ kompakt}}{\Rightarrow} X \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} B\left(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$$

Die Menge

$$\{x_i^{(n)} : 1 \leq i \leq m_n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i^{(n)} : 1 \leq i \leq m_n\}$$

ist als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar.
Sei $y \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\exists n > \frac{1}{\varepsilon}\ \exists i_0:\ y \in B\left(x_{i_0}^{(n)}, \frac{1}{n}\right) \subset B\left(x_{i_0}^{(n)}, \varepsilon\right)$$

Damit ist

$$\{x_i^{(n)} : 1 \leq i \leq m_n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i^{(n)} : 1 \leq i \leq m_n\}$$

dicht in X.
2.) M ist punktweise beschränkt $\Rightarrow (f_n)_n$ hat eine Teilfolge $(g_n)_n$, die punktweise einen Grenzwert hat
Die Folge $(x_m)_m$ sei dicht in X. m=1

$$\begin{aligned}
&\exists C_{x_1} \geq 0: \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x_1)| \leq C_{x_1} \\
\Rightarrow\quad & \{f_n(x_1) : n \in \mathbb{N}\} \subset \underbrace{\overline{B(0, C_{x_1})}}_{\text{kompakt}} \subset \mathbb{K} \\
\Rightarrow\quad & \exists \text{ eine Teilfolge } (f_n^{(1)}(x_1))_n, \text{ die einen Grenzwert hat}
\end{aligned}$$

$m-1 \to m$: Wende die Teilfolge $(f_n^{(m-1)})_n$ auf x_m an, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\exists C_{x_m} \geq 0: \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n^{(m-1)}(x_m)| \leq C_{x_m} \\
\Rightarrow\quad & \{f_n^{(m-1)}(x_m) : n \in \mathbb{N}\} \subset \underbrace{\overline{B(0, C_{x_m})}}_{\text{kompakt}} \subset \mathbb{K} \\
\Rightarrow\quad & \exists \text{ eine Teilfolge } (f_n^{(m)}(x_m))_n, \text{ die einen Grenzwert hat}
\end{aligned}$$

Setze
$$\forall n \in \mathbb{N}: \; g_n := f_n^{(n)}$$
Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. $(f_n^{(m)}(x_m))_n$ hat einen Grenzwert nach Konstruktion.
Dann hat für alle $l \geq m$ auch $(f_n^{(l)}(x_m))_n$ einen Grenzwert, da es eine Teilfolge davon ist.
Damit hat $(g_n(x_m))_n = \left(f_n^{(n)}(x_m)\right)_n$ für alle m einen Grenzwert, da es eine Teilfolge davon ist.
Damit hat $(g_n)_n$ punktweise auf der dichten Teilmenge von X einen Grenzwert.
3.) X ist kompakt und M ist gleichgradig stetig $\Rightarrow (g_i)_i$ hat gleichmäßig einen Grenzwert
Seien $\varepsilon > 0$ beliebig.
Da M gleichgradig stetig ist, wähle ein passendes $\delta > 0$. Mit

$$X = \bigcup_{y\in X} B\left(y, \frac{\delta}{2}\right) \overset{\text{X kompakt}}{\Rightarrow} X = \bigcup_{k=1}^{l} B\left(y_k, \frac{\delta}{2}\right)$$

und da $(x_m)_m$ dicht ist in X, enthält jedes $B\left(y_k, \frac{\delta}{2}\right)$ eines der x_m.
Nach Umnummerieren gilt

$$x_k \in B\left(y_k, \frac{\delta}{2}\right)$$

Nach 2.) gilt

$$\begin{array}{cl} & \forall 1 \leq k \leq l: \ (g_i(x_k))_i \text{ hat einen Grenzwert} \\ \Rightarrow & \forall 1 \leq k \leq l: \ (g_i(x_k))_i \text{ ist Cauchyfolge} \\ \Rightarrow & \forall 1 \leq k \leq l \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists i_{0,k} \forall i, j \geq i_{0,k}: \\ & |g_i(x_k) - g_j(x_k)| < \varepsilon \\ \overset{i_0 := \max\{i_{0,1},\ldots,i_{0,k}\}}{\Rightarrow} & \forall i, j \geq i_0 \ \forall k = 1, \ldots, l: \ |g_i(x_k) - g_j(x_k)| < \varepsilon \end{array}$$

Sei $x \in X$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} & X = \bigcup_{k=1}^{l} B\left(y_k, \frac{\delta}{2}\right) \\ \Rightarrow \ & \exists 1 \leq k \leq l: \ x \in B\left(y_k, \frac{\delta}{2}\right) \\ \Rightarrow \ & d(x, x_k) < \delta \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{array}{cl} & |g_i(x) - g_j(x)| \\ \leq & |g_i(x) - g_i(x_k)| + |g_i(x_k) - g_j(x_k)| + |g_j(x_k) - g_j(x)| \\ \leq & |f_i^{(i)}(x) - f_i^{(i)}(x_k)| + \varepsilon + |f_j^{(j)}(x_k) - f_j^{(j)}(x)| \\ \overset{\text{gleichgradig stetig}}{<} & \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{array}$$

Da x beliebig war, gilt

$$\begin{aligned} \forall i, j \geq i_0 \ \forall x \in X: |g_i(x) - g_j(x)| &< 3\varepsilon \\ \forall i, j \geq i_0: \| g_i - g_j \|_\infty &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

d.h. $(g_i)_i$ ist Cauchyfolge bzgl $\| \cdot \|_\infty$.
Da $(C(X, \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ vollständig ist, hat $(g_i)_i$ einen Grenzwert.
Da $\overline{M}$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in $\overline{M}$.
D.h. eine beliebige Folge $(f_n)_n$ hat eine Teilfolge, die einen Grenzwert hat.
Damit ist $\overline{M}$ kompakt
"$\Rightarrow$": **1.) M ist punktweise beschränkt:** Für die Abbildung

$$S_x : C(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, f \mapsto f(x)$$

gilt

$$\begin{aligned} S_x(af+g) &= (af+g)(x) \\ &= af(x)+g(x) \\ &= aS_x(f)+S_x(g) \\ |S_x(f)| &= |f(x)| \leq \| f \|_\infty \\ \| S_x \| &\leq 1 \end{aligned}$$

d.h. S_x ist linear und stetig.
Da $\overline{M}$ kompakt, ist $S_x(\overline{M}) \subset \mathbb{K}$ kompakt, d.h.

$$\exists C_x \geq 0 : \ S_x(\overline{M}) \subset \overline{B(0, C_x)}$$

d.h.

$$\forall x \in X \ \exists C_x > 0 : \ \sup_{f \in M} |f(x)| \leq C_x$$

2.) M ist gleichgradig stetig:

$$\overline{M} \subset \bigcup_{f \in M} B\left(f, \frac{\varepsilon}{3}\right) \overset{\overline{M}\text{ kompakt}}{\Rightarrow} \overline{M} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

d.h.

$$\forall f \in M \ \exists 1 \leq i \leq n : \| f - f_i \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da X kompakt ist, sind die f_i gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_i > 0 : \ \left(|x-y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

Wähle

$$\delta := \min_{i=1}^{n} \delta_i$$

Sei $f \in M$ beliebig und $|x-y| < \delta$.
Wähle $1 \leq i \leq n$ mit $\| f - f_i \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(y)| \\ \leq \quad & |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ \overset{\|f-f_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}}{<} \quad & \frac{\varepsilon}{3} + |f_i(x) - f_i(y)| + \frac{\varepsilon}{3} \\ \overset{|x-y|<\delta_i}{\leq} \quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in M : \quad (d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

■

29. Kompaktheit in Längenräumen

Definition 29.1 *Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt** $\iff$*

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \forall x \in X \ \exists \text{ Umgebungsbasis aus kompakten Mengen} \\
&\iff \quad \forall x \in X \forall \text{ offene } U(x) \exists \text{ kompaktes } K(x) \exists \text{ offenes } V(x): \\
&\qquad\quad V(x) \subset K(x) \subset U(x)
\end{aligned}$$

Satz 29.2 *Sei X ein vollständiger Längenraum. Dann sind gleichwertig:*
1.) $\dim X < \infty$
2.) X ist lokalkompakt
3.) Die Einheitskugel $\overline{B(0,1)}$ ist kompakt

Beweis. 3) $\Rightarrow$ 1): Wegen

$$\begin{aligned}
&\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{x \in B(0,1)} B\left(x, \frac{1}{2}\right) \\
\overset{\text{kompakt}}{\Rightarrow} \quad &\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
&x \in \overline{B\left(0, \frac{1}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^k}\overline{B(0,1)} \\
\Rightarrow \quad & 2^k x \in \overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad & \exists 1 \leq j \leq m: \ \left\|2^k x - x_j\right\| < \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad & \exists 1 \leq j \leq m: \ \left\|x - \frac{x_j}{2^k}\right\| < \frac{1}{2^{k+1}} \\
\Rightarrow \quad & \exists 1 \leq j \leq m: \ x \in B\left(\frac{x_j}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\
\Rightarrow \quad & \overline{B\left(0, \frac{1}{2^k}\right)} \subset \bigcup_{j=1}^{m} B\left(\frac{x_j}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

Damit konstruieren wir eine Folge $(x_{j_k})_k$ durch $n = 0$

$$\begin{aligned}
&x \in \overline{B(0,1)} \\
\Rightarrow \quad & \exists 1 \leq j_0 \leq m: \ x \in B\left(x_{j_0}, \frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad & \exists 1 \leq j_0 \leq m: \ \frac{x - x_{j_0}}{2^0} \in \overline{B\left(0, \frac{1}{2^1}\right)}
\end{aligned}$$

$n-1 \to n:$

$$
\begin{aligned}
& x-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{j_k}}{2^k} \in \overline{B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)} \\
\stackrel{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \quad & \exists 1 \leq j_n \leq m : x-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{j_k}}{2^k} \in B\left(\frac{x_{j_n}}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
\Rightarrow \quad & x-\sum_{k=0}^{n} \frac{x_{j_k}}{2^k} \in \overline{B\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)}
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
0 \leq \lim_{n \to \infty}\left\|x-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{j_k}}{2^k}\right\| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n+1}}=0
$$

Da $Lin(x_1, \ldots, x_m)$ abgeschlossen ist, folgt

$$
\begin{aligned}
& x=\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{j_k}}{2^k} \\
& x \in Lin(x_1, \ldots, x_m) \\
\stackrel{x \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \quad & \overline{B(0,1)} \subset Lin(x_1, \ldots, x_m) \\
\Rightarrow \quad & X \subset Lin(x_1, \ldots, x_m)
\end{aligned}
$$

1) $\Rightarrow$ 3): Sei $\dim X=n$ und $v_1, \ldots, v_n$ Basis von X.

$$
f: \mathbb{K}^n \to X, \sum_{i=1}^n a_i e_i \to \sum_{i=1}^n a_i v_i
$$

ist umkehrbar und f, f^{-1} sind linear.
Betrachte die von f^{-1} erzeugte Länge auf $\mathbb{K}^n$:

$$
\| y \|_{\mathbb{K}^n} := \left\|f^{-1}(y)\right\|_X
$$

$\overline{B_{\mathbb{K}^n}(0,1)}$ ist kompakt und da f^{-1} stetig ist, ist

$$
\overline{B_X(0,1)} = f(\overline{B_{\mathbb{K}^n}(0,1)}
$$

kompakt.
2) $\Rightarrow$ 3):
$\exists$ kompaktes $K(0) \exists$ offenes $V(0): B(0, \varepsilon) \subset V(0) \subset K(0)$
$\overline{B(0, \varepsilon)}$ abgeschlossen, $K(0)$ kompakt $\Rightarrow \overline{B(0, \varepsilon)}$ kompakt. Da

$$
f: \overline{B(0, \varepsilon)} \to \overline{B(0,1)}, x \mapsto \frac{1}{\varepsilon} x
$$

stetig ist, ist $\overline{B(0,1)}$ ist kompakt.
3) $\Rightarrow$ 2): Da

$$f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(x,\varepsilon)}, y \mapsto x + \varepsilon y$$

stetig ist, ist $\overline{B(x,\varepsilon)}$ kompakt.
Sei $U(x)$ offen. Dann $\exists \varepsilon > 0 : B(x, 2\varepsilon) \subset U(x)$
Daher $B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,2\varepsilon)} \subset U(x)$ ■

Satz 29.3 *Sei X vollständiger Längenraum und $C \subset X$ abgeschlossen und beschränkt. Dann sind gleichwertig*

a)	*C ist kompakt*
b)	$\forall \varepsilon > 0\ \exists M = \{x_1, \ldots, x_n\}\ \forall c \in C\ \exists x_k \in M : \parallel c - x_k \parallel < \varepsilon$
c)	$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ *Untervektorraum* $E_\varepsilon, \dim E_\varepsilon < \infty :\ C \subset E_\varepsilon + B(0,\varepsilon)$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b):

$$C \subset \bigcup_{x \in C} B(x,\varepsilon) \overset{kompakt}{\Rightarrow} C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$$

b) $\Rightarrow$ c):

$$\begin{aligned} c \in C \quad &\Rightarrow \quad \exists 1 \leq k \leq m : \parallel c - x_k \parallel < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad c \in B(x_k, \varepsilon) = x_k + B(0,\varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad c \in Lin(x_1, \ldots, x_n) + B(0,\varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad C \subset Lin(x_1, \ldots, x_n) + B(0,\varepsilon) \end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ a): Sei $(c_k)_k$ eine beliebige Folge in C.
Konstruiere Teilfolgen $(c_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ von c_k.
$i = 0$: Setze

$$c_k^0 := c_k$$

$i \to i+1$:

$$\begin{aligned} &\left\{c_k^i : k \in \mathbb{N}\right\} \subset C \subset E_{\frac{1}{i+1}} + B\left(0, \frac{1}{i+1}\right) \\ \Rightarrow \quad &\forall c_k^i\ \exists d_k^i \in E_{\frac{1}{i+1}} :\ \left\|c_k^i - d_k^i\right\| < \frac{1}{i+1} \end{aligned}$$

Da d_k^i im endlich-dimensionalen $E_{\frac{1}{i+1}}$ liegt, existiert eine Teilfolge $(d_{k_j}^i)_j$ von $(d_k^i)_k$ mit einem Grenzwert. Setze

$$c_j^{i+1} := c_{k_j}^i$$

Die Folge

$$b_k := c_k^k$$

ist eine Teilfolge von $(c_k)_k$.
Da $(d_{k_j}^i)_j$ eine Teilfolge mit einem Grenzwert ist, ist sie eine Cauchyfolge, d.h.

$$\exists j_0 \; \forall j, j' \geq j_0 : \| d_{k_j} - d_{k_{j'}} \| < \frac{1}{i}$$

Für alle $j, j' \geq j_0$ folgt

$$\begin{aligned} \| c_j^i - c_{j'}^i \| &= \| c_{k_j}^{i-1} - c_{k_{j'}}^{i-1} \| \\ &\leq \underbrace{\| c_{k_j}^{i-1} - d_{k_j}^{i-1} \|}_{<\frac{1}{i}} + \underbrace{\| d_{k_j}^{i-1} - d_{k_{j'}}^{i-1} \|}_{<\frac{1}{i}} + \underbrace{\| d_{k_{j'}}^{i-1} - c_{k_{j'}}^{i-1} \|}_{<\frac{1}{i}} \\ &< \frac{3}{i} \end{aligned}$$

Für $m \geq i$ ist $(c_k^m)_k$ eine Teilfolge von $(c_k^i)_k$, daher gilt

$$\forall m \geq i : \| c_j^m - c_{j'}^m \| < \frac{3}{i}$$

Da b_k bis auf ein erstes Anfangsstück Teilfolge von $(c_k^i)_k$ ist, ist $(b_k)_k$ eine Cauchyfolge.
Die Cauchyfolge $(b_k^k)_k$ hat in dem vollständigen Raum X einen Grenzwert c
Da C abgeschlossen ist, gilt $c \in C$.
Somit ist eine Teilfolge mit einem Grenzwert in C gefunden und C ist kompakt. ■

30. Die Algebra $C(X, \mathbb{K})$

Definition 30.1 *1.) Eine **Algebra** ist ein Vektorraum Y mit einer zweilinearen Multiplikation*

$$\cdot : Y \times Y \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto xy$$

mit

$$\forall x, y, z \in Y : \; x(yz) = (xy)z$$

*2.) Eine **Unteralgebra** ist ein Untervektorraum, der abgeschlossen ist unter Multiplikation.*

Satz 30.2 *Sei X kompakt und A eine Unteralgebra des vollständigen Längenraumes und der Algebra $(C(X, \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ mit*

$$\begin{array}{ll} a) & 1 \in A \\ b) & f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A \\ c) & x \neq y \Rightarrow \exists f \in A : f(x) \neq f(y) \end{array}$$

Dann gilt:

$$\overline{A} = C(X, \mathbb{K})$$

Beweis. a) Setze

$$A_0 := \{f \in A \mid f : X \to \mathbb{R}\}$$

b) 1.) Sei $f \in \overline{A_0} \backslash A_0$ und $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} f(ax+y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(ax+y) \\ &\overset{f_n \text{ linear}}{=} \lim_{n\to\infty} (af_n(x) + f_n(y)) \\ &= a \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) \\ &= af(x) + f(y) \end{aligned}$$

ist f linear. $\forall x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} (f+cg)(x) &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) + cg_n(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + c \lim_{n\to\infty} g_n(x) \\ &= f(x) + cg(x) \end{aligned}$$

Damit $\overline{A_0}$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Sei $x \in X$ beliebig.

$$\begin{aligned}
f_n(x)\left(g_n(x)h_n(x)\right) &= \left(f_n(x)g_n(x)\right)h_n(x) \\
\lim_{n\to\infty} f_n(x)\left(g_n(x)h_n(x)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(f_n(x)g_n(x)\right)h_n(x) \\
& \lim_{n\to\infty} f_n(x)\left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\lim_{n\to\infty} h_n(x)\right) \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right)\lim_{n\to\infty} h_n(x) \\
f(x)\left(g(x)h(x)\right) &= \left(f(x)g(x)\right)h(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (f_1 + cg_1)(x)(f_2 + dg_2)(x) \\
= & \left(\lim_{n\to\infty} f_{1,n}(x) + c\lim_{n\to\infty} g_{1,n}(x)\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x) + d\lim_{n\to\infty} g_{2,n}\right) \\
= & \lim_{n\to\infty}\left(f_{1,n}(x) + cg_{1,n}(x)\right)\cdot\left(f_{2,n}(x) + dg_{2,n}(x)\right) \\
= & \lim_{n\to\infty}\left(f_{1,n}(x)f_{2,n}(x) + f_{1,n}(x)dg_{2,n}(x)\right. \\
& \left.+cg_{1,n}(x)f_{2,n}(x) + cg_{1,n}(x)dg_{2,n}(x)\right) \\
= & \lim_{n\to\infty} f_{1,n}(x)\lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x) + \lim_{n\to\infty} f_{1,n}(x)d\lim_{n\to\infty} g_{2,n}(x) \\
& +c\lim_{n\to\infty} g_{1,n}(x)\lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x) + c\lim_{n\to\infty} g_{1,n}(x)d\lim_{n\to\infty} g_{2,n}(x) \\
= & f_1(x)f_2(x) + f_1(x)dg_2(x) + cg_1(x)f_2(x) + cg_1(x)dg_2(x)
\end{aligned}$$

Damit ist $\overline{A_0}$ eine Algebra.
2.) Nähere $\sqrt{\cdot}$ auf [0,1] gleichmäßig durch Polynome. Setze dazu

$$\begin{aligned}
u_0 &:= 0 \\
u_{n+1}(t) &= u_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - u_n^2(t)\right)
\end{aligned}$$

Wir zeigen mit Induktion

$$0 \le u_n(t) \le \sqrt{t}$$

$n = 0$:

$$0 \le 0 \le \sqrt{t}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{t} - u_{n+1}(t) \\
\overset{\text{Def } u_{n+1}}{=} \quad & \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - u_n(t)\right)\left(\sqrt{t} + u_n(t)\right) \\
= \quad & \underbrace{\left(\sqrt{t} - u_n(t)\right)}_{\geq 0 \text{ nach I.V.}} \left(1 - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sqrt{t} + u_n(t)\right)}_{\leq 2\sqrt{t} \leq 2 \text{ nach I.V.}}\right) \\
\geq \quad & 0
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$u_n(t) \leq u_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$$

$(u_n(t))_n$ hat als monoton wachsende und beschränkte Folge einen Grenzwert. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) &= \lim_{n\to\infty} u_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - \lim_{n\to\infty} u_n^2(t)\right) \\
t &= \left(\lim_{n\to\infty} u_n(t)\right)^2 \\
\sqrt{t} &= \lim_{n\to\infty} u_n(t)
\end{aligned}$$

3.) Da $(u_n(t))_n$ einen Grenzwert hat, gilt

$$\forall t \in [0,1]\ \exists n_t :\ \sqrt{t} - u_{n_t}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $u_{n_t}(\cdot), \sqrt{\cdot}$ stetig sind, ist $\sqrt{\cdot} - u_{n_t}(\cdot)$ stetig und es gilt

$$\exists \delta_t > 0\ \forall t' \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \cap [0, \infty) :\ \sqrt{t'} - u_{n_t}(t') < \varepsilon$$

Da u_n monoton steigend ist, gilt

$$\forall n \geq n_t :\ u_{n_t}(t') \leq u_n(t') \leq \sqrt{t'}$$

und

$$\begin{aligned}
& [0,1] \subset \bigcup_{t \in [0,1]} (t - \delta_t, t + \delta_t) \\
\overset{[0,1] \text{ kompakt}}{\Rightarrow} \quad & [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (t_i - \delta_{t_i}, t_i - \delta_{t_i})
\end{aligned}$$

und da jedes $t \in [0,1]$ in einem Intervall $(t_i - \delta_{t_i}, t_i - \delta_{t_i}) \cap [0,\infty)$ enthalten ist, gilt

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,1]\ \forall n \geq N := \max_{i=1}^{n} n_{t_i} :\ \sqrt{t} - u_n(t) &< \varepsilon \\
\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : \| u_n(\cdot) - \sqrt{\cdot}\, \|_{[0,1],\infty} &< \varepsilon
\end{aligned}$$

d.h.

$$u_n \to \sqrt{\cdot} \text{ gleichmäßig}$$

4.) Sei $f \in A$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\overset{Vor}{\Rightarrow} \quad \overline{f} \in A \\
&\Rightarrow \quad f\overline{f} \in A_0 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{f\overline{f}}{\| f \|^2} \leq 1
\end{aligned}$$

und

$$\underbrace{u_n\left(\frac{f\overline{f}}{\| f \|^2}\right)}_{\in A_0 \text{ da } u_n \text{ Polynom}} \overset{3.)\text{ gleichmäßig}}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{f\overline{f}}{\| f \|^2}} = \frac{|f|}{\| f \|} \in \overline{A_0}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
f \in A \quad &\Rightarrow \quad |f| \in \overline{A_0} \\
f \in \overline{A} \quad &\Rightarrow \quad |f| \in \overline{A_0}
\end{aligned}$$

5.) Wegen

$$\begin{aligned}
\min(f,g) &= \frac{1}{2}(f + g + |f-g|) \\
\max(f,g) &= \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
f,g \in A_0 \quad &\Rightarrow \quad \max(f,g), \min(f,g) \in \overline{A_0} \\
f,g \in \overline{A_0} \quad &\Rightarrow \quad \max(f,g), \min(f,g) \in \overline{A_0}
\end{aligned}$$

6.) Seien $x \neq y$ und $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt

$$\exists g \in A : g(x) \neq g(y)$$

Mit

$$f : X \to \mathbb{R}, z \mapsto a + (b-a) \left| \frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)} \right|$$

gilt

$$\forall x, y \in X \ \forall a, b \in \mathbb{R} \ \exists f \in \overline{A_0} : \begin{cases} f(x) = a \\ f(y) = b \end{cases}$$

7.) Seien $f \in C(X, \mathbb{R})$ und $x, z \in X$ beliebig. Dann gilt mit 6.)

$$\exists h_z \in \overline{A_0} : \begin{cases} h_z(x) = f(x) \\ h_z(z) = f(z) \end{cases}$$

Da h_z stetig ist, gilt

$$\exists \text{ offenes } V_z \ \forall x \in V_z : \ h_z(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Wegen

$$X = \bigcup_{z \in X} V_z \overset{\text{X kompakt}}{\Rightarrow} X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{z_i}$$

setze

$$g := \min_{i=1}^{n} h_{z_i}$$

Das Minimum nimmt immer noch in z den Wert $f(z)$ an und ist stetig.

$$\exists g \in \overline{A_0} : \begin{cases} g(z) = f(z) \\ g \leq f + \varepsilon \end{cases}$$

8.) Seien $f \in C(X, \mathbb{R}), x \in X$ beliebig. Nach 7.) gilt:

$$\forall x \in X \ \exists \text{ stetiges } g_x \in \overline{A_0} : \begin{cases} g_x(x) = f(x) \\ g_x \leq f + \varepsilon \end{cases}$$

Da g_x stetig ist, gilt

$$\exists \text{ offenes } U_x(x) \ \forall y \in U_x : \ g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$$

Wegen

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x \overset{\text{X kompakt}}{\Rightarrow} X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

setze nun

$$g := \max_{i=1}^{n} g_{x_i}$$

Dann ist g stetig und erfüllt

$$\exists g \in \overline{A_0} : \ f - \varepsilon \leq g \leq f + \varepsilon$$

Sei $f : X \to \mathbb{C}$ stetig. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{f+\overline{f}}{2} &: X \to \mathbb{R} \\ \frac{f-\overline{f}}{2i} &: X \to \mathbb{R} \\ f = \frac{f+\overline{f}}{2} &+ i\frac{f-\overline{f}}{2i} \end{aligned}$$

gilt

$$\overline{A_0} = C(X,\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{A} = C(X,\mathbb{C})$$

■

Satz 30.3 *Sei X kompakt und A eine Unteralgebra von* $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *mit*

$$\begin{array}{ll} a) & 1 \in A \\ b) & x \neq y \Rightarrow \exists f \in A : f(x) \neq f(y) \end{array}$$

Dann gilt:

$$\overline{A} = C(X,\mathbb{R})$$

Beweis. Das haben wir gerade gezeigt.
$f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$ wurde nur im 4. Schritt benötigt für $f\overline{f} \in A_0$. ■

31. Kompaktheit in topologischen Räumen

Satz 31.1 *Ist $A \subset X$ abgeschlossen und X kompakt, so ist A kompakt.*

Beweis. Seien U_i offen. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \quad &\Rightarrow \quad X \subset \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cup A^C \\ &\overset{X\text{kompakt}}{\Rightarrow} \quad X \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cup A^C \\ &\Rightarrow \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \end{aligned}$$

■

Satz 31.2 *Sei X kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f(X) kompakt.*

Beweis. Seien U_i offen. Da f stetig ist, sind die $f^{-1}(U_i)$ offen und es gilt:

$$\begin{aligned} f(X) \subset \bigcup_{i\in I} U_i \quad &\Rightarrow \quad X \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \\ &\Rightarrow \quad X \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{offen}} \\ &\overset{X\text{ kompakt}}{\Rightarrow} \quad X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \\ &\Rightarrow \quad f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \end{aligned}$$

und $f(X)$ ist kompakt. ■

Satz 31.3 *Sei $K \subset X$ kompakt und die Topologie trenne Punkte. Dann gilt:*
a) $\forall x \in K^C\ \exists V(K), U(x)$ offen: $U \cap V \neq \emptyset$
b) K ist abgeschlossen

Beweis. a) Sei $x \in K^C$ beliebig. Da die Topologie die Punkte trennt, gilt

$$\forall y \in K\ \exists \text{ offene } V(y), U_y(x) : U \cap V = \emptyset$$

Da K kompakt ist, gilt

$$K \subset \bigcup_{y\in\mathbb{K}} V(y) \overset{K\text{ kompakt}}{\Rightarrow} K \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)}_{\text{offen}}$$

Außerdem gilt

$$x \in \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}(x)}_{\text{offen}}$$

und

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}(x) \cap \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i) = \emptyset$$

b) Da $x \in K^C$ beliebig und

$$x \in \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}(x)}_{\text{offen}} \subset K^C$$

ist K^C Umgebung aller seiner Punkte und somit offen. ■

Satz 31.4 *Sei X kompakt und die Topologie trenne die Punkte. Dann gilt:*

$$\forall A, B \textit{ abgeschlossen}, A \cap B = \emptyset \ \exists U(A), V(B) \textit{ offen } : \ U \cap V = \emptyset$$

Beweis. Da A,B abgeschlossen sind und X kompakt ist, gilt

$$A, B \text{ sind kompakt}$$

Dann gilt

$$\forall x \in A \ \exists \text{ offene } U(x), V_x(B) : \ U(x) \cap V_x = \emptyset$$

mit

$$A \subset \bigcup_{x \in A} U(x) \stackrel{A \text{ kompakt}}{\Rightarrow} A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)$$

gilt

$$\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \text{ ist offene Umgebung von } A$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}(B) \text{ ist offene Umgebung von } B$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}(B) = \emptyset$$

■

Satz 31.5 *Für X gelte:*

$$\forall A, B \text{ abgeschlossen}, A \cap B = \emptyset \ \exists U(A), V(B) \text{ offen: } U \cap V = \emptyset$$

Dann gilt

$$\exists \text{ stetiges } f : X \to [0,1] : \ f(A) = 0, f(B) = 1$$

Beweis. 1.) Seien C abgeschlossen, E offen und $C \subset E$. Wegen

$$\begin{aligned} &C, E^C \text{ sind abgeschlossen} \\ &C \cap E^C = \emptyset \end{aligned}$$

gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} &\exists \text{ offene } U_1(C), V(E^C) : \ U_1 \cap V = \emptyset \\ &E^C \subset V \Rightarrow V^C \subset E \end{aligned}$$

und somit

$$\underbrace{C}_{\text{abgeschlossen}} \subset \underbrace{U_1}_{\text{offen}} \subset \underbrace{\overline{U_1}}_{\text{abgeschlossen}} \subset \underbrace{V^C}_{\text{abgeschlossen}} \subset \underbrace{E}_{\text{offen}}$$

Man kann ein offenes U_1 und $\overline{U}_1$ zwischen ein abgeschlossenes C und offenes E schieben.

2.) Konstruktion von f: Das wiederholte Halbieren des Intervalles [0,1] ergibt die Folge

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \frac{p}{2^k} : p, k \in \mathbb{N}, 0 \le p \le 2^k \right\} \\ &= \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^{n-1}}{2^n}, \ldots \right\} \end{aligned}$$

Wähle offene Mengen G_0, G_1 gemäß 1.) sodaß

$$\underbrace{A}_{\text{abgeschlossen}} \subset G_0 \subset \underbrace{\overline{G_0}}_{\text{abgeschlossen}} \subset \underbrace{B^C}_{\text{offen}}$$

$$A \subset G_0 \subset \overline{G_0} \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset B^C$$

Setze

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \in G_1^C \\ 0 & \text{für } x \in G_0 \end{cases} \\ \forall x \in A : \ f(x) &= 0 \\ \forall x \in B : \ f(x) &= 1 \end{aligned}$$

Mittels Induktion füge immer neue offene G_d dazwischen, sodaß gilt

$$d < d' \Rightarrow \overline{G_d} \subset G_{d'}$$

Für alle $d \in D$ vor

$$b = \frac{2p+1}{2^n}$$

seien solche offenen G_d gewählt.
Die nächst kleinere bzw. größere Zahl als b sind:

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{2^{n-1}} \\ c &= \frac{p+1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Wähle G_b offen mit

$$\overline{G_a} \subset G_b \subset \overline{G_b} \subset G_c$$

Definiere

$$\forall t \in [0,1]: \ G_t := \bigcup_{d \in D, d \leq t} G_d$$

Da alle G_d offen sind, ist G_t offen und es gilt

$$\forall t < t': \ \overline{G_t} \subset G_{t'}$$

Definiere

$$f: X \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \inf\{t \in [0,1]: \ x \in G_t\} & \text{für } x \in G_1 \\ 1 & \text{für } x \notin G_1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in X: \ 0 &\leq f(x) \leq 1 \\ f(A) &= \{0\} \\ f(B) &= \{1\} \end{aligned}$$

3.) f ist stetig. Zeige

$$f^{-1}(\text{ Umgebung von } f(x_0)) \text{ ist Umgebung von } x_0$$

Sei $x_0 \in G_1$ und $0 < \delta < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} & f(x_0) = \inf\{t \in [0,1] \ : \ x \in G_1\} \\ \Rightarrow \quad & x_0 \in G_{f(x_0)+\varepsilon} \text{ und } x_0 \notin G_{f(x_0)-\frac{1}{2}\delta} \\ \Rightarrow \quad & x_0 \in G_{f(x_0)+\varepsilon} \text{ und } x_0 \notin \overline{G}_{f(x_0)-\delta} \\ \Rightarrow \quad & x_0 \in \underbrace{G_{f(x_0)+\varepsilon} \cap \left(\overline{G}_{f(x_0)-\delta}\right)^C}_{\text{offen}} \subset f^{-1}((f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)) \end{aligned}$$

Man brauchte ein $\delta < \varepsilon$, da

$$\begin{aligned} f(x_0) + \varepsilon &\notin (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \\ f(x_0) + \varepsilon &\in f(G_{f(x_0)+\varepsilon}) \end{aligned}$$

■

32. Vervollständigung und Fortsetzung

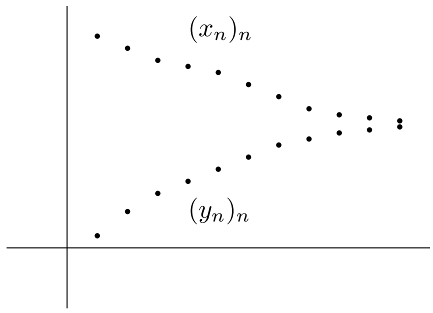


Abbildung 6: Vervollständigung

Satz 32.1 *In einem vollständigen Längenraum gilt: Kommen zwei Cauchyfolgen beliebig nahe aneinander, so haben sie denselben Grenzwert:*

$$\left(\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0 \textit{ und } \lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| y_n - x \| = 0$$

Beweis. Wegen

$$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \begin{cases} \| x_n - x \| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \| x_n - y_n \| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 : \| y_n - x \| &\leq \| y_n - x_n \| + \| x_n - x \| \\ &< \varepsilon \\ \lim_{n\to\infty} \| y_n - x \| &= 0 \end{aligned}$$

■

Deshalb ist die folgende Definition, wann zwei Cauchyfolgen gleichwertig sind, zwangsläufig.

Satz 32.2 (Vervollständigung von Längenräumen) *Sei X ein Längenraum. Zwei Cauchyfolgen $(x_n)_n, (y_n)_n$ heißen* ***gleichwertig*** $(x_n \sim y_n) \iff$

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0$$

Für

$$[(x_n)_n] := \Big\{(y_n)_n \text{ Cauchyfolge } \mid \lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0\Big\}$$

gilt

$$\begin{array}{rl} \textit{Entweder} & [(x_n)_n] = [(y_n)_n] \\ \textit{oder} & [(x_n)_n] \cap [(y_n)_n] = \emptyset \end{array}$$

Setze daher

$$\hat{X} := \{[(x_n)_n]\}$$

1.) $\hat{X}$ wird ein Vektorraum durch

$$\begin{aligned} [(x_n)_n] + [(y_n)_n] &= [(x_n + y_n)_n] \\ a \cdot [(x_n)_n] &= [(ax_n)_n] \end{aligned}$$

2.) $\hat{X}$ wird ein Längenraum durch

$$\| [(x_n)_n] \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|$$

3.) Mit

$$\begin{aligned} d([(x_n)_n], [(y_n)_n]) &= \| [(x_n)_n] - [(y_n)_n] \| \\ &= \lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| \end{aligned}$$

ist $\hat{X}$ ein vollständiger Abstandsraum.

Beweis. Mit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \| x_n - x_n \| = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x_n)_n \sim (x_n)_n \\ (x_n)_n \sim (y_n)_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (y_n)_n \sim (x_n)_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (x_n)_n \sim (y_n)_n, (y_n)_n \sim (z_n)_n \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0 = \lim_{n\to\infty} \| y_n - z_n \| \\ \Rightarrow\ & 0 \le \lim_{n\to\infty} \| x_n - z_n \| \le \lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| + \lim_{n\to\infty} \| y_n - z_n \| = 0 \\ \Rightarrow\ & (x_n)_n \sim (z_n)_n \end{aligned}$$

ist $\sim$ eine Gleichwertigkeitsbeziehung. Wegen

$$\begin{aligned}[(x_n)_n] \cap [(y_n)_n] \neq \emptyset &\Rightarrow \exists z_n : \ z_n \sim x_n, z_n \sim y_n \\ &\Rightarrow x_n \sim y_n \\ &\Rightarrow [(x_n)_n] = [(y_n)_n]\end{aligned}$$

und $\hat{X}$ ist eindeutig definiert.
1.) Seien $(x_n)_n, (y_n)_n$ Cauchyfolgen. Dann gilt

$$\exists N \ \forall m, n > N : \begin{cases} \| x_n - x_m \| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \| y_n - y_m \| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

und $\forall m, n > N$

$$\begin{aligned}\| x_n + y_n - (x_m + y_m) \| &\leq \| x_n - x_m \| + \| y_n - y_m \| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

ist $(x_n + y_n)_n$ eine Cauchyfolge.
Seien $a \neq 0$ und $(x_n)_n$ Cauchyfolge. Dann gilt

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n > N : \| x_n - x_m \| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Wegen

$$\| ax_n - ax_m \| \leq |a| \cdot \| x_n - x_m \| < \varepsilon$$

ist $(ax_n)_n$ eine Cauchyfolge.
Sei $a = 0$. Dann ist $(ax_n)_n = (0)_n$ eine Cauchyfolge.
2.)

$$\begin{aligned}&(x_n)_n \text{ ist Cauchyfolge in } X \\ \Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n \geq n : \| x_n - x_m \| < \varepsilon \\ \Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n \geq n : \ | \| x_n \| - \| x_m \| | \leq \| x_n - x_m \| < \varepsilon \\ \Rightarrow\ & (\| x_n \|)_n \text{ ist Cauchyfolge in } \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ & (\| x_n \|)_n \text{ hat einen Grenzwert in } \mathbb{R}\end{aligned}$$

Für $(x_n) \sim (y_n)$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - y_n \| = 0$$

und somit

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} | \| x_n \| - \| y_n \| | &\leq \lim_{n \to \infty} \| x_n - y_n \| \\ &= 0 \\ \lim_{n \to \infty} \| x_n \| &= \lim_{n \to \infty} \| y_n \|\end{aligned}$$

und die Definition der Länge auf X ist unabhängig vom Vertreter.
Wegen

$$\begin{aligned} \| [(ax_n)_n] \| &\overset{Def}{=} \lim_{n\to\infty} \| ax_n \| \\ &= |a| \lim_{n\to\infty} \| x_n \| \\ &= |a| \, \| [(x_n)_n] \| \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} | \| x_m + y_m \| - \| x_n - y_n \| | &\leq \| x_m + y_m - x_n - y_n \| \\ &\leq \| x_m - y_m \| + \| x_n - y_n \| \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & (\| x_n \|)_n, (\| y_n \|)_n \text{ sind Cauchyfolgen} \\ \Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m,n \geq N : \| x_n - x_m \| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \| y_n - y_m \| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m,n \geq N : \ | \| x_m + y_m \| - \| x_n - y_n \| | < \varepsilon \\ \Rightarrow\ & (\| x_n + y_n \|)_n \text{ ist eine Cauchyfolge in } \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ & (\| x_n + y_n \|)_n \text{ hat einen Grenzwert} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \| x_n + y_n \| &\leq \| x_n \| + \| y_n \| \\ \lim_{n\to\infty} \| x_n + y_n \| &\leq \lim_{n\to\infty} \| x_n \| + \lim_{n\to\infty} \| y_n \| \\ \| [x_n + y_n] \| &\leq \| [x_n] \| + \| [y_n] \| \end{aligned}$$

und

$$(x_n) \sim (0)_n \iff \lim_{n\to\infty} \| x_n - 0 \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 0$$

ist es eine Länge.
3.) Wir haben in der Einführung gezeigt, dass man durch $\| x - y \|$ aus einer Länge einen Abstand erhält.
Sei $([(a_n^k)_n])_k$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists i_0 \ \forall i,j > i_0 : \| [(a_n^i)_n] - [(a_n^j)_n] \| = \lim_{n\to\infty} \| a_n^i - a_n^j \| < \varepsilon$$

Da der Grenzwert kleiner ε ist, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists i_0 \ \forall i,j > i_0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ : \| a_n^i - a_n^j \| < 2\varepsilon$$

Was nicht klappt:

$$\forall n : b_n = a_n^n$$

Wähle eine Cauchyfolge mit $m \geq i_0$, sodaß gilt

$$\| a_n^m - a_m^m \| < \varepsilon$$

Damit gilt für $m \geq i_0, n \geq \max(n_0, i_0)$

$$\begin{aligned}
\| b_n - b_m \| &\overset{Def.}{=} \| a_n^n - a_m^m \| \\
&\leq \underbrace{\| a_n^n - a_n^m \|}_{<2\varepsilon} + \underbrace{\| a_n^m - a_m^m \|}_{<\varepsilon} \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

und $(b_n)_n$ ist eine Cauchyfolge.
(Aber: Es ist nicht klar, daß es diese Cauchyfolge gibt). Zeige:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} [(a_n^k)_n] = [(b_n)_n] \\
\forall \varepsilon > 0 \ \exists i_0 \ \forall i, j \geq i_0 : \ &\left\| [(a_n^k)_n] - [(b_n)_n] \right\| = \lim_{n\to\infty} \| a_n^n - a_n^k \| \leq 2\varepsilon \\
\forall \varepsilon > 0 \ \exists i_0 \ \forall i, j \geq i_0 \ \exists \varepsilon > \delta > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1 : &\| a_n^n - a_n^k \| \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Dann wäre $\hat{X}$ vollständig.
(Aber: Es ist nicht klar, daß man für alle j ein gemeinsames (!) δ und n_1 finden kann).
Wie muss man die b_n wählen, damit $(b_n)_n$ eine Cauchyfolge wird und der Grenzwert der $(a_n^k)_n$ ist? ■

Seien X,Y ein vollständige Längenräume und $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$$

Deshalb ist die folgende Festsetzung zwangsläufig.

Satz 32.3 (Fortsetzung linearer stetiger Abbildungen) *Seien X, Y Längenräume, Y vollständig (ggf. vervollständige) und $T : X \to Y$ stetig und linear.*
Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von T zu einer stetigen linearen Abbildung

$$\hat{T} : \hat{X} \to Y, [(x_n)_n] \mapsto \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

und es gilt

$$\| T \| = \| \hat{T} \|$$

Beweis. 1.) Seien $a_n \sim x_n$ d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - a_n \| = 0$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\|\lim_{n\to\infty} Tx_n - \lim_{n\to\infty} Ta_n\right\| &= \lim_{n\to\infty} \| Tx_n - Ta_n \| \\ &\leq \| T \| \lim_{n\to\infty} \| x_n - a_n \| \\ &= 0\end{aligned}$$

und die Definition von $\hat{T}$ ist unabhängig vom Vertreter.
2.) Wegen

$$\begin{array}{cl} & (z_n)_n \text{ ist Cauchyfolge} \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0 : \| z_n - z_m \| < \varepsilon \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0 : \\ & \| Tz_n - Tz_m \| \leq \| T \| \| z_n - z_m \| < \varepsilon \underbrace{\| T \|}_{<\infty} \\ \Rightarrow & (Tz_n)_n \text{ ist Cauchyfolge} \\ \overset{Y \text{ vollständig}}{\Rightarrow} & (Tz_n)_n \text{ hat einen Grenzwert} \end{array}$$

ist $\hat{T}$ definiert.
3.) Seien $(x_n)_n, (y_n)_n$ Cauchyfolgen. Dann gilt

$$(x_n + y_n)_n \text{ und } (ax_n)_n \text{ sind Cauchyfolgen}$$

$T(x_n + y_n)_n$ und $T(ax_n)_n$ sind Cauchyfolgen mit eindeutigem Grenzwert und wegen

$$\begin{aligned}\hat{T}([x_n]) + a\hat{T}([y_n]) &= \lim_{n\to\infty} Tx_n + a \lim_{n\to\infty} Ty_n \\ &= \lim_{n\to\infty} T(x_n + ay_n) \\ &= \hat{T}([x_n + ay_n])\end{aligned}$$

ist $\hat{T}$ linear.
4.) Es gilt

$$\begin{aligned}\| \hat{T}([x_n]) \| &\overset{\text{Def}}{=} \left\|\lim_{n\to\infty} Tx_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \| Tx_n \| \\ &\leq \| T \| \lim_{n\to\infty} \| x_n \| \\ &= \| T \| \| [x_n] \| \\ \| \hat{T} \| &\leq \| T \|\end{aligned}$$

$\hat{T}$ ist eine Fortsetzung von T. Mit

$$i : X \to \hat{X}, x \mapsto (x, x, \dots)$$

und da die kleinste obere Schranke über mehr Vektoren größer ist, gilt

$$\begin{array}{rcl}\sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}}\left\|T\dfrac{x}{\| x \|}\right\| & = & \sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}}\left\|\hat{T}\dfrac{i(x)}{\| i(x) \|}\right\| \\ & \overset{X\subset\hat{X}}{\leq} & \sup\limits_{[(x_n)_n]\in\hat{X}\setminus\{0\}}\left\|\hat{T}\dfrac{[(x_n)_n]}{\| [(x_n)_n] \|}\right\| \\ \| T \| & \leq & \| \hat{T} \| \end{array}$$

und somit

$$\| \hat{T} \| = \| T \|$$

■

Satz 32.4 *Sei X ein vollständiger Abstandsraum. Dann gilt*

$$\left(\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(y_n, x) = 0$$

Kommen zwei Cauchyfolgen beliebig nahe aneinander, so haben sie denselben Grenzwert.

Beweis. Wegen

$$\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \begin{cases} d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(y_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

gilt

$$\begin{array}{rcl}\forall n \geq n_0 :\ d(y_n, x) & \leq & d(y_n, x_n) + d(x_n, x) < \varepsilon \\ \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x) & = & 0\end{array}$$

■

Satz 32.5 *Sei X ein vollständiger Abstandsraum und* $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y$. *Dann gilt*

$$\begin{array}{rcl}|d(x, y) - d(a, b)| & \leq & d(x, a) + d(y, b) \\ \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) & = & d\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)\end{array}$$

Beweis. Wegen

$$\begin{array}{rcl}d(x, y) & \leq & d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ d(x, y) - d(a, b) & \leq & d(x, a) + d(b, y) \\ d(a, b) & \leq & d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) \\ -(d(x, y) - d(a, b)) & \leq & d(a, x) + d(y, b)\end{array}$$

gilt

$$|d(x,y) - d(a,b)| \leq d(x,a) + d(y,b)$$

Wegen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} |d(x_n,y_n) - d(x,y)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(x,x_n) + \lim_{n\to\infty} d(y,y_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d\left(\lim_{k\to\infty} x_k, \lim_{k\to\infty} y_k\right)$$

■

Die Definition der Gleichwertigkeits Beziehung und des Abstandes im folgenden Satz sind damit zwangsläufig.

Satz 32.6 (Vervollständigung eines Abstandsraumes) *Sei X ein nicht notwendig vollständiger Abstandsraum d.*
Zwei Cauchyfolgen heißen ***gleichwertig*** *(Schreibweise $(x_n)_n \sim (y_n)_n$)* $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$$

Für

$$[(x_n)_n] = \{(y_n)_n \text{ Cauchyfolge} \mid \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0\}$$

gilt

$$\begin{array}{ll} \text{Entweder} & [(x_n)_n] = [(y_n)_n] \\ \text{oder} & [(x_n)_n] \cap [(y_n)_n] = \emptyset \end{array}$$

Setze deshalb

$$\hat{X} = \{[(x_n)_n]\}$$

1.) $\hat{X}$ wird ein vollständiger Abstandsraum durch

$$\hat{d}([(x_n)],[(y_n)]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$$

2.) Die Abbildung

$$i : X \to \hat{X}, x \mapsto [(x,x,\ldots)]$$

ist eins zu eins und $i(X)$ ist dicht in $\hat{X}$.

Beweis. 1.) Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x_n)_n \sim (x_n)_n \\
(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (y_n)_n \sim (x_n)_n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (x_n)_n \sim (y_n)_n, (y_n)_n \sim (z_n)_n \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) \\
\Rightarrow \quad & 0 \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0 \\
\Rightarrow \quad & (x_n)_n \sim (z_n)_n
\end{aligned}$$

ist $\sim$ eine Gleichwertigkeitsbeziehung. Wegen

$$\begin{aligned}
[(x_n)_n] \cap [(y_n)_n] \neq \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \exists z_n : z_n \sim x_n, z_n \sim y_n \\
&\Rightarrow \quad x_n \sim y_n \\
&\Rightarrow \quad [(x_n)_n] = [(y_n)_n]
\end{aligned}$$

ist $\hat{X}$ definiert.
a) Da $(x_n)_n, (y_n)_n$ Cauchyfolgen sind, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m > N : \ \begin{cases} d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
\forall n, m > N : \ |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \quad &\le \quad d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \\
&< \quad \varepsilon
\end{aligned}$$

d.h. $(d(x_n, y_n))_n$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und hat in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert, d.h.

$$\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

ist definiert.
b) Seien $(a_n) \sim (x_n), (b_n) \sim (y_n)$, d.h.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(a_n, x_n) \quad &= \quad 0 \\
\lim_{n\to\infty} d(b_n, y_n) \quad &= \quad 0 \\
\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \quad &= \quad \hat{d}([(x_n)], [(y_n)])
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \left| \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) - d(a_n, b_n) \right| \\
\leq\ & \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) - d(x_n, y_n) \right|}_{=0} + \lim_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(a_n, b_n)| \\
\leq\ & \lim_{n\to\infty} d(x_n, a_n) + \lim_{n\to\infty} d(b_n, y_n) \\
=\ & 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) \\
&= \hat{d}([(a_n)], [(b_n)])
\end{aligned}$$

und $\hat{d}$ ist unabhängig vom Vertreter.

c) Wegen

$$\begin{aligned}
\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_n, y_n)}_{\geq 0} \\
&\geq 0 \\
\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) \\
&= \hat{d}([(y_n)], [(x_n)])
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n) \\
\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) &\leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n) \\
\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) &\leq \hat{d}([(x_n)], [(z_n)]) + \hat{d}([(z_n)], [(y_n)])
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \\
\overset{Def}{\iff}\ & (x_n) \sim (y_n) \\
\iff\ & [(x_n)] = [(y_n)]
\end{aligned}$$

ist $\hat{d}$ ein Abstand.

d) Sei $([(a_n^k)_n])_k$ eine Cauchfolge in $\hat{X}$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists i_0\ \forall i, j > i_0 : \hat{d}\left([(a_n^i)_n], [(a_n^j)_n]\right) = \lim_{n\to\infty} d(a_n^i, a_n^j) < \varepsilon$$

Damit gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists i_0\ \forall i, j > i_0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ d(a_n^i, a_n^j) < 2\varepsilon$$

Was nicht klappt: Setze

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n = a_n^n$$

Wähle eine Cauchyfolge $m > i_0$ mit

$$d(a_n^m, a_m^m) < \varepsilon$$

Damit gilt für $m > i_0, n > \max\{n_0, i_0\}$

$$\begin{aligned} d(b_n, b_m) &\overset{\text{Def}}{=} d(a_n^n, a_m^m) \\ &\leq \underbrace{d(a_n^n, a_n^m)}_{<2\varepsilon} + \underbrace{d(a_n^m, a_m^m)}_{<\varepsilon} \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

und $(b_n)_n$ ist eine Cauchyfolge.
(Aber: es ist nicht klar, dass es eine solche Cauchyfolge gibt).
Zeige

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} [(a_n^k)_n]_k &= [(b_n)_n] \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists i_0\ \forall i > i_0 :\ \hat{d}\left([(b_n)_n], [(a_n^i)_n]\right) &= \lim_{n\to\infty} d(b_n, a_n^i) < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists i_0\ \forall i > i_0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists 0 < \delta < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 : (b_n^n, a_n^j) &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

Damit wäre $\hat{X}$ vollständig.
(Aber: Es ist nicht klar, das man für alle j ein gemeinsames n_0 und δ finden kann.)
Wie muss man die b_n wählen, damit $(b_n)_n$ eine Cauchyfolge wird und der Grenzwert der $(a_n^k)_n$ ist?
e) Wegen

$$\begin{aligned} \hat{d}(i(x), i(y)) &= \lim_{n\to\infty} d(x, y) \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

erhält i den Abstand.
f) Sei $[(x_n)_n] \in \hat{X}$ beliebig. Da $(x_n)_n$ Cauchyfolge ist, gilt:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m > n_0 :\ d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow\ &\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 :\ \hat{d}(i(x_n), [(x_n)_n]) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k) < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist $i(X)$ dicht in $\hat{X}$. ■

In vollständigen Abstandsräumen gilt für ein stetiges $f : X \to Y$

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Damit ist die Definition der Fortsetzung zwangsläufig.

Satz 32.7 (Fortsetzung einer gleichmäßig stetigen Abbildung) *Seien X, Y Abstandsräume und Y vollständig und $f : X \to Y$ mit*

$$\exists C > 0\ \forall x_1, x_2 \in X :\ d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$$

Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung

$$\overline{f} : \hat{X} \to Y, [(x_n)_n] \mapsto \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Beweis. a)

$$\begin{array}{cl}
 & (x_n)_n \text{ ist Cauchyfolge} \\
\Rightarrow & \exists N\ \forall n, m > N :\ d_X(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{C} \\
\Rightarrow & \exists N\ \forall n, m > N :\ d_Y(f(x_n), f(x_m)) \leq C d_X(x_n, x_m) < \varepsilon \\
\Rightarrow & (f(x_n))_n \text{ ist Cauchyfolge} \\
\overset{Y \text{ vollständig}}{\Rightarrow} & (f(x_n))_n \text{ hat einen Grenzwert in } Y
\end{array}$$

Damit ist $\overline{f}$ definiert.
b) Sei $(a_n)_n \sim (x_n)_n$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, x_n) = 0$$

Wegen

$$\begin{array}{rcl}
d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n), \lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) & \overset{\text{Y vollständig}}{=} & \lim_{n\to\infty} d_Y(f(a_n), f(x_n)) \\
 & \leq & C \lim_{n\to\infty} d(a_n, x_n) \\
 & = & 0 \\
\lim_{n\to\infty} f(a_n) & = & \lim_{n\to\infty} f(x_n)
\end{array}$$

ist die Definition von $\overline{f}$ unabhängig vom Vertreter.
c) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Cauchyfolgen mit

$$d([(x_n)_n], [(y_n)_n]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Da $(f(x_n))_n, (f(y_n))_n$ einen Grenzwert haben, gilt $\exists k \in \mathbb{N}\ \exists x_k, y_k$ mit

$$\begin{aligned} d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), f(x_k)\right) &< \frac{\varepsilon}{3} \\ d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(y_n), f(y_k)\right) &< \frac{\varepsilon}{3} \\ d_X(x_k, y_k) &< \frac{\varepsilon}{3C} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} & d_Y\left(\overline{f}([(x_n)_n]), \overline{f}([(y_n)_n])\right) \\ \overset{Def}{=} \ & d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\right) \\ \leq \ & d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), f(x_k)\right) + d_Y\left(f(x_k), f(y_k)\right) + d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(y_n), f(y_k)\right) \\ < \ & \frac{\varepsilon}{3} + C d_X(x_k, y_k) + \frac{\varepsilon}{3} \\ < \ & \varepsilon \end{aligned}$$

ist $\overline{f}$ stetig. ∎

Satz 32.8 *Sei Y ein vollständiger Abstandsraum und $X \subset Y$.*
Dann existiert ein abstandserhaltendes umkehrbares

$$\overline{f} : \hat{X} \to \overline{X} \subset Y, [(x_n)_n] \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

d.h. $\hat{X}$ ist bis auf eine abstandserhaltende umkehrbare Abbildung eindeutig.

Beweis. 1.) Für

$$f : X \to Y, x \mapsto x$$

gilt

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_Y(x, y)$$

und mit $C = 1$ existiert genau eine stetige Fortsetzung

$$\overline{f} : \hat{X} \to Y, [(x_n)_n] \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

2.) Wegen

$$\begin{aligned} d_Y\left(\overline{f}([(x_n)], \overline{f}([(y_n)])\right) &\overset{Def}{=} d_Y\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) \\ &\overset{Y \text{ vollständig}}{=} \lim_{n\to\infty} d_Y(x_n, y_n) \\ &\overset{Def}{=} d([(x_n)], [(y_n)]) \end{aligned}$$

wird der Abstand erhalten.
3.) Wegen

$$
\begin{array}{cl}
 & d_Y(\overline{f}([(x_n)], \overline{f}([(y_n)]) = 0 \\
\overset{\text{abstandserhaltend}}{\Rightarrow} & d([(x_n)], [(y_n)]) = d_Y\left(\overline{f}([(x_n)], \overline{f}([(y_n)])\right) = 0 \\
\Rightarrow & [(x_n)] = [(y_n)]
\end{array}
$$

ist f eins zu eins.
4.) Sei $x \in \overline{X}$. Dann gilt

$$\exists (x_n)_n \text{ in } X : \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Damit ist $(x_n)_n$ Cauchyfolge, d.h.

$$
\begin{array}{l}
(x_n)_n \in \hat{X} \\
\overline{f}([(x_n)]) = \lim_{n\to\infty} x_n = x
\end{array}
$$

Damit ist f auf. ■

Teil III. Funktionalanalysis

33. Stetige lineare Abbildungen

Definition 33.1 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*
a) Eine Abbildung

$$\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}, x \mapsto \| x \|$$

*heißt **Halblänge*** $\iff$ $\forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X$

$$\begin{array}{ll} 1.) & \| x \| \geq 0 \\ 2.) & \| ax \| = |a| \, \| x \| \\ 3.) & \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \end{array}$$

*b) Sie heißt **Länge*** $\iff$ *Es gilt auch:*

$$\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$$

*c) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Länge heißt **Längenraum.***

Bemerkung 33.2 *a) Eine Länge kann den Nullpunkt von anderen Punkten unterscheiden, und damit alle Punkte voneinander unterscheiden. Das wird bei einem System von Halblängen nicht notwendig so sein.*
b) $\| \underbrace{0}_{\in V} \| = 0$ *gilt immer.*
c) Verschiebungen

$$T_z : X \to X, x \mapsto x + z$$

erhalten den Abstand $d(x, y) = \| x - y \|$.

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \| x - y \| = 0 \quad &\Rightarrow \quad x - y = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

b) Sei $v \in V$ beliebig.

$$\| \underbrace{0}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{v}_{\in V} \| = |0| \, \| v \| = 0$$

c)

$$\begin{aligned} d(x+z,y+z) &= \| x+z-(y+z) \| \\ &= \| x-y \| \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

■

Satz 33.3 *a) Sind zwei Längen $\| \cdot \|_*, \| \cdot \|$ gleichwertig, d.h.*

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \; C_1 \| x \|_* \leq \| x \| \leq C_2 \| x \|_*$$

so definieren sie dieselbe Topologie.
b) Unterschiede treten erst bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen auf.

Beweis. a) Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \| x-x_n \|_* &\leq \frac{1}{C_1} \lim_{n\to\infty} \| x-x_n \| \\ \lim_{n\to\infty} \| x-x_n \| &\leq C_2 \lim_{n\to\infty} \| x-x_n \|_* \end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \| x-x_n \|_* = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \| x-x_n \| = 0$$

Damit haben dieselben Folgen einen Grenzwert.
Die Längen definieren also dieselbe Topologie.
b) Wir haben in der Einführung gezeigt: Auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sind alle Längen gleichwertig. ■

Satz 33.4 *Sei $(X, \| \cdot \|)$ ein* ***vollständiger*** *Längenraum und $\sum_{i=0}^{\infty} \| x_i \|$ habe einen Grenzwert. Dann hat*

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i$$

einen Grenzwert.

Beweis. Sei $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Wegen

$$\begin{aligned} \| s_n - s_m \| &\leq \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \| x_i \| \\ &\overset{m\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

ist $(s_n)_n$ eine Cauchyfolge und hat in dem vollständigen X einen Grenzwert.
■

Satz 33.5 *Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen Längenräumen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} T \textit{ ist stetig} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists z \in X : \ T \textit{ ist stetig in } z \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists C > 0 \ \forall x \in X : \| Tx \| \leq C \| x \| \end{aligned}$$

*Diese linearen Abbildungen heißen **beschränkt**.*

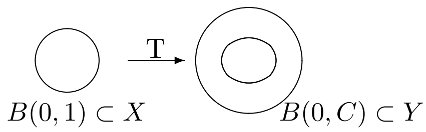


Abbildung 7: stetiges lineares T

Beweis. "⇒": Da T stetig ist, ist T stetig in z.
"⇐": Sei $x \in X$ beliebig und $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \| x_n + z - x - z \| &= \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \| Tx_n - Tx \| &= \lim_{n\to\infty} \| T(x_n + z - x) - Tz \| \\ &\overset{T \text{ stetig in } z}{=} 0 \end{aligned}$$

"⇒": Da T stetig in 0 ist, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ TB(0,\delta) \subset B(0,\varepsilon)$$

Für $\varepsilon = 1$ gilt

$$\exists \delta > 0 : \| x \| < \delta \Rightarrow \| Tx \| < 1$$

Mit $C := 2 \cdot \delta^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in X : \| Tx \| &= \left\| T \left(\frac{2 \| x \|}{\delta} \underbrace{\frac{\delta x}{2 \| x \|}}_{\| \cdot \| < \delta} \right) \right\| \\ &\leq \frac{2 \| x \|}{\delta} 1 \\ &= C \| x \| \end{aligned}$$

"⇐": Sei $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \| Tx_n - Tx \| &= \lim_{n\to\infty} \| T(x_n - x) \| \\ &\leq C \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0 \end{aligned}$$

ist T stetig in x. ■

Wir optimieren jetzt das C.

Satz 33.6 *Sei $T : X \to Y$ linear zwischen Längenräumen. Es gilt*

$$\begin{aligned}
\| T \| &:= \inf\left\{ C \geq 0 \;\middle|\; \sup_{x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \leq C \right\} \\
&= \inf\left\{ C \geq 0 \;\middle|\; \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| \leq C \right\} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| \\
&= \sup_{x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \| \\
\| Tx \| &\leq \| T \| \| x \|
\end{aligned}$$

$\| T \|$ *gibt an, wie stark ein Vektor der Länge 1 höchstens gestreckt wird.*

Beweis. a) Sei $x \neq 0$. Da T linear ist, kann man $\| x \|^{-1} > 0$ an der Länge und an T vorbeiziehen und es gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\| Tx \|}{\| x \|} \leq C &\iff \left\| T \underbrace{\frac{x}{\| x \|}}_{\|\cdot\|=1} \right\| \leq C \\
\sup_{x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \leq C &\iff \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| \leq C
\end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichheit von 1. und 2. bzw. von 3. und 4. Zeile.
b) Wegen

$$\inf\left\{ C \geq 0 \;:\; \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| \leq C \right\} = \sup_{\|x\|=1} \| Tx \|$$

sind 2. und 3. Zeile gleich.
c) Sei $\| x \| < 1$ beliebig. Wegen

$$\begin{aligned} \| Tx \| &= \left\| T \frac{x}{\| x \|} \right\| \underbrace{\| x \|}_{<1} \\ &< \left\| T \frac{x}{\| x \|} \right\| \\ &\leq \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| \end{aligned}$$

gilt

$$\sup_{\| x \| \leq 1} \| Tx \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \|$$

und 4. und 5. Zeile sind gleich.
d) Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} &\leq \sup \frac{\| Tx \|}{\| x \|} = \| T \| \\ \| Tx \| &\leq \| T \| \| x \| \end{aligned}$$

Für x=0 gilt

$$\| Tx \| = 0 \leq \| T \| \underbrace{\| x \|}_{=0}$$

■

Satz 33.7 *Seien X,Y Längenräume. Setze*

$$\begin{aligned} L(X,Y) &= \{T : X \to Y \text{ stetig linear } \} \\ L(X) &= L(X,X) \end{aligned}$$

a) $(L(X,Y), \| \cdot \|)$ *ist ein Längenraum.*
b) Ist Y *vollständig, so ist* $L(X,Y)$ *vollständig.*
c)

$$X' = L(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ linear, stetig } \}$$

ist vollständig.

Beweis. a) Seien T,S linear und stetig. Dann sind auch

$$a \cdot T \text{ und } T + S$$

linear und stetig und L(X,Y) ist ein Vektorraum.
b) Wegen $C \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \| T \| &= \inf \left\{ C \geq 0 : \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| \leq C \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

außerdem

$$\begin{aligned} \| T \| = 0 \quad &\iff \quad \forall x \in X : \| Tx \| = 0 \\ &\iff \quad \forall x \in X : \ Tx = 0 \\ &\iff \quad T \equiv 0 \end{aligned}$$

c) Sei $\| x \| = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \| (S+T)x \| &\leq \| Sx \| + \| Tx \| \\ &\leq \| S \| + \| T \| \\ \sup_{\|x\|=1} \| (S+T)x \| &\leq \| S \| + \| T \| \\ \| S+T \| &\leq \| S \| + \| T \| \end{aligned}$$

d) Sei $\| x \| = 1$ und $a \neq 0$. Wegen

$$\| aTx \| = |a| \cdot \| Tx \| \leq |a| \, \| T \|$$

gilt

$$\| aT \| \leq |a| \, \| T \|$$

Wegen

$$\begin{aligned} \| T \| &= \| a^{-1} \cdot aT \| \\ &\leq |a^{-1}| \, \| aT \| \\ &\leq |a^{-1}| \cdot |a| \, \| T \| \\ &= \| T \| \end{aligned}$$

gilt

$$\| aT \| = |a| \cdot \| T \|$$

Für $a = 0$ gilt

$$\| \underbrace{aT}_{=0} \| \quad = \quad 0 = \underbrace{|a|}_{=0} \, \| T \|$$

e) Sei $(T_n)_n$ Cauchyfolge in L(X,Y), d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq n_0 : \| T_n - T_m \| < \varepsilon$$

Wegen

$$\begin{aligned} \| T_n x - T_m x \| &\leq \| T_n - T_m \| \| x \| \\ &< \varepsilon \| x \| \end{aligned}$$

ist $(T_n x)_n$ Cauchyfolge in Y. **Da Y vollständig** ist, gilt

$$\forall x: \ (T_n x)_n \text{ hat einen Grenzwert}$$

Setze

$$Sx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

f) Wegen

$$\begin{aligned} S(ax+by) &= \lim_{n\to\infty} T_n(ax+by) \\ &= a\lim_{n\to\infty} T_n x + b\lim_{n\to\infty} T_n y \\ &= aSx + bSy \end{aligned}$$

ist S linear.
g) Sei $\| x \| = 1$. Es gilt

$$\forall n, m \geq n_0 : \| T_m x - T_n x \| < \varepsilon$$

Wegen

$$Sx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

gilt

$$\forall x \ \exists m_x > n_0 : \| Sx - T_{m_x} x \| < \varepsilon$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 : \| (S - T_n)x \| &\leq \| Sx - T_{m_x}x \| + \| T_{m_x}x - T_n x \| \\ &< 2\varepsilon \\ \forall n \geq n_0 : \sup_{\|x\|=1} \| (S - T_n)x \| &\leq 2\varepsilon \\ \forall n \geq n_0 : \| S - T_n \| &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist $S - T_n$ stetig und

$$S = S - T_n + T_n$$

ist linear und stetig. ■

Satz 33.8 *Ist $P \in L(X)$ stetig, linear mit $P^2 = P$, so gilt*

$$\begin{array}{ll} a) & X = PX \oplus (1-P)X \\ b) & PX, (1-P)X \text{ sind abgeschlossen} \end{array}$$

Beweis. a) Für
$$x \in PX \cap (1-P)(X)$$
gilt
$$\begin{aligned} x &\overset{\exists y:\ x=Py}{=} Py \\ &\overset{P^2=P}{=} P^2 y \\ &\overset{x=Py}{=} Px \\ &\overset{\exists z:\ x=(1-P)z}{=} Pz - P^2 z \\ &\overset{P^2=P}{=} Pz - Pz \\ &= 0 \\ PX \cap (1-P)X &= \{0\} \end{aligned}$$
Sei $z \in X$ beliebig. Dann gilt
$$\begin{aligned} z &= Pz + (1-P)z \\ &\in PX \oplus (1-P)X \\ X &= PX \oplus (1-P)X \end{aligned}$$
b) Wegen
$$z = Pz + (1-P)z$$
gilt
$$\begin{aligned} z \in PX &\iff (1-P)z = 0 \iff z \in Null(1-P) \\ z \in (1-P)X &\iff Pz = 0 \iff z \in Null(P) \end{aligned}$$
d.h.
$$\begin{aligned} PX &= Null\ (1-P) \\ (1-P)X &= Null\ P \end{aligned}$$
und beide Mengen sind abgeschlossen. ∎

34. Sublinearität und Fortsetzung von $f : G \subset X \to \mathbb{K}$

Definition 34.1 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{K}$ mit*

$$\begin{array}{rcl} \forall a \in [0,\infty)\ \forall x \in X: \ p(a \cdot x) & = & a \cdot p(x) \\ \forall x, y \in X: \ p(x+y) & \leq & p(x) + p(y) \end{array}$$

*heißt **sublinear**.*

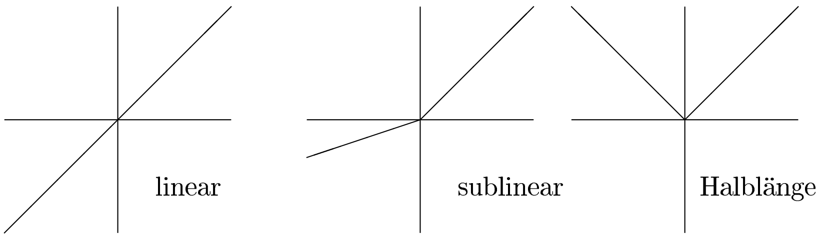


Abbildung 8: sublineare $p : X \to \mathbb{R}$

Beispiel 34.2 *Eine Halblänge ist sublinear.*

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} \forall a \in [0,\infty)\ \forall x \in X: \| a \cdot x \| & = & |a| \cdot \| x \| = a \cdot \| x \| \\ \forall x, y \in X: \| x + y \| & \leq & \| x \| + \| y \| \end{array}$$

■

Satz 34.3 *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $G \subset X$ ein Untervektorraum, $g : G \to \mathbb{R}$ linear, $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und*

$$\forall x \in G: \ g(x) \leq p(x)$$

Sei $z \in X \backslash G$, insbesondere $z \neq 0$.
Dann existiert ein lineares

$$\tilde{g} : Lin(G, z) \to \mathbb{R}$$

mit

$$\forall x \in Lin(G, z): \ \tilde{g}(x) \leq p(x)$$

Beweis. 1.) In $Lin(G, z)$ ist die Darstellung eindeutig:
Wegen

$$
\begin{aligned}
& \exists x \in G \; \exists b \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : \; x = bz \\
\Rightarrow \quad & z = \frac{1}{b} x \in G
\end{aligned}
$$

ein Widerspruch, gilt

$$\forall x \in G \; \forall b \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : \; x \neq bz$$

Seien $x_1 + bz_1, x_2 + bz_2 \in Lin(G, z)$ mit $x_i \in G, b_i \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& x_1 + bz_1 = x_2 + bz_2 \\
\overset{X \text{ Vektorraum}}{\Rightarrow} \quad & \underbrace{x_1 - x_2}_{\in G} = \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in \mathbb{K}} z \\
\Rightarrow \quad & x_1 - x_2 = 0 = b_1 - b_2 \\
\Rightarrow \quad & x_1 = x_2 \text{ und } b_1 = b_2
\end{aligned}
$$

2.) Für $x, y \in$ G gilt:

$$
\begin{aligned}
g(x) + g(y) & \overset{\text{g linear}}{=} g(\underbrace{x + y}_{\in \text{ G, da Untervektorraum}}) \\
& \overset{Vor}{\leq} p(x + y) \\
& = p(x + z + y - z) \\
& \overset{\text{sublinear}}{\leq} p(x + z) + p(y - z) \\
g(y) - p(y - z) & \leq p(x + z) - g(x) \\
m := \sup_{y \in G}(g(y) - p(y - z)) & \leq \inf_{x \in G}(p(x + z) - g(x)) = M
\end{aligned}
$$

Da die linke Seite unabhängig ist von x und die rechte Seite unabhängig ist von y, konnten wir zur größten unteren Schranke und kleinsten oberen Schranke übergehen.
3.) Sei $a \in [m, M]$ beliebig. Definiere

$$\tilde{g} : Lin(G, z) \to \mathbb{R}, x + bz \mapsto g(x) + ba$$

Da in $Lin(G, z)$ die Darstellung eindeutig ist, ist $\tilde{g}$ wohldefiniert.
4.) Wegen

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}(x_1 + b_1 z + x_2 + b_2 z) \\
= \; & \tilde{g}(\underbrace{x_1 + cx_2}_{\in G} + \underbrace{(b_1 + cb_2)}_{\in \mathbb{K}} z) \\
= \; & g(x_1 + cx_2) + (b_1 + cb_2) z \\
\overset{g \text{ linear}}{=} \; & g(x_1) + cg(x_2) + b_1 z + cb_2 z \\
= \; & \tilde{g}(x_1 + b_1 z) + c\tilde{g}(x_2 + b_2 z)
\end{aligned}$$

ist $\tilde{g}$ linear.
5.) Sei $b > 0$.

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x + bz) & \overset{Def}{=} g(x) + ba \\
& \leq g(x) + bM \\
& = g(x) + b \inf_{x \in G} \{p(x + z) - g(x)\} \\
& \overset{\frac{x}{b} \in G}{\leq} g(x) + b\left(p\left(\frac{x}{b} + z\right) - g\left(\frac{x}{b}\right)\right) \\
& \overset{b \geq 0}{=} g(x) + p(x + bz) - g(x) \\
& = p(x + bz)
\end{aligned}$$

Für $b < 0$ nimmt man die andere Abschätzung

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x + bz) & \overset{Def}{=} g(x) + ba \\
& \overset{b<0}{\leq} g(x) + bm \\
& \overset{\text{Def}}{=} g(x) + b \inf_{x \in G} \{g(y) - p(y - z)\} \\
& \overset{-\frac{x}{b} \in G}{\leq} g(x) + b\left(g\left(\frac{-x}{b}\right) - p\left(\frac{-x}{b} - z\right)\right) \\
& \overset{-b \geq 0}{=} g(x) + p(x + bz) - g(x) \\
& = p(x + bz)
\end{aligned}$$

Für $b = 0$ gilt

$$\tilde{g}(x + bz) = g(x) + 0 \leq p(x)$$

Damit gilt

$$\tilde{g} \leq p \text{ auf } Lin(G, z)$$

■

Satz 34.4 *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $F \subset X$ ein Untervektorraum, $p : X \to \mathbb{R}$* ***sublinear****, $f : F \to \mathbb{R}$ linear und*

$$\forall x \in F : f(x) \leq p(x)$$

Dann existiert eine Fortsetzung von f zu einem linearen stetigen

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$$

mit

$$\forall x \in X : \ \tilde{f}(x) \leq p(x)$$

Beweis. a) Sei M die Menge aller Fortsetzungen von f, d.h.

$$M = \left\{ (G, g) \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ Untervektorraum}, F \subset G \\ \forall x \in G : \ g(x) \leq p(x), g : G \to \mathbb{R} \text{ linear}, g|_F = f \end{array} \right\}$$

mit

$$(G_1, g_1) < (G_2, g_2) \iff G_1 \subsetneqq G_2 \text{ und } g_1|_{G_1} = g_2|_{G_2}$$

Wegen

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall G_1 : \ G_1 = G_1 \\ 2.) & (G_1 \subsetneqq G_2 \text{ und } g_1|_{G_1} = g_2|_{G_2} \text{ und } G_2 \subsetneqq G_3 \text{ und } g_1|_{G_1} = g_3|_{G_3}) \\ & \Rightarrow G_1 \subsetneqq G_3 \text{ und } g_1|_{G_1} = g_3|_{G_3} \end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall (G_1, g_1) : \ (G_1, g_1) \not< (G_1, g_1) \\ 2.) & ((G_1, g_1) < (G_2, g_2) \text{ und } (G_2, g_2) < (G_3, g_3)) \Rightarrow (G_1, g_1) < (G_3, g_3) \end{array}$$

ist $(M, <)$ teilgeordnet.
b) Seien $\forall i \in I : (G_i, g_i) \in (M, <)$ mit

$$3.) \forall i, j \in I : \ (G_i, g_i) < (G_j, g_j) \text{ oder } (G_i, g_i) > (G_j, g_j) \text{ oder } (G_i, g_i) = (G_j, g_j)$$

Setze

$$\begin{aligned} G &= \bigcup_i G_i \\ \forall x \in G_i : \ g(x) &= g_i(x) \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} x \in G \quad &\Rightarrow \quad \exists i : \ x \in G_i \\ &\Rightarrow \quad \forall j \geq i : \ g(x) = g_i|_{G_i}(x) = g_j|_{G_j}(x) \end{aligned}$$

ist g definiert. Wegen

$$\begin{array}{rcl} x \in G & \Rightarrow & \exists i: \ x \in G_i \\ & \overset{G_i \text{ Vektorraum}}{\Rightarrow} & b \cdot x \in G_i \subset G \\ x, y \in G & \Rightarrow & \exists i, j: \ x \in G_i, y \in G_j \\ & \overset{k=\max\{i,j\}}{\Rightarrow} & x, y \in G_k \\ & \overset{G_k \text{ Vektorraum}}{\Rightarrow} & x + y \in G_k \subset G \end{array}$$

ist G ein Untervektorraum von X und (G, g) ist obere Schranke der $(G_i, g_i)_{i \in I}$.
Damit existiert ein maximales Element (G, g).
c) Annahme $G \neq X$. Sei $0 \neq z \in X \backslash G$.
Dann existiert eine Fortsetzung $(Lin(G, z), \tilde{g})$ auf

$$\begin{array}{rcl} G & \subsetneqq & Lin(G, z) \\ (G, g) & < & (Lin(G, z), \tilde{g}) \end{array}$$

im Widerspruch zur Maximalität von G, d.h.

$$G = X$$

■

Satz 34.5 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $F \subset X$ ein Untervektorraum, $\| \cdot \|$: $X \to \mathbb{K}$ eine* ***Halblänge*** *und $f : F \to \mathbb{K}$ linear, stetig mit*

$$\forall x \in F: \ |f(x)| \leq \| x \|$$

Dann existiert eine lineare stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to K$ mit

$$\forall x \in X: \ |\tilde{f}(x)| \leq \| x \|$$

Sublinear ist nur bei $\mathbb{R}$-Vektorräumen vernünftig. In $\mathbb{C}$ existiert kein Größer-Begriff, deshalb benötigt man eine Halblänge.

Beweis. a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Eine Halblänge ist sublinear.
b) 1.) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$u : F \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) + \overline{f}(x)}{2}$$

Sei $a \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{array}{rcl} u(x + ay) & = & \dfrac{f(x + ay) + \overline{f(x + ay)}}{2} \\ & = & \dfrac{f(x) + \overline{f(x)}}{2} + a\dfrac{f(y) + \overline{f(y)}}{2} \end{array}$$

ist u $\mathbb{R}$-linear. Wegen

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|f(x)| \\ &= |f(x)| \\ &\leq \| f \| \cdot \| x \| \end{aligned}$$

ist u stetig. Wegen

$$\forall x \in F: \ |u(x)| \leq |f(x)| \leq \| x \|$$

Damit existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $\tilde{u} : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in X: \ |\tilde{u}(x)| \leq p(x)$$

2.) Setze

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{C}, x \mapsto \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}: \ \tilde{f}(ax) &= \tilde{u}(ax) - i\tilde{u}(iax) \\ &= a(\tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)) \\ &= a\tilde{f}(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x+y) &= \tilde{u}(x+y) - i\tilde{u}(i(x+y)) \\ &= \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix) + \tilde{u}(y) - i\tilde{u}(iy) \\ &= \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{f}(ix) &= \tilde{u}(ix) - i\tilde{u}(i^2 x) \\ &= \tilde{u}(ix) + i\tilde{u}(x) \\ &= i(\tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)) \\ &= i\tilde{f}(x) \end{aligned}$$

ist $\tilde{f}$ $\mathbb{C}$-linear.
3.) Wegen

$$\forall x \in X \ \exists c \in \mathbb{C}, |c| = 1: \ |\tilde{f}(x)| = c\tilde{f}(x)$$

gilt

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}(x)| &= \underbrace{c\tilde{f}(x)}_{\in\mathbb{R}}\\
&\overset{x=\frac{z+\overline{z}}{2}}{=} \frac{c\tilde{f}(x)+\overline{c\tilde{f}(x)}}{2}\\
&\overset{\mathbb{C}\text{-linear}}{=} \frac{\tilde{f}(cx)+\overline{\tilde{f}(cx)}}{2}\\
&\overset{\text{Def von } \tilde{f}}{=} \tilde{u}(cx)\\
&\leq \| cx \|\\
&\overset{\textbf{Halblänge}}{=} \underbrace{|c|}_{=1} \| x \| = \| x \|\\
|\tilde{f}(x)| &\leq \| x \|
\end{aligned}$$

■

Satz 34.6 *Sei X ein Längenraum.*
a) Für jedes $0 \neq x \in X$ *existiert ein stetiges lineares* $f : X \to \mathbb{K}$ *mit*

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1\\
\| f \| &= \frac{1}{\| x \|}
\end{aligned}$$

b) Sei $F \subset X$ *ein Untervektorraum und* $f : F \to \mathbb{K}$ *linear und stetig.*
Dann existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ *mit*

$$\| \tilde{f} \| = \| f \|$$

c) X' trennt die Punkte von X.

$$\forall x_1 \neq x_2 \ \exists \text{ lineares stetiges } f : X \to \mathbb{K} : \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

Beweis. a) Setze

$$\begin{aligned}
&g : \mathbb{K}x \to \mathbb{K}, ax \mapsto a\\
&\| \cdot \|_* : X \to \mathbb{K}, z \mapsto \frac{\| z \|}{\| x \|}
\end{aligned}$$

1.) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{aligned}
\| z \|_* &= \frac{\| z \|}{\| x \|} \geq 0\\
\| az \|_* &= \frac{\| az \|}{\| x \|} = |a|\frac{\| z \|}{\| x \|} = |a| \, \| z \|\\
\| z_1 + z_2 \|_* &= \frac{\| z_1 + z_2 \|}{\| x \|} \leq \frac{\| z_1 \| + \| z_2 \|}{\| x \|} = \| z_1 \|_* + \| z_2 \|_*
\end{aligned}$$

ist $\| \cdot \|_*$ eine Halbnorm.
2.) Wegen

$$\begin{aligned} g(a_1x + ca_2x) &= a_1 + ca_2 = g(a_1x) + cg(a_2x) \\ \forall a \in \mathbb{R}: \; g(ax) &= |a| \\ \| g \| &\leq 1 \end{aligned}$$

ist g linear und stetig.
3.) Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 = \| x \| \\ |g(ax)| &= |a| \\ &= \left\| \frac{a \cdot x}{\| x \|} \right\| \\ &= \| a \cdot x \|_* \\ \forall z \in \mathbb{K}x: \; |g(z)| &\leq \| z \|_* \end{aligned}$$

Da $\| \cdot \|$ eine Halblänge ist, existiert eine stetige Fortsetzung $f : X \to \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} \forall y \in X: \; |f(y)| &\leq \| y \|_* = \frac{\| y \|}{\| x \|} \\ \| f \| &\leq \frac{1}{\| x \|} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\| x \|} \right\| &= 1 \\ \left| f\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \right| &\overset{\text{Def}}{=} \left| g\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \right| \\ &\overset{g(x)=1}{=} \frac{1}{\| x \|} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \| f \| &= \sup_{\| z \| = 1} |f(z)| \\ &\geq \frac{1}{\| x \|} \\ \| f \| &= \frac{1}{\| x \|} \\ f(x) &= g(x) = 1 \end{aligned}$$

b) 1.) Setze
$$\| \cdot \|_*: X \to \mathbb{K}, x \mapsto \| f \| \| x \|$$
Wegen
$$\begin{aligned}
\| x \|_* &= \| f \| \| x \| \geq 0 \\
\| ax \|_* &= \| f \| \| ax \| \\
&= |a| \| f \| \| x \| \\
&= |a| \| x \|_* \\
\| x + y \|_* &= \| f \| \| x + y \| \\
&\leq \| f \| \| x \| + \| f \| \| y \| \\
&= \| x \|_* + \| y \|_*
\end{aligned}$$
ist $\| \cdot \|_*$ eine Halblänge.
2.)
$$\forall x \in F: \ |f(x)| \leq \| f \| \| x \| = \| x \|_*$$
Damit existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ mit
$$\begin{aligned}
\forall x \in X : \| \tilde{f}(x) \| &\leq \| f \| \| x \| \\
\| \tilde{f} \| &\leq \| f \| \\
\| \tilde{f} \| = \sup_{\|x\|=1, x \in X} |\tilde{f}(x)| &\overset{X \supset F}{\geq} \sup_{\|x\|=1, x \in F} |f(x)| = \| f \| \\
\| \tilde{f} \| &= \| f \|
\end{aligned}$$
c) Wegen $x_1 - x_2 \neq 0$ und a) existiert ein stetiges lineares $f : X \to \mathbb{K}$ mit
$$1 = f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$$
d.h.
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$
■

Satz 34.7 *Sei X ein Längenraum und V ein Untervektorraum mit* $\dim V < \infty$. *Dann ist V abgeschlossen und es existiert ein lineares stetiges $P : X \to V$ mit*
$$\begin{aligned}
P^2 &= P \\
PX &= V \\
P|_V &\equiv id|_V
\end{aligned}$$

Beweis. 1.) Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V. Setze

$$g_i : V \to \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mapsto a_i$$

Wegen

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i + c \sum_{i=1}^{n} b_i e_i\right) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + c b_i) e_i\right) \\ &= a_i + c b_i \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) + c g\left(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i\right) \end{aligned}$$

ist g_i linear und stetig.
Damit existieren lineare stetige $f_i : X \to \mathbb{K}$ mit

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

2.) Da die $f_i : X \to \mathbb{K}$ stetig sind, ist

$$P : X \to V, x \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

stetig. Wegen

$$\begin{aligned} P(x + cy) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x + cy) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i + c \sum_{i=1}^{n} f_i(y) e_i \\ &= P(x) + cP(y) \end{aligned}$$

ist P linear.
3.) Wegen

$$\begin{aligned}
P^2x &= P\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i\right) \\
&\overset{P \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_i(x)}_{\in\mathbb{K}} P(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f_j(e_i)e_j}_{=e_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i = Px
\end{aligned}$$

gilt

$$P^2 = P$$

Sei $z = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \in V$ beliebig. Wegen

$$\begin{aligned}
Pz &\overset{Def}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(z)e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right) e_i \\
&\overset{f_i \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j f_i(e_j)}_{=a_i} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = z
\end{aligned}$$

gilt

$$P|_V = id|_V$$

Wir haben gezeigt

$$V = PX = Null(1 - P)$$

Damit ist V abgeschlossen. ■

35. Der Dualraum eines Längenraumes

Satz 35.1 *Es existiert eine stetige zweilineare Abbildung*

$$X' \times X \to \mathbb{R}, (f,x) \to f(x)$$

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} (f_1+f_2)(x_1+x_2) &= f_1(x_1)+f_1(x_2)+f_2(x_1)+f_2(x_2) \\ (af)(bx) &= abf(x) \end{aligned}$$

ist sie zweilinear.
Sei $\lim_{n\to\infty} f_n = f, \lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann ist $(\| x_n \|)_n$ beschränkt und

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x)| \\ \overset{f \text{ linear}}{=} & \lim_{n\to\infty} |(f_n - f)(x_n) - f(x_n - x)| \\ \leq & \lim_{n\to\infty} \underbrace{\| f - f_n \|}_{\to 0} \underbrace{\| x_n \|}_{\leq C} + \| f \| \lim_{n\to\infty} \underbrace{\| x_n - x \|}_{\to 0} \\ = & \; 0 \end{aligned}$$

■

Satz 35.2 *Die Auswertungs-Abbildung*

$$i : X \to X'', x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

ist stetig, linear und längenerhaltend, insbesondere eins zu eins.

Beweis. 1.) Wegen

$$\begin{aligned} i(x)(a_1f_1+a_2f_2) &= (a_1f_1+a_2f_2)(x) \\ &= a_1f_1(x)+a_2f_2(x) \\ &= a_1i(x)(f_1)+a_2i(x)(f_2) \end{aligned}$$

ist i linear.
2.) Wegen

$$\begin{aligned} \forall f \in X' : \; |i(x)(f)| &= |f(x)| \leq \| f \| \| x \| \\ \| i(x) \| &= \sup_{\|f\|_{X'}=1} |i(x)(f)| \\ &\leq \| x \| \end{aligned}$$

ist $i(x)$ stetig.
3.) Es gilt

$$\forall x \neq 0 \; \exists g \in X' : \begin{cases} \| g \| = \frac{1}{\|x\|} \\ g(x) = 1 \end{cases}$$

d.h. mit

$$f : X \to \mathbb{K}, z \mapsto \| x \| g(z)$$

gilt

$$\forall x \neq 0 \; \exists f \in X' : \begin{cases} \| f \| = \| x \| \| g \| = 1 \\ f(x) = \| x \| g(x) = \| x \| \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned} \| i(x) \| &= \sup_{\|f\|=1} |i(x)(f)| \\ &= \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \\ &\geq \| x \| \\ \| i(x) \| &= \| x \| \end{aligned}$$

■

Bemerkung 35.3 *$i : X \to X$" ist längenerhaltend, eins zu eins und X" ist vollständig. Also erhält man eine andere Vervollständigung von $i(X)$ durch $\overline{i(X)}$.*

Satz 35.4 *Sei $T : X \to Y$ stetig und linear zwischen Längenräumen. Dann ist*

$$T' \; : Y' \to X', f \mapsto f \circ T$$

linear.

Beweis. Da T stetig ist, ist $f \circ T$ stetig. Seien $f_i : Y \to \mathbb{K}$. Wegen

$$\begin{aligned} T'(a_1 f_1 + a_2 f_2) &= (a_1 f_1 + a_2 f_2) \circ T \\ &= a_1 f_1 \circ T + a_2 f_2 \circ T \\ &= a_1 T' f_1 + a_2 T' f_2 \end{aligned}$$

ist T linear.

■

Satz 35.5 *T" ist eine Fortsetzung von T. Das Diagramm vertauscht.*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ i \downarrow & & \downarrow i & & \\ X'' & \xrightarrow[T'']{} & Y'' & & \end{array}$$

Beweis. Seien $x \in X, f \in X'$. Wegen

$$\begin{aligned} (\underbrace{T''i(x)}_{\in Y''})(f) &\overset{\text{Def. von T''}}{=} (i(x) \circ T')(f) \\ &\overset{\text{Def. von T'}}{=} i(x)(\underbrace{f \circ T}_{\in X'}) \\ &\overset{\text{Def. von i}}{=} (f \circ T)(x) \\ &= f(\underbrace{Tx}_{\in Y}) \\ &\overset{\text{Def. von i}}{=} i(Tx)(f) \end{aligned}$$

gilt

$$i(Tx) = T''(i(x))$$

und das Diagramm vertauscht. ■

Satz 35.6 *Es gilt* $\| T' \| = \| T \|$, *insbesondere ist T' stetig.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \forall f \in X' \; \forall x \in X : \; |(T'f)(x)| &= |f \circ T(x)| \\ &\leq \| f \| \| Tx \| \\ &\leq \| f \| \| T \| \| x \| \\ \forall f \in X' : \| T'f \| &\leq \| f \| \| T \| \\ \| T' \| &\leq \| T \| \end{aligned}$$

Mehrfaches Ausführen ergibt

$$\| T'' \| \leq \| T' \| \leq \| T \|$$

Da die kleinste obere Schranke über eine größere Menge größer ist, gilt

$$\begin{aligned}
\| T \| &= \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| \\
&= \sup_{\|i(x)\|=1} \| T'' i(x) \| \\
&\overset{i(X) \subset X''}{\leq} \sup_{\|x''\|=1} \| T'' x'' \| \\
&= \| T'' \|
\end{aligned}$$

■

36. Kugeln in Längenräumen

Satz 36.1 *Sei $c \neq 0$ und X, Y Längenräume und $T : X \to Y$ linear.*

$$\begin{aligned}
\overline{B(0,r)} &= r\overline{B(0,1)} \\
x + \overline{B(0,r)} &= \overline{B(x,r)} \\
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} TB_X(0,n\varepsilon) &= T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_X(0,n\varepsilon)\right) \\
cB_Y(y_0,\delta_1) &= B_Y(cy_0, c\delta_1) \\
\overline{TB_X(0,cn\varepsilon)} &= c\overline{TB_X(0,n\varepsilon)} \\
\overline{TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) - TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)} &= \overline{TB_X(0,\varepsilon)} \\
Tx + TB_X(0,2\varepsilon) &= T\left(x + B_X(0,2\varepsilon)\right)
\end{aligned}$$

Beweis. a)

$$\begin{aligned}
x \in \overline{B(0,r)} &\iff \| x \| \leq r \\
&\iff \left\| \frac{x}{r} \right\| \leq 1 \\
&\iff \frac{x}{r} \in \overline{B(0,1)} \\
&\iff x \in r\overline{B(0,1)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
y \in x + \overline{B(0,r)} &\iff y - x \in \overline{B(0,r)} \\
&\iff \| y - x \| \leq r \\
&\iff y \in \overline{B(x,r)}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} TB_X(0,n\varepsilon) \\
\iff\ & \exists n \in \mathbb{N} :\ y \in TB_X(0,n\varepsilon) \\
\iff\ & \exists n \in \mathbb{N}\ \exists x \in B_X(0,n\varepsilon) :\ y = Tx \\
\iff\ & \exists x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_X(0,n\varepsilon) :\ y = Tx \\
\iff\ & y \in T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_X(0,n\varepsilon)\right)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
y \in cB_Y(y_0,\delta_1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\| \frac{y}{c} - y_0 \right\| < \delta_1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \| y - cy_0 \| < \delta_1 c \\
&\Longleftrightarrow \quad y \in B(cy_0, \delta_1 c)
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
& y \in \overline{TB_X(0,cn\varepsilon)} \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (y_n)_n :\ y_n \in TB_X(0,cn\varepsilon) \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (x_n)_n :\ x_n \in B_X(0,cn\varepsilon) \text{ und } \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (x_n)_n : \| x_n \| < cn\varepsilon \text{ und } \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (x_n)_n : \ \left\| \frac{x_n}{c} \right\| < cn\varepsilon \text{ und } \lim_{n\to\infty} T\frac{x_n}{c} = \frac{y}{c} \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (x_n)_n : \| x_n \| < n\varepsilon \text{ und } \lim_{n\to\infty} Tx_n = \frac{y}{c} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{y}{c} \in \overline{TB_X(0,n\varepsilon)} \\
\Longleftrightarrow \quad & y \in c\overline{TB_X(0,n\varepsilon)}
\end{aligned}$$

f) Wegen

$$\begin{aligned}
x \in B(0,\varepsilon) \quad &\Longleftrightarrow \quad \| x \| = \left\| \frac{x}{2} - \frac{-x}{2} \right\| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\| \frac{\pm x}{2} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\pm x}{2} \in B\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned}$$

gilt

$$B_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) - B_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) = B_X(0,\varepsilon)$$

und somit

$$\begin{aligned}
& y \in \overline{TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) - TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)} \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (y_n)_n :\ y_n \in TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) - TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (x_n)_n, (x_n')_n :\ y_n = Tx_n - Tx_n' = T(x_n - x_n') \\
& \text{ und } x_n, x_n' \in B_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (x_n)_n :\ y_n = Tx_n \text{ und } x_n \in B_X(0,\varepsilon) \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y \\
\Longleftrightarrow \quad & y \in \overline{TB_X(0,\varepsilon)}
\end{aligned}$$

g)

$$
\begin{array}{rl}
& y \in Tx + TB_X(0, 2\varepsilon) \\
\iff & \exists x_1 \in B_X(0, 2\varepsilon) : \; y = Tx + Tx_1 \\
\iff & \exists x_1 \in B_X(0, 2\varepsilon) : \; y = T(x + x_1) \\
\iff & y \in T(x + B_X(0, 2\varepsilon))
\end{array}
$$

■

37. Vollständige Abstandsräume

Satz 37.1 *Sei X ein* ***vollständiger*** *Abstandsraum. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
& X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \text{ und } M_n \text{ alle abgeschlossen} \\
\Rightarrow \quad & \exists x \in X \ \exists \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \ B(x,\varepsilon) \subset M_n
\end{aligned}
$$

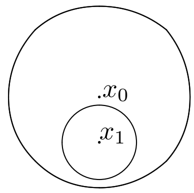


Abbildung 9: Beweisidee

Beweis. Annahme nicht. Da M_n^C offen ist, gilt

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \ \underbrace{B(x,\varepsilon) \cap M_n^C}_{\text{offen}} \neq \emptyset$$

Seien $x_0 \in X, \varepsilon_0 > 0$ beliebig.

$$
\begin{aligned}
& \emptyset \neq B(x_0,\varepsilon_0) \cap M_0^C \text{ ist offen} \\
\Rightarrow \quad & \exists x_1 \in X \ \exists 0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2^1} : \ B(x_1, 2\varepsilon_1) \subset B(x_0,\varepsilon_0) \cap M_0^C
\end{aligned}
$$

$n-1 \to n$:

$$
\begin{aligned}
& \emptyset \neq B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \cap M_{n-1}^C \text{ ist offen} \\
\Rightarrow \quad & \exists x_n \in X \ \exists 0 < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_0}{2^n} \ : B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \cap M_{n-1}^C
\end{aligned}
$$

Betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen

$$B(x_{n+1},\varepsilon_{n+1}) \subset B(x_n,\varepsilon_n)$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\forall m \geq n : x_m &\in B(x_n,\varepsilon_n) \\
\forall m \geq n : d(x_m,x_n) &< \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_0}{2^n}
\end{aligned}
$$

Damit ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.
Da X vollständig ist, hat sie einen Grenzwert x. Aus

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) \\ &\leq \varepsilon_n \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: \; x &\in B\left(x_n, 2\varepsilon_n\right) \subset M_{n-1}^C \\ \forall n \in \mathbb{N}: \; x &\notin M_{n-1} \\ x &\notin \bigcup_n M_n \\ x &\notin X \end{aligned}$$

ein Widerspruch. ■

Satz 37.2 *Die Vollständigkeit ist entscheidend.*

Beweis. Betrachte $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Es gilt

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{m}{n}\right\}$$

aber die abgeschlossene Menge $\left\{\frac{m}{n}\right\} \neq \emptyset$ enthält kein $B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$. ■

Satz 37.3 *Sei X* ***vollständiger*** *Abstandsraum und für $F \subset C(X, \mathbb{R})$ gelte*

$$\forall x \in X \; \exists K_x \geq 0 \; : \sup_{f\in F} f(x) \leq K_x$$

Dann gilt

$$\exists B(x_0, R) \; \exists C \geq 0 \; \forall x \in B(x_0, R) \; : \sup_{f\in F} f(x) \leq C$$

Beweis. Die Menge

$$\begin{aligned} A_n &= \left\{ x \in X : \sup_{f\in F} f(x) \leq n \right\} \\ &= \bigcap_{f\in F} \underbrace{f^{-1}((-\infty, n])}_{\text{abgeschlossen, da f stetig}} \end{aligned}$$

ist als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Wegen

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((-\infty, n]) = X$$

gilt

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{f\in F} f^{-1}((-\infty,n]) \\
&= \bigcap_{f\in F} X \\
&= X
\end{aligned}$$

und mit dem letzten Satz

$$\begin{aligned}
&\exists x_0 \in X\ \exists R > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ B(x_0,R) \subset A_n = \left\{ x \in X : \sup_{f\in F} f(x) \le n \right\} \\
\Rightarrow\quad &\exists B(x_0,R)\ \exists n \ge 0\ \forall x \in B(x_0,R)\ :\sup_{f\in F} f(x) \le n
\end{aligned}$$

Mit $C = n$ folgt die Behauptung. ■

Satz 37.4 *Sei X* ***vollständiger*** *Längenraum, Y Längenraum. Sei F eine Menge linearer stetiger Abbildungen $T : X \to Y$ mit*

$$\forall x \in X\ \exists K_x \ge 0 :\ \sup_{T\in F} \| Tx \| \le K_x$$

Dann gilt

$$\exists C \ge 0 :\ \sup_{T\in F} \| T \| \le C$$

Beweis. Da

$$f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \| Tx \|$$

stetig ist, gilt mit dem letzten Satz

$$\exists B(x_0,R)\ \exists K \ge 0\ \forall x \in B(x_0,R) :\ \sup_{T\in F} \| Tx \| \le K$$

Für $\| x \| = 1$ und $\frac{4}{R}K = C$ folgt

$$\begin{aligned}
\| Tx \| &= \frac{2}{R}\left\| T\left(\frac{R}{2}x + x_0 - x_0\right)\right\| \\
&\le \frac{2}{R}\left\| T\left(\underbrace{\frac{R}{2}x + x_0}_{\in B(x_0,R)}\right)\right\| + \frac{2}{R}\left\| T\ \underbrace{x_0}_{\in B(x_0,R)}\right\| \\
&\le \frac{4}{R}K < \infty
\end{aligned}$$

■

Satz 37.5 *Sei X ein Längenraum und $M \subset X$. Dann gilt*

$$M \text{ ist beschränkt} \iff \forall f \in X' \ \exists K_f \geq 0 : \sup_{m \in M} f(m) \leq K_f$$

Beweis. "$\Leftarrow$": Für

$$\begin{aligned} i(x) &: X' \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x) \\ i &: M \subset X \to X'', x \mapsto i(x) \end{aligned}$$

gilt nach Voraussetzung

$$\forall f \in X' \ \exists K_f \geq 0 \ : \sup_{i(m) \in i(M) \subset X''} \underbrace{i(m)(f)}_{=f(m)} \leq K_f$$

Da **X' vollständiger** Längenraum ist, folgt

$$\exists C \geq 0 : \sup_{i(m) \in i(M)} \| i(m) \| \leq C$$

Da i längenerhaltend ist, gilt

$$\exists C \geq 0 : \sup_{m \in M} \| m \| \leq C$$

"$\Rightarrow$": Sei M beschränkt, d.h.

$$\exists C \geq 0 : \sup_{m \in M} \| m \| \leq C$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall f \in X' : \ |f(m)| &\leq \| f \| \| m \| \leq C \cdot \| f \| \\ \forall f \in X' \ \exists K_f = C \| f \| \geq 0 \ &: \sup_{m \in M} f(m) \leq K_f \end{aligned}$$

■

Teste die Beschränktheit von Mengen in einem Längenraum durch lineare stetige $f : X \to \mathbb{K}$. Ist eine Menge in alle Richtungen beschränkt, dann ist sie insgesamt beschränkt. Das ist erstaunlich, denn in jede Richtung könnte es durch [-n,n] beschränkt sein und es gäbe keine gemeinsame Schranke. Wir haben aber gezeigt, es existiert eine gemeinsame Schranke.

Satz 37.6 *Sei X* ***vollständiger*** *Längenraum, Y Längenraum und $T_n : X \to Y$ linear und stetig, sodaß*

$$\forall x \in X : \ (T_n(x))_n \text{ hat einen Grenzwert}$$

Setze

$$\forall x \in X : \ Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x$$

Dann ist T linear und stetig.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} T(ax+y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(ax+y) \\ &= a\lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y \\ &= aTx + Ty \end{aligned}$$

ist T linear. Da der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existiert und die Länge $\|\cdot\|$ stetig ist, existiert

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n x \|$$

und die Folge $(\| T_n x \|)_n$ ist beschränkt durch ein $K_x > 0$.

$$\forall x \in X\ \exists K_x > 0 : \sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n x \| \leq K_x$$

Da **X vollständig** ist, folgt

$$\exists C \geq 0 : \sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n \| \leq C$$

d.h.

$$\begin{aligned} \forall x \in X : \| Tx \| &= \lim_{n\to\infty} \| T_n x \| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \| T_n \| \| x \| \\ &\leq C \| x \| \end{aligned}$$

und T ist stetig. ■

Satz 37.7 *Seien* ***X, Y vollständige*** *Längenräume und $T : X \to Y$ stetig und linear. Dann gilt:*

$$T \text{ ist auf } \Rightarrow T \text{ bildet offene Mengen auf offene Mengen ab}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
1.) Multipliziert man mit einem großen $n \in \mathbb{N}$, so erreicht man alles

$$\begin{aligned} & \forall x \in X\ \exists n \in \mathbb{N} : \| x \| < n\varepsilon \\ \Rightarrow\ & \forall x \in X\ \exists n \in \mathbb{N} : x \in B_X(0, n\varepsilon) \\ \Rightarrow\ & X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_X(0, n\varepsilon) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} TB_X(0,n\varepsilon) &= T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_X(0,n\varepsilon)\right)\\
&= TX\\
&\overset{T \text{ ist auf}}{=} Y\\
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\overline{TB_X(0,n\varepsilon)}}_{\text{abgeschlossen}} &= Y
\end{aligned}$$

Da Y vollständig ist, gilt mit $\delta = \frac{\delta_1}{2n}$ und $y_0 = \frac{y_1}{2n}$

$$\begin{aligned}
& \exists y_1 \in Y\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \delta_1 > 0 :\ B_Y(y_1,\delta_1) \subset \overline{TB_X(0,n\varepsilon)}\\
\Rightarrow\ & \exists y_1 \in Y\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \delta_1 > 0 :\ B_Y\left(\frac{y_1}{2n},\frac{\delta_1}{2n}\right) \subset \overline{TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)}\\
\Rightarrow\ & \exists y_0 \in Y\ \exists \delta > 0 :\ B_Y(y_0,\delta) \subset \overline{TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
& \left(\parallel z \parallel < \delta \Rightarrow z = \underbrace{z+y_0}_{\in B_Y(y_0,\delta)} - \underbrace{y_0}_{\in B_Y(y_0,\delta)}\right)\\
\Rightarrow\ & \left(B_Y\left(0,\delta\right) \subset B_Y\left(y_0,\delta\right) - B_Y\left(y_0,\delta\right)\right)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & \lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y\\
\Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
0 &\in B_Y\left(0,\delta\right)\\
&\subset B_Y\left(y_0,\delta\right) - B_Y\left(y_0,\delta\right)\\
&\subset \overline{TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)} - \overline{TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)}\\
&\overset{(*)}{\subset} \overline{TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right) - TB_X\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)}\\
&\overset{\text{früher}}{=} \overline{TB_X\left(0,\varepsilon\right)}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
& \exists \delta > 0: \ B_Y(0,\delta) \subset \overline{TB_X(0,\varepsilon)} \\
\Rightarrow \quad & \exists \delta > 0: \ \frac{1}{2^i} B_Y(0,\delta) \subset \frac{1}{2^i}\overline{TB_X(0,\varepsilon)} \\
\Rightarrow \quad & \exists \delta > 0: \ B_Y\left(0, \frac{\delta}{2^i}\right) \subset \overline{TB_X\left(0, \frac{\varepsilon}{2^i}\right)}
\end{aligned}$$

2.) Sei $y \in B_Y(0,\delta) \subset \overline{TB_X(0,\varepsilon)}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& y \in \overline{TB_X(0,\varepsilon)} \\
\Rightarrow \quad & \exists z_1 \in B_X(0,\varepsilon): \left\{ \begin{array}{l} y = Tz_1 + a_1 \\ a_1 \in B_Y(0, \frac{\delta}{2^1}) \subset \overline{TB_X(0, \frac{\varepsilon}{2^1})} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& a_1 \in \overline{TB_X\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \\
\Rightarrow \quad & \exists z_2 \in B_X\left(0, \frac{\varepsilon}{2^1}\right): \left\{ \begin{array}{l} y = Tz_1 + Tz_2 + a_2 \\ a_2 \in B_Y(0, \frac{\delta}{2^2}) \subset \overline{TB_X(0, \frac{\varepsilon}{2^2})} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$n-1 \to n$:

$$\begin{aligned}
& a_{n-1} \in \overline{TB_X\left(0, \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}\right)} \\
\Rightarrow \quad & \exists z_n \in B_X\left(0, \frac{\varepsilon}{2^{-(n-1)}}\right): \left\{ \begin{array}{l} y = \sum_{i=1}^n Tz_i + a_n \\ a_n \in B_Y(0, \frac{\delta}{2^n}) \subset \overline{TB_X(0, \frac{\varepsilon}{2^n})} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| z_i \| < \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2\varepsilon$$

und **da X vollständig ist**, ist

$$z := \sum_{i=1}^{\infty} z_i \in B_X(0, 2\varepsilon)$$

definiert. Wegen

$$\begin{aligned}
Tz \ & \stackrel{T \text{ stetig}}{=} \ \lim_{n\to\infty} T \sum_{i=1}^n z_i \\
& = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n Tz_i \\
& = \ \lim_{n\to\infty} (y - a_n) \\
& = \ y - \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=0} = y
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} \forall y \in B_Y(0,\delta)\ \exists z \in B_x(0,2\varepsilon):\ y = Tz & \in & TB_X(0,2\varepsilon) \\ B_Y(0,\delta) & \subset & TB_X(0,2\varepsilon) \end{array}$$

3.) Sei U offen und $x \in U$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0:\ x + B_X(0,2\varepsilon) \subset U \\ \exists \delta > 0:\ B_Y(0,\delta) \subset TB_X(0,2\varepsilon) \end{array}$$

und somit

$$\begin{array}{rcl} Tx + B_Y(0,\delta) & \subset & Tx + TB_X(0,2\varepsilon) \\ & \overset{T \text{ linear}}{=} & T(x + B_X(0,2\varepsilon)) \\ & \subset & TU \end{array}$$

Wegen

$$\forall Tx \in TU\ \exists \delta > 0:\ Tx + B(0,\delta) \subset TU$$

ist TU offen. ∎

Satz 37.8 *Seien X, Y* ***vollständige*** *Längenräume und $T : X \to Y$ stetig und linear. Ist T umkehrbar, so ist T^{-1} stetig.*

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} T \text{ ist auf} & \Rightarrow & T \text{ ist offen} \\ & \overset{\text{Def}}{\iff} & \forall U \text{ offen: } T(U) \text{ ist offen} \\ & \overset{\text{stetig}}{\iff} & T^{-1} \text{ ist stetig} \end{array}$$

∎

38. Der Vektorraum X/F

Satz 38.1 *Sei X ein Vektorraum, $F \subset X$ ein Untervektorraum und*

$$\begin{aligned} x+F &= \{x+f \mid f \in F\} \\ X/F &= \{x+F \mid x \in X\} \end{aligned}$$

mit

$$x+F = y+F \iff x-y \in F$$

X/F ist ein Vektorraum durch

$$\begin{aligned} a(x+F) &= ax+F \\ (x_1+F)+(x_2+F) &= (x_1+x_2)+F \end{aligned}$$

Beweis. Da X ein Vektorraum ist, gilt

$$ax, x_1+x_2 \in X$$

und die linke und rechte Seite sind definiert. Seien $x_2 = x_1 + f_1, y_2 = y_1 + f_2$. Wegen

$$\begin{aligned} (x_1+F)+(y_1+F) &\overset{Def}{=} (x_1+y_1)+F \\ &\overset{Def}{=} x_2 - f + y_2 - f' + F \\ &\overset{F \text{ Vektorraum}}{=} x_2 + y_2 + F \\ &\overset{Def}{=} (x_2+F)+(y_2+F) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a(x_1+F) &\overset{Def}{=} (ax_1+F) = ax_2 - af + F \\ &\overset{F \text{ Vektorraum}}{=} ax_2 + F \\ &\overset{Def}{=} a(x_2+F) \end{aligned}$$

ist die Definition unabhängig vom Vertreter. ■

Satz 38.2 *Sei X ein Längenraum. Dann ist*

$$\begin{aligned} \| x+F \|_{X/F} &= \inf\{\| z+x \|_X \ : \ z \in F\} \\ &= \inf\{\| z \|_X \ : \ z-x \in F\} \end{aligned}$$

eine Halblänge auf X/F und es gilt

$$\| \cdot \| \ \textit{ist eine Länge auf } X/F \iff F = \overline{F}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\| x+F \|_{X/F} &= \inf\{\| z+x \|_X : z \in F\} \\
&= \inf\{\| z-x+x \|_X : z-x \in F\} \\
&= \inf\{\| z \|_X : z-x \in F\}
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
\| x+F \|_{X/F} &= \inf\{\underbrace{\| z+x \|}_{\geq 0} : z \in F\} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

b) Sei $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\| a(x+F) \| &\overset{\text{Def}}{=} \| ax+F \| \\
&\overset{\text{Def}}{=} \inf_{z\in X}\{\| z \| : z-ax \in F\} \\
&\overset{X \text{ Vektorraum}, a\neq 0}{=} \inf_{az\in X}\{\| az \| : az-ax \in F\} \\
&\overset{F \text{ Vektorraum}}{=} \inf_{az\in X}\{\| az \| : z-x \in F\} \\
&\overset{X \text{ Vektorraum}, \ a\neq 0}{=} \inf_{z\in X}\{|a| \| z \| : z-x \in F\} \\
&\overset{\text{Def}}{=} |a| \cdot \| x+F \|
\end{aligned}$$

Sei $a = 0$.

$$\| 0(x+F) \| = \| 0+F \| = 0 = 0 \| x+F \|$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen

$$\| x+F \|_{X/F} = \inf\{\| x+z \|_X : z \in F\}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\exists w_1 \in F : \| x+F \| &\leq \| x+w_1 \| + \frac{\varepsilon}{2} \\
\exists w_2 \in F : \| y+F \| &\leq \| y+w_2 \| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\| (x+y)+F \|_{X/F} &= \inf\{\| x+y+z \|_X : z \in F\} \\
&\leq \left\| x+y+\underbrace{w_1+w_2}_{\in F, \text{ da Untervektorraum}} \right\|_X \\
&\leq \| x+w_1 \|_X + \| y+w_2 \|_X \\
&\leq \| x+F \|_{X/F} + \| y+F \|_{X/F} + \varepsilon
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt

$$\| (x+y) + F \|_{X/F} \leq \| x + F \|_{X/F} + \| y + F \|_{X/F}$$

d) Wegen

$$\begin{aligned} \| x + F \|_{X/F} = 0 &\iff \inf\{\| x + z \|_X : \ z \in F\} = 0 \\ &\iff \exists (w_n)_n \text{ in F } : \lim_{n\to\infty} \| x + w_n \| = 0 \\ &\overset{\text{Def}}{\iff} \exists (w_n)_n \text{ in F } : \lim_{n\to\infty} w_n = x \\ &\iff x \in \overline{F} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & \| \cdot \| \ \text{ ist eine Länge auf } X/F \\ \overset{Def}{\iff} & \big(\| x + F \|_{X/F} = 0 \Rightarrow x + F = 0 + F\big) \\ \iff & (x \in \overline{F} \Rightarrow x \in F) \\ \iff & F = \overline{F} \end{aligned}$$

■

Satz 38.3 *Sei X ein Längenraum und F ein abgeschlossener Untervektorraum. a)*

$$p : X \to X/F, x \mapsto x + F$$

ist linear, stetig mit $\| p \| \leq 1$ und bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.
b) Ist X ***vollständig****, so ist auch X/F vollständig.*

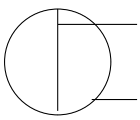


Abbildung 10: $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Beweis. a) Wegen

$$\begin{aligned} p(ax + y) &= ax + y + F \\ &= a(x + F) + (y + F) \\ &= ap(x) + p(y) \end{aligned}$$

ist p linear.
b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\forall x \in X : \| p(x) \| &= \| x+F \|_{X/F} \\
&\stackrel{Def}{=} \inf\{\| z+x \|_X \,| z \in F\} \\
&\stackrel{z=0}{\leq} \| x \|_X \\
\| p \| &\leq 1
\end{aligned}$$

und p ist stetig.
c) $B_X(x,\varepsilon), B_{X/F}(x+F,\varepsilon)$ sind offen. Wegen

$$\begin{aligned}
z+F \in B(x+F,\varepsilon) &\iff \| z-x+F \|_{X/F} < \varepsilon \\
&\stackrel{Def}{\iff} \inf\{\| z-x+f \|_X \ \mid f \in F\} < \varepsilon \\
&\iff \exists f \in F : \| z-x+f \|_X < \varepsilon \\
&\iff \exists f \in F : \ z+f \in B(x,\varepsilon) \\
&\iff z+F \in B(x,\varepsilon)+F
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
p\left(B(x,\varepsilon)\right) &= B(x,\varepsilon)+F \\
&= B(x+F,\varepsilon)
\end{aligned}$$

Damit ist p offen.
d) Sei $(x_n+F)_n$ eine Cauchyfolge in X/F.
Wähle eine Teilfolge $(x_{n_k}+F)_k$ mit

$$\begin{aligned}
& \left\|(x_{n_j}+F)-(x_{n_{j-1}}+F)\right\|_{X/F} \\
= \ & \inf\{\| x_{n_j}-x_{n_{j-1}}+z \|_X : \ z \in F\} \\
< \ & \frac{1}{2^{j+1}}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\exists w_j \in F : \ \left\|x_{n_j}-x_{n_{j-1}}+w_j\right\|_X < \frac{1}{2^j}$$

Mit

$$x_{n_k}+F = (x_{n_0}+F)+\sum_{j=1}^{k}\big((x_{n_j}+F)-(x_{n_{j-1}}+F)\big)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}: \qquad & \left\| x_{n_0} + \sum_{j=1}^{k} \left(x_{n_j} - x_{n_{j-1}} + w_j \right) \right\|_X \\
\leq\ & \| x_{n_0} \|_X + \sum_{j=1}^{k} \left\| x_{n_j} - x_{n_{j-1}} + w_j \right\| \\
<\ & \| x_{n_0} \|_X + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
=\ & \| x_{n_0} \|_X + 1.
\end{aligned}$$

und

$$\| x_{n_0} \|_X + \sum_{j=1}^{\infty} \left\| x_{n_j} - x_{n_{j-1}} + w_j \right\|$$

hat einen Grenzwert im **vollständigen X** und somit hat

$$z = x_{n_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(x_{n_j} - x_{n_{j-1}} + w_j \right)$$

einen Grenzwert.
Da p stetig ist, gilt:

$$\begin{aligned}
x_{n_k} + F \ & \overset{w_j \in F}{=} \ x_{n_0} + \sum_{j=1}^{k} \left(x_{n_j} - x_{n_{j-1}} + w_j \right) + F \\
\lim_{k \to \infty} x_{n_k} + F \ & = \ z + F
\end{aligned}$$

Da eine Teilfolge der Cauchyfolge einen Grenzwert hat, hat die Cauchyfolge diesen Grenzwert.
Da die Cauchyfolge beliebig gewählt war, ist X/F vollständig. ■

Beispiel 38.4 *Sei* $X = \mathbb{R}^2$ *und* $\dim F = 1$.
$\mathbb{R}^2/F$ *sind die Parallelen zu* F *und* $\| x + F \|_{X/F}$ *ist der kürzeste Abstand zum Nullpunkt, siehe Abbildung.*

Satz 38.5 *Seien* X, Y *vollständige Längenräume* $T : X \to Y$ *stetig, linear und auf. Dann ist*

$$S : X/Null(T) \to Y, x + Null\ T \mapsto Tx$$

umkehrbar und S, S^{-1} *sind linear und stetig, aber nicht notwendig längenerhaltend.*

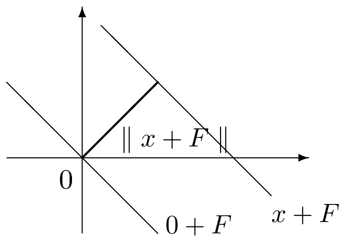


Abbildung 11: $x+F$ in $\mathbb{R}^2/F$

Beweis. Da Null T abgeschlossen ist, ist $X/Null(T)$ ein vollständiger Längenraum. Definiere

$$S : X/Null(T) \to Y, x + Null(T) \mapsto Tx$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr] & & Y \\ & \text{X/Null T} \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

1.) Wegen

$$\begin{aligned} x + Null(T) = y + Null(T) &\Rightarrow x - y \in Null(T) \\ &\Rightarrow T(x-y) = 0 \\ &\Rightarrow Tx = Ty \\ &\Rightarrow S(x + Null(T)) = S(y + Null(T)) \end{aligned}$$

ist S unabhängig vom Vertreter.
2.) Wegen

$$\begin{aligned} S(ax + Null(T) + y + Null(T)) &= T(ax+y) \\ &= aTx + Ty \\ &= aS(x + Null(T)) + S(y + Null(T)) \end{aligned}$$

ist S linear.
3.) Da T auf ist, ist S auf.

4.) Wegen

$$\begin{aligned} S(x+Null(T))+S(y+Null(T)) &\Rightarrow Tx=Ty \\ &\Rightarrow T(x-y)=0 \\ &\Rightarrow x-y\in Null(T) \\ &\Rightarrow x+Null(T)=y+Null(T) \end{aligned}$$

ist S eins zu eins.
5.) Wegen

$$\begin{aligned} \forall z\in Null(T): \quad & \parallel S(x+Null(T))\parallel_Y \\ = & \parallel S(x+z+Null(T))\parallel_Y \\ = & \parallel T(x+z)\parallel_Y \\ \leq & \parallel T\parallel\parallel x+z\parallel_X \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \parallel S(x+Null(T))\parallel_Y &\leq \parallel T\parallel \inf\{\parallel x+z\parallel_X : \ z\in Null(T)\} \\ &= \parallel T\parallel\cdot\parallel x+Null(T)\parallel_{X/Null(T)} \end{aligned}$$

Damit ist S stetig.
Da $X/Null(T)$ und Y vollständig sind, ist S^{-1} stetig. ■

39. Topologische Vektorräume

Man möchte stetige Abbildungen zwischen Vektorräumen betrachten. Dafür benötigt man eine Topologie. Insbesondere sollen Addition und Skalarmultiplikation stetig sein bzgl. der Produkttopologie. Ab jetzt gilt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Meist ist $\mathbb{C}$ nötig.

Definition 39.1 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und topologischer Raum.*
X heißt ***topologischer Vektorraum*** $\Longleftrightarrow$

$$+ : X \times X \to X, (x, y) \mapsto x + y$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X, (a, x) \mapsto ax$$

sind stetig für die Produkttopologie auf $X \times X$ bzw. $\mathbb{K} \times X$.

Satz 39.2 *Sei X ein topologischer Vektorraum, $V \subset X$ ein Untervektorraum. Dann ist $\overline{V}$ ein Untervektorraum.*

Beweis. Seien $x, y \in \overline{V}$ beliebig.
Dann gibt es Netze in V mit $x_i \to x, y_i \to y$.
Da V ein Vektorraum ist, ist $(x_i + y_i)_i$ ein Netz in V und wegen

$$x_i \to x, y_i \to y \overset{X \text{ top. Vektorraum}}{\Rightarrow} \underbrace{x_i + y_i}_{\in V} \to x + y$$

gilt

$$x + y \in \overline{V}$$

Da V ein Vektorraum ist, ist ax_i ein Netz in V und wegen

$$a \to a, x_i \to x \overset{X \text{ top. Vektorraum}}{\Rightarrow} \underbrace{ax_i}_{\in V} \to ax$$

gilt

$$ax \in \overline{V}$$

■

Satz 39.3 $\forall z \in X$ *ist*

$$T_z : X \to X, x \mapsto x + z$$

umkehrbar und T_z, T_z^{-1} sind stetig.
Ein topologischer Vektorraum sieht also in jedem Punkt gleich aus.

Beweis. Gelte $x_i \to x$. Wegen

$$T(x_i) = x_i + z \overset{X \text{ top. Vektorraum}}{\longrightarrow} x + z = T(x)$$

sind $T_z^{-1} = T_{-z}$ und T_z stetig. ■

Satz 39.4 *Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen. Dann gilt*

$$T \textit{ ist stetig} \iff \exists z \in X: \; T \textit{ ist stetig in } z$$

Beweis. $'' \Rightarrow''$ Da T stetig ist, ist es in z stetig.
$'' \Leftarrow''$ Sei $x \in X$ beliebig und $x_i \to x$. Wegen

$$x_i - x + z \overset{X \text{ top. Vektorraum}}{\longrightarrow} x - x + z = z$$

und da T stetig in z ist, gilt

$$\begin{aligned} Tx_i &= Tx_i - Tx + Tz + Tx - Tz \\ &\overset{T \text{ linear}}{=} T(x_i - x + z) + Tx - Tz \\ &\overset{Y \text{ top. Vektorraum}}{\longrightarrow} Tz + Tx - Tz \\ &= Tx \end{aligned}$$

Da $x \in X$ beliebig war, ist T stetig. ■

Satz 39.5 *Sei X Längenraum. Mit*

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

ist es ein topologischer Vektorraum.

Beweis. Seien $x_n \to x, y_n \to y$. Wegen

$$\begin{aligned} \| x_n + y_n - x - y \| &\leq \| x_n - x \| + \| y_n - y \| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

gilt

$$x_n + y_n \to x + y$$

Sei $a_n \to a, x_n \to x$. Mit

$$\begin{aligned} \| a_n x_n - a_n x + a_n x - ax \| &\leq |a_n| \| x_n - x \| + |a_n - a| \| x \| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

gilt

$$a_n \cdot x_n \to a \cdot x$$

■

40. Lokalkonvexe Vektorräume

Definition 40.1 *Sei P eine Menge von Halblängen auf dem Vektorraum X.*
Für $\varepsilon > 0$ und $F \subset P, |F| < \infty$ setze

$$\begin{aligned} V_{F,\varepsilon} &= \{x \in X \mid \forall p \in F : p(x) < \varepsilon\} \\ \mathbb{V} &= \{V_{F,\varepsilon} \ : \ F \subset P, |F| < \infty, \varepsilon > 0\} \end{aligned}$$

a) Durch

$$U \subset X \textit{ ist offen} \iff \forall x \in U \ \exists V_{F,\varepsilon} \in \mathbb{V} : \ x + V_{F,\varepsilon} \subset U$$

erhält man eine Topologie auf X. Damit heißt (X, P) lokalkonvexer Vektorraum.
b) Die $x + V_{F,\varepsilon}$ sind eine Umgebungsbasis von x.

Beweis. a) $\emptyset$ ist offen: Für kein $x \in \emptyset$ ist etwas zu zeigen.
X ist offen: Für beliebige $V_{F,\varepsilon}$ gilt

$$x + V_{F,\varepsilon} \subset X$$

Seien U_1, U_2 offen, d.h.

$$\exists V_{F_i,\varepsilon_i} : x + V_{F_i,\varepsilon_i} \subset U_i$$

Wegen

$$\begin{aligned} & V_{F_1 \cup F_2, \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \\ = \ & \{x \in X | \ \forall p \in F_1 \cup F_2 : p(x) < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\} \\ \subset \ & \{x \in X | \ \forall p \in F_1 : p(x) < \varepsilon_1\} \cap \{x \in X | \ \forall p \in F_2 : p(x) < \varepsilon_2\} \\ \subset \ & V_{F_1,\varepsilon_1} \cap V_{F_2,\varepsilon_2} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} x + V_{F_1 \cup F_2, \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} &\subset (x + V_{F_1,\varepsilon_1}) \cap (x + V_{F_2,\varepsilon_2}) \\ &\subset U_1 \cap U_2 \end{aligned}$$

und $U_1 \cap U_2$ ist offen.
Seien $U_i, i \in I$ offen

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} U_i \ &\Rightarrow \ \exists i_0 : \ x \in U_{i_0} \\ &\Rightarrow \ \exists V_{F,\varepsilon} \in \mathbb{V} : x + V_{F,\varepsilon} \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i \end{aligned}$$

und $\bigcup_{i\in I} U_i$ ist offen.
b) $x + V_{F,\varepsilon}$ ist offen nach Definition und wegen

$$\forall \text{ offenen } U(x) \; \exists \text{ offenes } x + V_{F,\varepsilon} : x + V_{F,\varepsilon} \subset U$$

ist $x + V_{F,\varepsilon}$ Umgebungsbasis. ■

Satz 40.2

$$x_i \to 0 \iff \forall p \in P: \; p(x_i) \to 0$$

Beweis.

$$\begin{array}{cl} & \forall p \in P : p(x_i) \to 0 \\ \overset{Def}{\iff} & \forall p \in P \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists i_0 \; \forall i \geq i_0 : \; p(x_i) < \varepsilon \\ \overset{i_0 \geq \max_{j\in F} i_{0,j}}{\iff} & \forall V_{F,\varepsilon} \in \mathbb{V} \; \exists i_0 \; \forall i \geq i_0 : \; x_i \in V_{F,\varepsilon} \\ \overset{Def}{\iff} & (x_i)_i \to 0 \end{array}$$

■

Definition 40.3

$$x_i \to x \iff x_i - x \to 0$$

Satz 40.4 *Ein lokalkonvexer Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum.*

Beweis. a)

$$\begin{array}{cl} & x_i \to x \text{ und } y_i \to y \\ \overset{Def}{\iff} & \forall p \in P: \; p(x - x_i) \to 0 \text{ und } p(y - y_i) \to 0 \\ \Rightarrow & \forall p \in P: \; p(x + y - x_i - y_i) \overset{\text{Halblänge}}{\leq} p(x - x_i) + p(y - y_i) \to 0 \\ \Rightarrow & x_i + y_i \to x + y \end{array}$$

b) Seien $a_n \to a$ und $x_i \to x$. Dann ist $(a_n)_n$ durch ein $C > 0$ beschränkt und es gilt

$$\begin{array}{rcl} p(a_n x_i - ax) & = & p(a_n x_i - a_n x + a_n x - ax) \\ & \leq & \underbrace{|a_n|}_{\leq C} \underbrace{p(x_i - x)}_{\to 0} + |a_n - a| \cdot p(x) \\ & \to & 0 \end{array}$$

■

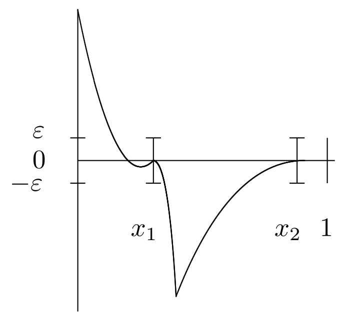


Abbildung 12: Zwei Halblängen

Beispiel 40.5 *Seien $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit $x_1 \neq x_2$. Auf dem Vektorraum der $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ erhält man zwei Halblängen durch*

$$p_j : \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\} \to [0,\infty), f \mapsto |f(x_j)|$$

Diese erzwingen, daß $(f_i)_i$ in den beiden Punkten einen Grenzwert hat. Auf das Verhalten in allen anderen Punkten, haben die zwei Halblängen keinen Einfluß. D.h. eine Familie von Halblängen kann verschiedene Funktionen evtl. nicht unterscheiden. Nimmt man aber für alle Punkte $x \in [0,1]$ die Halblänge hinzu, so erhält man den punktweisen Grenzwert.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} p_j(f) &= |f(x_j)| \geq 0 \\ p_j(f_1 + f_2) &= |(f_1 + f_2)(x_j)| \leq |f_1(x_j)| + |f_2(x_j)| \\ p_j(af) &= |(af)(x_j)| = |a||f(x_j)| \end{aligned}$$

ist p_j eine Halblänge. ■

Satz 40.6 *Sei (X,P) ein lokalkonvexer Vektorraum.*
Für eine Halblänge q auf X sind gleichwertig
a) q ist stetig
b) q ist stetig in 0
c) $\exists p_1, \ldots, p_n \in P\ \exists C > 0\ \forall x \in X :\ q(x) \leq C \max_{i=1}^n p_i(x)$

Beweis. a) ⇒ b): Da q stetig ist, ist es stetig in 0.
b) ⇒ c): Da q stetig in 0 ist, gilt

$$\exists V_{F,\delta} : q\left(V_{F,\delta}\right) \subset B(0,1)$$

d.h.

$$\exists p_1, \ldots, p_n \in P\ \exists \delta > 0\ \forall i = 1, \ldots, n :\ (p_i(x) < \delta \Rightarrow q(x) < 1)$$

1. Fall: Sei $x \in X$ und ein $p_j(x) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\forall x \in X: \ p_i\left(\frac{x\delta/2}{\max_{i=1}^n p_i(x)}\right) &\leq \frac{p_i(x)}{\max_{i=1}^n p_i(x)}\frac{\delta}{2} < \delta \\
\forall x \in X: \ q\left(\frac{x\delta/2}{\max_{i=1}^n p_i(x)}\right) &< 1 \\
q(x) &\leq \frac{2}{\delta}\max_{i=1}^n p_i(x)
\end{aligned}$$

Setze

$$C := \frac{2}{\delta}$$

2. Fall: Sei $C > 0$ beliebig.

$$\begin{aligned}
& \forall i = 1, \dots, n : p_i(x) = 0 \\
\overset{Halbnorm}{\Rightarrow} \quad & \forall a \in [0, \infty) \ \forall i = 1, \dots, n : \ p_i(ax) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \forall a \in [0, \infty) : \ q(ax) \leq 1 \\
\Rightarrow \quad & \forall a \in [0, \infty) : \ aq(x) \leq 1 \\
\Rightarrow \quad & q(x) = 0 = C \max_{i=1}^n p_i(x)
\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ b):

$$\begin{aligned}
x_i \to 0 \quad \Rightarrow \quad & \forall j = 1, \dots, n : p_j(x_i) \to 0 \\
\Rightarrow \quad & q(x_i) \leq c \max_{j=1}^n p_j(x_i) \to 0
\end{aligned}$$

d.h. q ist in 0 stetig.

b) $\Rightarrow$ a):

$$\begin{aligned}
x_i \to x \quad \Longleftrightarrow \quad & x_i - x \to 0 \\
\Rightarrow \quad & |q(x) - q(x_i)| \leq |q(\underbrace{x - x_i}_{\to 0})| \overset{\text{q in 0 stetig}}{\to} 0 \\
\Rightarrow \quad & q(x_i) \to q(x)
\end{aligned}$$

■

Satz 40.7 *a) Jede der definierenden Halblängen eines lokalkonvexen Vektorraumes ist stetig.*
b) Jede stetige Halblänge q kann zu P hinzugenommen werden, ohne die Topologie zu verändern.
c) $\max_{j=1}^n p_j$ *ist stetig und eine Halblänge.*
Nimmt man diese Halblänge und alle anderen stetigen Halblängen hinzu, so erhält man eine maximale Familie P'. Die Stetigkeit läßt sich dann mit ***einem*** $p' \in P'$ *überprüfen, da* $\max_{i=1}^n p_i \in P'$

Beweis. a)

$$\forall x \in X: \ p(x) \leq p(x)$$

b) Da q stetig ist, gilt

$$q(x - x_i) \leq C \max_{j=1}^{n} p_j(x - x_i)$$

und

$$\forall p \in P \cup \{q\}: \ p(x - x_i) \to 0 \iff \forall p \in P: \ p(x - x_i) \to 0$$

Damit definieren $P \cup \{q\}$ und P dieselben Netze und somit dieselbe Topologie. **c)** Wegen

$$\begin{aligned}
\max_{j=1}^{n} p_j(x) &\geq 0 \\
\max_{j=1}^{n} p_j(bx) &= \max_{j=1}^{n} |b| p_j(x) = |b| \max_{j=1}^{n} p_j(x) \\
\max_{j=1}^{n} p_j(x+y) &\leq \max_{j=1}^{n} (p_j(x) + p_j(y)) \\
&\leq \max_{j=1}^{n} p_j(x) + \max_{j=1}^{n} p_j(y)
\end{aligned}$$

ist es eine Halblänge. Mit $C = 1$ und

$$\max_{j=1}^{n} p_j \leq C \max_{j=1}^{n} p_j$$

ist $\max_{j=1}^{n} p_j$ stetig. ■

Satz 40.8 *Sei $T : V \to W$ linear zwischen lokal-konvexen Vektorräumen (V,P),(W,Q). Dann sind gleichwertig*
a) T ist stetig
b) T ist stetig in 0
c) $\forall q \in Q : q \circ T$ ist stetig
d) $\forall q \in Q \ \exists p_1, \ldots, p_n \in P \ \exists C \geq 0 \ \forall x \in V: \ q \circ T(x) \leq C \max_{i=1}^{n} p_i(x)$

Beweis. a) ⇒ c):

$$\begin{aligned}
x_i \to x &\overset{\text{Vor}}{\Rightarrow} Tx_i \to Tx \\
&\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \forall q \in Q: \ q \circ T(x_i) \to q \circ T(x)
\end{aligned}$$

c) ⇒ a):

$$\begin{aligned}
x_i \to x &\overset{Vor}{\Rightarrow} \forall q \in Q: \ q \circ T(x_i) \to q \circ T(x) \\
&\overset{Def}{\Rightarrow} Tx_i \to Tx
\end{aligned}$$

a) $\Rightarrow$ b): Da T stetig ist, ist es stetig in 0.
b) $\Rightarrow$ a): Da V, W topologische Vektorräume sind, gilt

$$\begin{aligned} x_i \to x &\overset{Def}{\Rightarrow} x_i - x \to 0 \\ &\overset{Vor}{\Rightarrow} T(x_i - x) \to 0 \\ &\overset{\text{linear}}{\Rightarrow} Tx_i - Tx \to 0 \\ &\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} Tx_i \to Tx \end{aligned}$$

c) $\Leftrightarrow$ d): Da T linear ist, gilt

$$\begin{aligned} q \circ T(x) &\geq 0 \\ q \circ T(ax) &= q(aTx) = |a|q(Tx) \\ q(T(x+y)) &= q(Tx + Ty) \leq qTx + qTy \end{aligned}$$

und $q \circ T$ ist eine Halblänge.
Dafür haben wir es schon gezeigt. ■

Satz 40.9 *Sei (X,T) ein lokalkonvexer Vektorraum. Dann sind gleichwertig*
a) Die Topologie trennt die Punkte
b) $\forall x \neq 0 \; \exists p \in P: \; p(x) \neq 0$
c) $\exists \mathbb{V} : \bigcap_{V_{F,\varepsilon} \in \mathbb{V}} = \{0\}$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Sei $x \neq 0$. Da die Topologie die Punkte trennt, gibt es $V_{F_1,\varepsilon_1}, V_{F_2,\varepsilon_2}$ mit

$$V_{F_1,\varepsilon_1} \cap (x + V_{F_2,\varepsilon_2}) = \emptyset$$

Da $x \notin V_{F_1,\varepsilon_1}$ gilt

$$\exists i \in F_1 : p_i(x) > \varepsilon_1 > 0$$

b) $\Rightarrow$ c): Wegen

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0 \; \exists p \in P: \; p(x) &\neq 0 \\ \forall p \in P: \; p(0) &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{F,\varepsilon} V_{F,\varepsilon} &\iff \forall p \in P \; \forall \varepsilon > 0: \; p(x) < \varepsilon \\ &\iff \forall p \in P : p(x) = 0 \\ &\overset{\text{Vor}}{\iff} x = 0 \\ &\Rightarrow \bigcap_{F,\varepsilon} V_{F,\varepsilon} = \{0\} \end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ a): Seien $x \neq y$. Wegen

$$\bigcap_{F,\varepsilon} V_{F,\varepsilon} = \{0\}$$

gilt für $x - y \neq 0$

$$\begin{aligned} \exists V_{F,\varepsilon} :\ x - y &\notin V_{F,\varepsilon} \\ \exists \varepsilon\ \exists p_1 \in F :\ p_1(x-y) &\geq \varepsilon \end{aligned}$$

Annahme:

$$\exists z \in \big(x + V_{F,\varepsilon/3}\big) \cap \big(y + V_{F,\varepsilon/3}\big)$$

Dann gilt für $p \in F$

$$\begin{aligned} p(z-x) &< \frac{\varepsilon}{3} \\ p(z-y) &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

und es folgt für $p_1 \in F$

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq p_1(x-y) \\ &= p_1(x - z - (y-z)) \\ &\leq p_1(x-z) + p_1(y-z) \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon \end{aligned}$$

ein Widerspruch und somit

$$\big(x + V_{F,\varepsilon/3}\big) \cap \big(y + V_{F,\varepsilon/3}\big) = \emptyset$$

■

Definition 40.10 ***a)*** *V ist* ***konvex*** $\Longleftrightarrow$

$$\forall x, y \in V\ \forall t \in [0,1] :\ tx + (1-t)y \in V$$

Für x,y in V ist auch die Verbindungsstrecke in V.
b) *V ist* ***kreisförmig*** $\Longleftrightarrow$

$$\forall x \in V\ \forall a \in \mathbb{K}, |a| \leq 1 \Rightarrow ax \in V$$

c) *V ist* ***absorbierend*** $\Longleftrightarrow$

$$\forall z \in X\ \exists a > 0 :\ z \in aV$$

Man erreicht jeden Punkt durch ein Vielfaches von V.

Satz 40.11 *Sei $0 \in V$ und V konvex. Dann gilt*

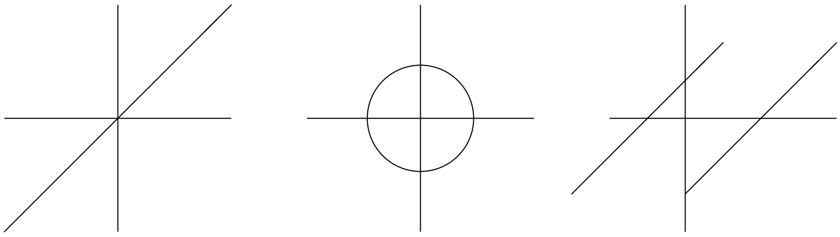
$$\forall 0 < t < 1 : tx \in V$$

Beweis. Da V konvex ist, gilt

$$\forall 0, x \in V \ \forall 0 < t < 1 : \ tx + \underbrace{(1-t)0}_{=0} \in V$$

■

Satz 40.12 *Sei (X, P) ein lokalkonvexer Vektorraum. Dann ist $V_{F,\varepsilon}$ konvex, kreisförmig und absorbierend.*



nicht absorbierend absorbierend absorbierend

Abbildung 13: absorbierende Mengen

Beweis. a) Seien $x, y \in V$ und $t \in [0,1]$ und $p \in F$. Wegen

$$\begin{array}{rcl} p(tx + (1-t)y) & \leq & t\underbrace{p(x)}_{<\varepsilon} + (1-t)\underbrace{p(y)}_{<\varepsilon} \\ & < & t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon \\ tx + (1-t)y & \in & V_{F,\varepsilon} \end{array}$$

ist $V_{F,\varepsilon}$ konvex.
b) Sei $x \in V$ und $a \in \mathbb{K}, |a| \leq 1$ und $p \in F$. Wegen

$$\begin{array}{rcl} \forall p \in F : \ p(ax) & = & |a|p(x) \leq p(x) < \varepsilon \\ ax & \in & V_{F,\varepsilon} \end{array}$$

ist $V_{F,\varepsilon}$ kreisförmig.
c) Sei $x \in X$ beliebig.
1. Fall: $\forall p \in F : \ p(x) = 0$. Dann folgt

$$x \in V_{F,\varepsilon}$$

2. Fall: Ist ein $p_i(x) \neq 0$, so gilt für $F = \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} p_i\left(x \frac{\min_{i=1}^n \varepsilon_i}{2\max_{i=1}^n p_i(x)}\right) &\leq \frac{\min_{i=1}^n \varepsilon_i}{2\max_{i=1}^n p_i(x)} p_i(x) < \varepsilon_i. \\ x \frac{\min_{i=1}^n \varepsilon_i}{2\max_{i=1}^n p_i(x)} &\in V_{F,\varepsilon} \end{aligned}$$

Damit ist $V_{F,\varepsilon}$ absorbierend. ■

Satz 40.13 *Sei $b > a > 0$ und M kreisförmig oder $0 \in M$ und M konvex. Dann gilt*

$$(\exists a > 0 : x \in aM) \Rightarrow (\forall b > a : \; x \in bM)$$

Beweis. Da X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, gilt

$$\begin{aligned} x \in aM \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{a} \in M \\ &\overset{\text{Vor. für M}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\frac{a}{b}}_{<1} \frac{x}{a} \in M \\ &\Rightarrow \quad \frac{x}{b} \in M \\ &\Rightarrow \quad x \in bM \end{aligned}$$

■

Satz 40.14 *1.) Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset X$ **konvex, kreisförmig und absorbierend**. Dann gilt*

$$p_M(x) = \inf\{a > 0 : x \in aM\}$$

eine Halblänge auf X.
*2.) Ist M **absorbierend und konvex und 0$\in$ M**, so ist p_M sublinear.*

Beweis. 1.) a) Da M absorbierend ist, gilt

$$\forall x \in M \; \exists a > 0 : \; x \in aM$$

und somit

$$p_M(x) = \inf\{a > 0 : x \in aM\} < \infty$$

b) Es gilt

$$\forall a \in \mathbb{C} \; \exists c \in \mathbb{C}, |c| = 1 : \; a = c|a|$$

Da M kreisförmig ist, gilt für $|c| = 1$ und $|c^{-1}| = 1$

$$\begin{aligned} x \in M &\Rightarrow c^{-1}x \in M \\ &\Rightarrow x \in cM \\ x \in cM &\Rightarrow c^{-1}x \in M \\ &\Rightarrow x = cc^{-1}x \in M \\ cM &= M \end{aligned}$$

Da X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, gilt

$$\begin{aligned} x \in bM &\iff ax \in abM \\ &\iff ax \in |a|bcM \\ &\overset{cM=M}{\iff} ax \in |a|bM \end{aligned}$$

und somit für $|a| > 0$

$$\begin{aligned} p_M(ax) &\overset{Def}{=} \inf\{b > 0 : ax \in bM\} \\ &\overset{|a|>0}{=} \inf\{|a|b > 0 : ax \in |a|bM\} \\ &= |a| \inf\{b > 0 : ax \in |a|bM\} \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} |a| \inf\{b > 0 : x \in bM\} \\ &\overset{|a|>0}{=} |a| \inf\{b > 0 : x \in bM\} \\ &\overset{Def}{=} |a| p_M(x) \end{aligned}$$

Für $a = 0$ gilt

$$p_M(ax) = p_M(0) = 0 = 0p_M(x)$$

c) Da

$$p_M(x) = \inf\{a > 0 : \ x \in aM\}$$

gibt es eine Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \downarrow p_M(x)$ und

$$x \in a_n M$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \ p_M(x) + \varepsilon > a_n \\ \overset{x \in a_n M}{\Rightarrow} & \forall \varepsilon > 0 : x \in (p_M(x) + \varepsilon)M \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0 : \ \frac{x}{p_M(x) + \varepsilon} \in M \end{aligned}$$

Seien $x, y \in X$. Für

$$t = \frac{p_M(x) + \varepsilon_1}{p_M(x) + p_M(y) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \in [0, 1]$$

gilt

$$
\begin{array}{rl}
& \forall \varepsilon > 0: \ \dfrac{x}{p_M(x)+\varepsilon} \in M \\
\overset{M \text{ konvex}}{\Rightarrow} & t \underbrace{\dfrac{x}{p_M(x)+\varepsilon_1}}_{\in M} + (1-t) \underbrace{\dfrac{y}{p_M(y)+\varepsilon_2}}_{\in M} \in M \\
\overset{t \text{ einsetzen}}{\Rightarrow} & \dfrac{x+y}{p_M(x)+p_M(y)+\varepsilon_1+\varepsilon_2} \in M \\
\Rightarrow & x+y \in (p_M(x)+p_M(y)+\varepsilon_1+\varepsilon_2)M
\end{array}
$$

Da $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ beliebig waren, folgt

$$
\begin{aligned}
p_M(x+y) &= \inf\{a > 0 \ : \ x+y \in aM\} \\
&\leq p_M(x) + p_M(y)
\end{aligned}
$$

2.) a) Wie in 1.) a) ist p_M definiert.
b) Sei $a > 0$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
p_M(ax) &\overset{Def}{=} \inf\{b > 0 : ax \in bM\} \\
&\overset{a \geq 0}{=} \inf\{ab > 0 : ax \in abM\} \\
&= \inf\{ab > 0 : x \in bM\} \\
&\overset{a \geq 0}{=} a \inf\{b > 0 : x \in bM\} \\
&\overset{Def}{=} a p_M(x)
\end{aligned}
$$

Für $a = 0$ gilt

$$p_M(ax) = 0 = 0 p_M(x)$$

c) Wie in 2c) zeigt man

$$p_M(x+y) \leq p_M(x) + p_M(y)$$

■

Bemerkung 40.15 *a) M ist kreisförmig $\Rightarrow \overline{M}$ ist kreisförmig*
b) Sei M konvex, abgeschlossen und kreisförmig. Dann gilt

$$\frac{1}{2} M \subset \{x \mid p_M(x) < 1\} \subset M \subset \{x \mid p_M(x) \leq 1\} \subset \overline{M}$$

Beweis. a) Sei $y \in \overline{M}$, d.h.

$$\exists (y_n)_n \text{ in } M : y_n \to y$$

Da M kreisförmig ist, gilt

$$\forall |c| \leq 1: \ cy_n \in M$$

Wegen

$$cy_n \to cy$$

gilt

$$cy \in \overline{M}$$

b) i)

$$\begin{aligned} x \in \frac{1}{2}M \quad &\Rightarrow \quad \inf\{a > 0 : x \in aM\} \leq \frac{1}{2} \\ &\overset{Def}{\Rightarrow} \quad p_M(x) \leq \frac{1}{2} < 1 \\ &\Rightarrow \quad x \in \{x \mid p_M(x) < 1\} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} p_M(x) < 1 \quad &\overset{Def}{\Rightarrow} \quad \inf\{a > 0 : x \in aM\} < 1 \\ &\Rightarrow \quad \exists a_0 < 1 : \ x \in a_0 M \\ &\overset{\text{M kreisförmig}}{\Rightarrow} \quad x \in M \end{aligned}$$

iii) Für $x \in M$ ist $x \in 1 \cdot M$ und somit

$$\begin{aligned} x \in M = 1 \cdot M \quad &\Rightarrow \quad \inf\{a > 0 : x \in aM\} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad p_M(x) \leq 1 \end{aligned}$$

iv) Sei $p_M(x) > 0$.

$$\begin{aligned} p_M(x) \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 < c = \inf\{a > 0 : x \in aM\} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \exists (a_n)_n : a_n \downarrow c \text{ und } x \in a_n M \\ &\Rightarrow \quad \exists m_n \in M : \ x = a_n m_n \\ &\overset{\overline{M} \text{ abgeschlossen}}{\Rightarrow} \quad m_n = \frac{x}{a_n} \to \frac{x}{c} \in \overline{M} \\ &\Rightarrow \quad x \in c\overline{M} \\ &\overset{\overline{M} \text{ kreisförmig}}{\Rightarrow} \quad x \in \overline{M} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_M(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x \in 0 \cdot M \\ &\Rightarrow \quad x = 0 \in \overline{M} \end{aligned}$$

■

Satz 40.16 *Sei X ein topologischer* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. X ist lokalkonvex* $\Longleftrightarrow$ *jede Nullumgebung enthält eine absorbierende, kreisförmige, konvexe, offene Menge M.*

Beweis. "$\Rightarrow$": $V_{F,\varepsilon}$ ist absorbierend, kreisförmig, konvex und offen.
"$\Leftarrow$": In einem topologischen Vektorraum sieht jede Umgebung so aus wie die Nullumgebung, deshalb betrachte nur diese. Wegen

$$\underbrace{\frac{1}{2}M}_{\in T} \subset \underbrace{\{x \mid p_M(x) < 1\}}_{\in T_P} \subset \underbrace{M}_{\in T}$$

sind die Nullumgebungsbasen ineinander enthalten. Damit gilt

$$\begin{aligned} T &\subset T_P \subset T \\ T &= T_P \end{aligned}$$

■

Satz 40.17 *Sei X lokalkonvex, Y ein Unterverktorraum, $f : Y \to \mathbb{K}$ stetig, linear. Dann existiert eine stetige lineare Fortsetzung*

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{K} \textit{ mit } \tilde{f}|_Y = f$$

Beweis. Da f stetig ist, gilt

$$\exists p_1, \ldots, p_n \; \exists C \geq 0 \; \forall y \in Y : \; |f(y)| \leq C \max_{i=1}^{n} p_i(y)$$

Da $\max_{i=1}^{n} p_i(y)$ eine Halblänge ist, existiert eine Fortsetzung $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ von f mit

$$\forall x \in X : \; |\tilde{f}(x)| \leq C \max_{i=1}^{n} p_i(x)$$

und $\tilde{f}$ ist stetig. ■

Satz 40.18 *Sei X lokalkonvexer* $\mathbb{R}$*-Vektorraum. Sei $M \subset X$ abgeschlossen, konvex und $0 \in M$. Dann gilt*

$$\forall x_0 \notin M \; \exists \textit{ stetiges, lineares } f : X \to \mathbb{R} : \begin{cases} f(x_0) > 1 \\ \forall x \in M : \; f(x) \leq 1 \end{cases}$$

Beweis. a) Da M^C offen ist, existiert eine konvexe, kreisförmige, offene, absorbierende Nullumgebung V mit

$$(x_0 + V) \cap M \neq \emptyset$$

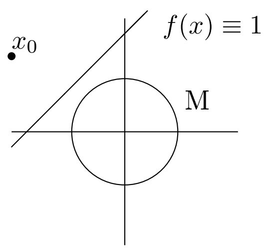


Abbildung 14: $f : X \to \mathbb{R}$ teilt den Raum auf in Niveaulinien

Annahme:

$$\left(x_0 + \frac{V}{2}\right) \cap \left(M + \frac{V}{2}\right) \neq \emptyset$$

Da V kreisförmig ist, gilt

$$v_2 \in V \Rightarrow -v_2 \in V$$

und es folgt

$$\begin{aligned} & \exists v_1, v_2 \in V,\ m \in M:\ x_0 + \frac{v_1}{2} = m + \frac{v_2}{2} \\ \Rightarrow \quad & x_0 + \underbrace{\frac{1}{2}(-v_2) + \frac{1}{2}v_1}_{\in V,\text{ da V konvex}} = m \in M \\ \Rightarrow \quad & (x_0 + V) \cap M \neq \emptyset \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Damit gilt

$$\left(x_0 + \frac{V}{2}\right) \cap \left(M + \frac{V}{2}\right) = \emptyset$$

b) Da $\frac{V}{2}$ absorbierend ist und $0 \in M$, ist

$$M + \frac{V}{2}$$

absorbierend.
c) Wegen

$$\begin{aligned} & t\left(m_1 + \frac{v_1}{2}\right) + (1-t)\left(m_2 + \frac{v_2}{2}\right) \\ = \quad & \underbrace{(tm_1 + (1-t)m_2)}_{\in M} + \underbrace{\left(t\frac{v_1}{2} + (1-t)\frac{v_2}{2}\right)}_{\in \frac{V}{2}} \end{aligned}$$

ist $M + \frac{V}{2}$ konvex. Wegen

$$0 \in M \subset M + \frac{V}{2}$$

ist $p_{M+\frac{V}{2}}$ sublinear.
Wegen

$$x_0 \in \overline{M + \frac{V}{2}}^C$$

gilt

$$p_{M+\frac{V}{2}}(x_0) > 1$$

Dann ist

$$f : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}, ax_0 \mapsto ap_{M+\frac{V}{2}}(x_0)$$

linear mit

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p_{M+\frac{V}{2}}(x_0) > 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}x_0 : \ |f(x)| &\leq p_{M+\frac{V}{2}}(x) \end{aligned}$$

Da $p_{M+\frac{V}{2}}$ sublinear ist, existiert eine lineare stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0) &= p_{M+\frac{V}{2}}(x_0) \\ \forall x \in X : \ \tilde{f}(x) &\leq p_{M+\frac{V}{2}}(x) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} M \subset M + \frac{V}{2} &\Rightarrow \forall x \in M : \ p_{M+\frac{V}{2}}(x) \leq 1 \\ &\Rightarrow \forall x \in M : \ f(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Wegen

$$x \in a\frac{V}{2} \Rightarrow x \in a\left(M + \frac{V}{2}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in X : \ \tilde{f}(x) &\leq p_{M+\frac{V}{2}}(x) \\ &= \inf\left\{a > 0 \ : \ x \in a\left(M + \frac{V}{2}\right)\right\} \\ &\overset{\frac{V}{2} \subset M + \frac{V}{2}}{\leq} \inf\left\{a > 0 \ : \ x \in a\frac{V}{2}\right\} \\ &\leq p_{\frac{V}{2}}(x) \end{aligned}$$

d.h. f ist stetig. ■

Satz 40.19 *Sei X lokalkonvexer Vektorraum, $Y \subset X$ abgeschlossener Untervektorraum und $x_0 \in Y^C$. Dann gilt*

$$\exists \text{ stetiges lineares } f: X \to \mathbb{K}: \begin{cases} f(x_0) = 1 \\ \forall y \in Y: \ f(y) = 0 \end{cases}$$

Beweis. 1.) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Da Y abgeschlossen und konvex ist mit $0 \in Y$, gilt

$$\forall x_0 \in Y^C \exists \text{ stetiges lineares } g: X \to \mathbb{R} \begin{cases} g(x_0) > 1 \\ \forall x \in Y: g(x) \leq 1 \end{cases}$$

Da Y ein Vektorraum ist, gilt

$$\forall x \in Y: g(x) = 0$$

Setze nun

$$f(x) := \frac{1}{g(x_0)} g(x)$$

2.) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Fasse X als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf.
Da $Y \oplus \mathbb{R} i x_0$ abgeschlossener Vektorraum ist, wähle mit 1.) ein stetiges $\mathbb{R}$-lineares

$$h: X \to \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned} h(x_0) &= 1 \\ h &\equiv 0 \text{ auf } Y \oplus \mathbb{R} i x_0 \end{aligned}$$

und setze

$$f: X \to \mathbb{C}, x \mapsto h(x) - ih(ix)$$

Dann ist f stetig. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{aligned} f(ix) &= h(ix) - ih(i^2 x) \\ &= ih(x) + h(ix) \\ &= if(x) \\ f(ax_1 + x_2) &= h(ax_1 + x_2) - ih(i(ax_1 + x_2) \\ &= ah(x_1) - ih(ix_1) + h(x_2) - ih(ix_2) \\ &= af(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

ist f $\mathbb{C}$-linear und

$$\begin{aligned} f(x_0) &= h(x_0) + i \underbrace{h(ix_0)}_{=0} = 1 \\ f|_Y &\equiv 0 \end{aligned}$$

■

41. Hilberträume

Definition 41.1 *Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $a, b \in \mathbb{K}, x, y, z \in H$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ mit*

$$\begin{array}{ll} 1.) & \langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle \\ 2.) & \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \\ 3.) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ 4.) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

*heißt **Halbskalarprodukt** $\iff$ Es gilt 1.) -3.)*
*heißt **Skalarprodukt** $\iff$ Es gilt 1.)-4.).*

Satz 41.2 *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Halbskalarprodukt und $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*
a)

$$\begin{aligned} \langle z, ax + by \rangle &= \overline{a} \langle z, x \rangle + \overline{b} \langle z, y \rangle \\ \langle x, x \rangle &\in \mathbb{R} \\ \| x + y \|^2 &= \| x \|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \| y \|^2 \\ | \langle x, y \rangle | &\leq \| x \| \| y \| \end{aligned}$$

b) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt, so gilt

$$| \langle x, y \rangle | = \| x \| \| y \| \iff x, y \text{ sind linear abhängig}$$

c) $\| \cdot \|$ ist eine Halblänge.
d) $\| \cdot \|$ ist eine Länge $\iff$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt.

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \langle z, ax + by \rangle &= \overline{\langle ax + by, z \rangle} \\ &= \overline{a \langle x, z \rangle} + \overline{b \langle y, z \rangle} \\ &= \overline{a} \langle z, x \rangle + \overline{b} \langle z, y \rangle \\ \langle x, x \rangle &\overset{2.)}{=} \overline{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \| x \|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \| y \|^2 \end{aligned}$$

1. Fall: $\langle x, y \rangle = 0$ erfüllt

$$| \langle x, y \rangle | = 0 \leq \| x \| \| y \|$$

2. Fall: Wegen

$$\begin{aligned} \langle 0, y\rangle &= 0\,\langle 1, y\rangle = 0 \\ \langle x, 0\rangle &= 0\,\langle x, 1\rangle = 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\langle x, y\rangle \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \neq y$$

Mit

$$\exists c \in \mathbb{C}, |c| = 1: \ |\langle x, y\rangle| = \overline{c}\,\langle x, y\rangle = \langle x, cy\rangle$$

gilt $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \| x + tcy \|^2 = \langle x + tcy, x + tcy\rangle \\ &= \| x \|^2 + \langle x, tcy\rangle + \overline{\langle x, tcy\rangle} + t^2 \| y \|^2 \underbrace{|c|^2}_{=1} \\ &= \| x \|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + t^2 \| y \|^2 \\ &=: h(t) \end{aligned}$$

Durch Ableiten erhält man das Minimum von h

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) = 2t_0 \| y \|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\ h''(t_0) &= \| y \|^2 > 0 \end{aligned}$$

in

$$t_0 = -\frac{|\langle x, y\rangle|}{\| y \|^2}$$

d.h.

$$\begin{aligned} 0 &\leq h(t_0) \\ &= \| x \|^2 - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\| y \|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\| y \|^4} \| y \|^2 \\ &= \| x \|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\| y \|^2} \\ |\langle x, y\rangle|^2 &\leq \| x \|^2 \| y \|^2 \end{aligned}$$

b) “$\Rightarrow$”: Wegen

$$\begin{aligned} & h''(t_0) = \| y \|^2 > 0 \\ \Rightarrow\ & h' \text{ ist streng monoton wachsend} \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} h'(t) > 0 & \text{für } t > t_0 \\ h'(t) < 0 & \text{für } t < t_0 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} h \text{ streng monoton wachsend} & \text{für } t > t_0 \\ h \text{ streng monoton fallend} & \text{für } t < t_0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist das Minimum von h eindeutig. Deshalb gilt:

$$\begin{array}{rcl} |\langle x,y\rangle| = \| x \| \| y \| & \Longleftrightarrow & h(t_0)=0 \\ & \Rightarrow & \| x+t_0cy \|^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \langle x+t_0cy, x+t_0cy\rangle = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x+t_0cy=0 \\ & \Rightarrow & x,y \text{ sind linear abhängig} \end{array}$$

"$\Leftarrow$" Seien x,y linear abhängig, d.h. $x = cy$. Dann gilt

$$|\langle x,y\rangle| = |c|\cdot|\langle x,x\rangle| = |c|\cdot \| x \|^2 = \| x \| \| y \|$$

c)

$$\begin{array}{rcl} \| x \| & = & \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0 \\ \| ax \| & = & \sqrt{\langle ax,ax\rangle} = |a|\sqrt{\langle x,x\rangle} \\ & = & |a| \| x \| \\ \| x+y \|^2 & = & \| x \|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \| y \|^2 \\ & \leq & \| x \|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \| y \|^2 \\ & \leq & \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\ & = & (\| x \| + \| y \|)^2 \end{array}$$

d)

$$x=0 \overset{\text{Länge}}{\Longleftrightarrow} \| x \|^2 = \langle x,x\rangle = 0 \overset{Skalarprodukt}{\Longleftrightarrow} x=0$$

■

Definition 41.3 *a) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum H mit Skalarprodukt heißt **Prähilbertraum**.*
*b) Ist H vollständig bzgl. der Länge $\| \cdot \| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, so heißt H **Hilbertraum**.*

Satz 41.4 *a) Eine Zweilinearform oder Eineinhalblinearform T ist stetig $\Longleftrightarrow$*

$$\exists C \geq 0 : \ |T(x,y)| \leq C \| x \| \| y \|$$

b) Das Skalarprodukt ist stetig.

Beweis. a) "$\Rightarrow$": T stetig ist in 0 $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : T(B(0,\delta)\times B(0,\delta)) \subset B(0,\varepsilon)$$

Wähle zu $\varepsilon = 1$ ein passendes $\delta > 0$. Dann gilt:

$$\| x \| < \delta, \| y \| < \delta \Rightarrow |T(x,y)| \leq 1$$

Seien x, y beliebig und $C = \frac{4}{\delta^2}$.

$$\begin{aligned} |T(x,y)| &= \| x \| \| y \| \frac{4}{\delta^2} \underbrace{\left| T\left(\frac{x}{\| x \|}\frac{\delta}{2}, \frac{y}{\| y \|}\frac{\delta}{2} \right) \right|}_{\leq 1} \\ &\leq C \| x \| \| y \| \end{aligned}$$

Mit $C = \frac{4}{\delta^2}$ folgt die Behauptung.
"$\Leftarrow$": Seien

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \| y_n - y \| = 0$$

Da $(\| x_n \|)_n$ beschränkt ist durch ein $K > 0$, gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} |T(x_n, y_n) - T(x,y)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |T(x_n, y_n) - T(x_n, y)| + \lim_{n\to\infty} |T(x_n, y) - T(x,y)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |T(x_n, y_n - y)| + \lim_{n\to\infty} |T(x_n - x, y)| \\ &\leq C \underbrace{\| x_n \|}_{\leq K} \lim_{n\to\infty} \| y_n - y \| + C \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| \| y \| \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Wegen

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \| y \|$$

folgt mit $C = 1$ die Stetigkeit. ■

Satz 41.5 *a)* $\mathbb{K}^n$ *ist Hilbertraum durch*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

b) Jeder abgeschlossene Untervektorraum F eines Hilbertraumes H ist ein Hilbertraum.

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i) z_i &= a \sum_{i=1}^n x_i z_i + b \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i &= \overline{\sum_{i=1}^n y_i \overline{x}_i} \\ \sum_{i=1}^n x_i \overline{x}_i &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i \overline{x}_i &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n: \; x_i = 0 \end{aligned}$$

Wir haben in der Einführung gezeigt:
Eine Folge $(a_m)_m$ in $\mathbb{K}^n$ hat einen Grenzwert $\iff$
Für $1 \leq i \leq n$ haben alle Folgen $(a_m^i)_m$ haben einen Grenzwert in $\mathbb{K}$.
Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, ist somit $\mathbb{K}^n$ vollständig.
b) Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge in F.
Da H vollständig ist, hat sie einen Grenzwert $x \in H$.
Da F abgeschlossen ist, gilt $x \in F$.
Damit ist F vollständig. ■

Satz 41.6 *Für ein Skalarprodukt gilt*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

und

$$\begin{aligned} \textit{Für } \mathbb{K} = \mathbb{R}: \quad & \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2) \\ \textit{Für } \mathbb{K} = \mathbb{C}: \quad & \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \| x + i^k y \|^2 \end{aligned}$$

Aus der Länge erhält man also das Skalarprodukt eindeutig zurück und jedes längenerhaltende $T : H_1 \to H_2$ zwischen zwei Hilberträumen erhält das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} & \forall v \in H_1 : \| Tv \|_{H_2} = \| v \|_{H_1} \\ \Rightarrow \quad & \forall v, w \in H_1 : \langle Tv, Tw \rangle_{H_2} = \langle v, w \rangle_{H_1} \end{aligned}$$

Beweis. 1.)

$$\begin{aligned} & \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 \\ = \quad & 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} - \langle x, y \rangle - \overline{\langle x, y \rangle} \\ = \quad & 2 \left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right) \end{aligned}$$

2.) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 \\ = \quad & \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle \\ = \quad & \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle) \\ = \quad & 4 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{3} i^k &= 1 + i + (-1) + (-i) = 0 \\ \sum_{k=0}^{3} (-1)^k &= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle x + i^k y, x + i^k y \right\rangle \\ = \quad &\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \left(i^k \langle x, x \rangle + i^k i^{-k} \langle x, y \rangle + i^k i^k \langle y, x \rangle + i^k i^k i^{-k} \langle y, y \rangle \right) \\ = \quad &\frac{1}{4} \langle x, x \rangle \sum_{k=0}^{3} i^k + \frac{1}{4} \langle x, y \rangle \sum_{k=0}^{3} 1 + \frac{1}{4} \langle y, x \rangle \sum_{k=0}^{3} (-1)^k + \frac{1}{4} \langle y, y \rangle \sum_{k=0}^{3} i^k \\ = \quad &\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

3.)

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tw \rangle &= \frac{1}{4}(\| Tv + Tw \|^2 - \| Tv - Tw \|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\| T(v + w) \|^2 - \| T(v - w) \|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\| v + w \|^2 - \| v - w \|^2) \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tw \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \, \| Tv + i^k Tw \|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \, \| T(v + i^k w) \|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \, \| v + i^k w \|^2 \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

■

Satz 41.7 *Sei H Hilbertraum, $A \subset H$ konvex und abgeschlossen. Dann gelten die gleichwertigen Bedingungen*

1.) $\forall x \in H\ \exists!\ x_0 \in A : \| x - x_0 \| = \inf_{y \in A} \| x - y \|$

2.) $\forall x \in H\ \exists!\ x_0 \in A\ \forall y \in A : \ \langle x - x_0, y - x_0 \rangle + \overline{\langle x - x_0, y - x_0 \rangle} \leq 0$

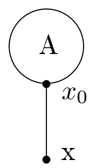


Abbildung 15: Das näheste x_0

Beweis. a) Existenz: Es existiert eine Folge $(a_n)_n$ in A mit

$$\lim_{n \to \infty} \| x - a_n \| = \inf_{y \in A} \| x - y \|$$

Damit gilt

$$\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \| x - a_n \| \leq \inf_{y \in A} \| x - y \| + \frac{\varepsilon}{4}$$

Da A konvex ist, gilt

$$\frac{1}{2}(a_n + a_m) \in A$$

und man erhält $\forall n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned}
& 4 \left(\inf_{y \in A} \| x - y \|^2 \right) + \| a_n - a_m \|^2 \\
\leq \quad & 4 \left\| x - \frac{1}{2}(a_n + a_m) \right\|^2 + \| a_n - a_m \|^2 \\
= \quad & \| x - a_n + (x - a_m) \|^2 + \| x - a_n - (x - a_m) \|^2 \\
\overset{\text{Satz}}{=} \quad & 2 \| x - a_n \|^2 + 2 \| x - a_m \|^2 \\
\leq \quad & 4 \left(\inf_{y \in A} \| x - y \|^2 \right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

d.h.

$$\forall n, m \geq n_0 : \| a_n - a_m \|^2 < \varepsilon$$

und $(a_n)_n$ ist eine Cauchyfolge und hat im vollständigen H einen Grenzwert x_0.

Da A abgeschlossen ist, gilt $x_0 \in A$. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mid \parallel x - x_0 \parallel - \parallel x - a_n \parallel \mid &\leq \lim_{n\to\infty} \parallel a_n - x_0 \parallel \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\parallel x - x_0 \parallel = \lim_{n\to\infty} \parallel x - a_n \parallel$$

Eindeutigkeit: Sei x_0' ein zweiter Punkt in A mit

$$\parallel x - x_0' \parallel = \inf_{y\in A} \parallel x - y \parallel = \parallel x - x_0 \parallel$$

Für die Folge $(x_0, x_0', x_0, x_0', \ldots)$ statt $(a_n)_n$ folgt wie oben

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0 : \parallel a_n - a_m \parallel &< \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ : \parallel x_0 - x_0' \parallel &< \varepsilon \\ x_0 &= x_0' \end{aligned}$$

b) $'' \Leftarrow''$ Sei $y \in A, x \in H$.

$$\begin{aligned} & \parallel x - y \parallel^2 \\ = \ & \parallel x - x_0 + x_0 - y \parallel^2 \\ = \ & \parallel x_0 - x \parallel^2 + \underbrace{\langle x - x_0, x_0 - y\rangle + \overline{\langle x - x_0, x_0 - y\rangle}}_{\geq 0} + \underbrace{\parallel x_0 - y \parallel^2}_{\geq 0} \\ \geq \ & \parallel x_0 - x \parallel^2 \end{aligned}$$

$'' \Rightarrow''$: Sei $t \in [0,1]$ und $y \in A$. Mit

$$\begin{aligned} x_0 + t(y - x_0) &= (1-t)x_0 + ty \\ &\overset{\text{A konvex}}{\in} A \\ \inf_{y\in A} \parallel x - y \parallel^2 &\leq \parallel x - (x_0 + t(y - x_0)) \parallel \end{aligned}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} & \parallel x - x_0 \parallel^2 \\ = \ & \left(\inf_{y\in A} \parallel x - y \parallel\right)^2 \\ \leq \ & \parallel x - x_0 - t(y - x_0) \parallel^2 \\ = \ & \langle x - x_0 - t(y - x_0), x - x_0 - t(y - x_0)\rangle \\ = \ & \parallel x_0 - x \parallel^2 - \langle x - x_0, t(y - x_0)\rangle - \overline{\langle x - x_0, t(y - x_0)\rangle} \\ & + t^2 \parallel x_0 - y \parallel^2 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\langle x-x_0, y-x_0\rangle + \overline{\langle x-x_0, y-x_0\rangle} &\leq \frac{t}{2} \parallel x_0 - y \parallel^2 \\
\langle x-x_0, y-x_0\rangle + \overline{\langle x-x_0, y-x_0\rangle} &\leq 0
\end{aligned}$$

■

Satz 41.8 *Sei H Hilbertraum, $A \subset H$ abgeschlossener Untervektorraum. Dann gilt*

$$\forall x \in H\ \exists!\ x_0 \in A\ \forall y \in A: \ \langle x_0, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Beweis. Da A ein Untervektorraum ist, gilt

$$\begin{aligned}
& \forall y \in A: \left\langle x-x_0, \underbrace{y-x_0}_{\in A}\right\rangle + \overline{\left\langle x-x_0, \underbrace{y-x_0}_{\in A}\right\rangle} \leq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \langle x-x_0, y\rangle + \overline{\langle x-x_0, y\rangle} \leq 0
\end{aligned}$$

Einsetzen von $-y$ ergibt

$$\begin{aligned}
& \forall y \in A: \ \langle x-x_0, -y\rangle + \overline{\langle x-x_0, -y\rangle} \leq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \ \langle x-x_0, y\rangle + \overline{\langle x-x_0, y\rangle} \geq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \ \langle x-x_0, y\rangle + \overline{\langle x-x_0, y\rangle} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \ \langle x-x_0, y\rangle = -\overline{\langle x-x_0, y\rangle}
\end{aligned}$$

Einsetzen von iy ergibt

$$\begin{aligned}
& \forall y \in A: \ \langle x-x_0, iy\rangle = -\overline{\langle x-x_0, iy\rangle} \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \ \bar{i}\,\langle x-x_0, y\rangle = -i\overline{\langle x-x_0, y\rangle} \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \ \langle x-x_0, y\rangle = \overline{\langle x-x_0, y\rangle} \in \mathbb{R} \\
\overset{s.o.}{\Rightarrow} \quad & \forall y \in A: \ \langle x-x_0, y\rangle = -\overline{\langle x-x_0, y\rangle} = -\langle x-x_0, y\rangle \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \ \langle x-x_0, y\rangle = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall y \in A: \ \langle x, y\rangle = \langle x_0, y\rangle
\end{aligned}$$

■

Definition 41.9 *Sei H ein Hilbertraum.*
a) *$x, y \in H$ heißen **senkrecht** $(x \perp y)$ $\Longleftrightarrow$*

$$\langle x, y\rangle = 0$$

b) *Zwei Mengen $M_1, M_2 \subset H$ heißen **senkrecht** $(M_1 \perp M_2)$ $\Longleftrightarrow$*

$$\forall x \in M_1\ \forall y \in M_2: \ \langle x, y\rangle = 0$$

c) *Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ heißt* ***senkrecht mit Länge 1*** $\Longleftrightarrow$

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 0 & \textit{für } i \neq j \\ 1 & \textit{für } i = j \end{cases}$$

d) *Sei $M \subset H$.*

$$M^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in M : \langle x, y\rangle = 0\}$$

Satz 41.10 *1.) Seien $x_i \in H$ mit $\forall i \neq j : \langle x_i, x_j\rangle = 0$. Dann gilt:*

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2$$

Sei H Hilbertraum und $E \subset H$.
2.) $E^\perp$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum und es gilt

$$E \cap E^\perp = \{0\}$$

3.) Ist E ***abgeschlossener*** *Untervektorraum, so gilt $H = E \oplus E^\perp$, d.h.*

$$\forall x \in H \ \exists x_1 \in E \ \exists x_2 \in E^\perp : \ x = x_1 + x_2$$

Beweis. 1.)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle x_i, x_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2 \end{aligned}$$

2.) a) Wegen

$$\begin{aligned} x, y \in E^\perp &\Rightarrow \forall z \in E : \ \langle y, z\rangle = 0 = \langle x, z\rangle \\ &\Rightarrow \forall z \in E : \ \langle ax + y, z\rangle = a\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0 \\ &\Rightarrow (ax + y) \in E^\perp \end{aligned}$$

ist $E^\perp$ ein Vektorraum.
b) Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $E^\perp$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gilt

$$\forall y \in E : \ \langle y, x_n\rangle = 0$$

Da das Skalarprodukt stetig ist, gilt

$$\forall y \in E: \ \langle y, x\rangle = \left\langle y, \lim_{n\to\infty} x_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y, x_n\rangle = 0$$

d.h.

$$x \in E^\perp$$

Damit ist $E^\perp$ abgeschlossen.
c)

$$\begin{aligned} x \in E \cap E^\perp \quad &\Rightarrow \quad \left\langle \underbrace{x}_{\in E}, \underbrace{x}_{\in E^\perp} \right\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = 0 \\ &\Rightarrow \quad E \cap E^\perp \subset \{0\} \end{aligned}$$

3.) Sei $x \in H$. Da E abgeschlossen ist, ist es ein Hilbertraum. Damit gilt

$$\exists! z_1 \in E \ \forall y \in E : \langle y, x\rangle = \langle y, z_1\rangle$$

d.h.

$$\begin{aligned} \forall y \in E: \ \langle y, x - z_1\rangle &= 0 \\ x - z_1 &\in E^\perp \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{z_1}_{\in E} + \underbrace{x - z_1}_{\in E^\perp} \\ H &= E \oplus E^\perp \end{aligned}$$

■

Definition 41.11 *Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ in einem Längenraum X heißt* ***summierbar*** *zu $s \in X \iff$*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ endliches } J_0 \subset I \ \forall \text{ endliche } J_0 \subset J \subset I: \ \left\| \sum_{i\in J} x_i - s \right\| < \varepsilon$$

s ist eindeutig bestimmt.
Egal wie man eine solche endliche Menge J auswählt, ist der Rest kleiner als ε. Dies erlaubt Summen auch für überabzählbare Indexmengen zu definieren. Dort wüsste man sonst nicht, was die Summe sein soll. Es sind dann aber nur abzählbar viele $x_i \neq 0$, wie wir später sehen.

Beweis. Sei die Familie auch zu s' summierbar, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_0, J_1 \ \forall \text{ endlichen } J \supset J_0, J_1 : \begin{cases} \left\| s - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon \\ \left\| \sum_{i \in J} x_i - s' \right\| < \varepsilon \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : \| \, s - s' \, \| &\leq \left\| s - \sum_{i \in J_0 \cup J_1} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in J_0 \cup J_1} x_i - s' \right\| \\ &< 2\varepsilon \\ s &= s' \end{aligned}$$

■

Definition 41.12 *Sei I gerichtet.* $(z_i)_{i \in I}$ *ist ein* ***Cauchy-Netz in X*** $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists i_0 \in I \ \forall i, i' \geq i_0 : \| \, z_i - z_{i'} \, \| < \varepsilon$$

Satz 41.13 *Sei I gerichtet. In einem vollständigen Längenraum gilt*

Das Netz $(z_i)_{i \in I}$ *hat einen Grenzwert* $\Longleftrightarrow$ $(z_i)_{i \in I}$ *ist Cauchy-Netz*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $z_i \to z$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists i_0 \ \forall i \geq i_0 : \| \, z - z_i \, \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \ \forall i, i' \geq i_0 : \| \, z_i - z_{i'} \, \| &\leq \| \, z_i - z \, \| + \| \, z - z_{i'} \, \| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Konstruiere eine Cauchyfolge durch

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists i_n \geq i_{n-1} \ \forall i, i' \geq i_n : \| \, z_i - z_{i'} \, \| < \frac{1}{n}$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq n_0 : \| \, z_{i_n} - z_{i_m} \, \| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$(z_{i_n})_n$ hat im vollständigen Raum einen Grenzwert z.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \ \forall n \geq n_1 : \| \, z_{i_n} - z \, \| < \varepsilon$$

Sei $n > \max\{n_1, \frac{1}{\varepsilon}\}$. Für $i \geq i_n$ gilt

$$\begin{aligned} \| \, z_i - z \, \| &\leq \| \, z_i - z_{i_n} \, \| + \underbrace{\| \, z - z_{i_n} \, \|}_{< \varepsilon} \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Damit hat das Netz den Grenzwert z.
Da die Topologie im Abstandsraum Punkte trennt, ist der Grenzwert eindeutig. ∎

Satz 41.14 *Für einen vollständigen Längenraum X gilt*

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in I} \textit{ ist summierbar} &\overset{Def}{\iff} \left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{J\subset I, |J|<\infty} \textit{ hat einen Grenzwert} \\ &\iff \left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{J\subset I, |J|<\infty} \textit{ ist Cauchy-Netz}\end{aligned}$$

Beweis. Die endlichen Teilmengen $J \subset I$ sind gerichtet durch

$$\begin{aligned}&J_1 \leq J_2 \iff J_1 \subset J_2 \\ &\forall i = 1,2 : J_i \subset J_1 \cup J_2 \text{ und } |J_1 \cup J_2| < \infty\end{aligned}$$

Damit ist

$$\left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{J\subset I, |J|<\infty}$$

ein Netz.
Die erste Gleichheit gilt nach Definition, die zweite da X vollständiger Längenraum ist. ∎

Satz 41.15 *Ist $(x_i)_{i\in I}$ summierbar, so sind höchstens abzählbar viele $x_i \neq 0$.*

Beweis. Sei $(x_i)_{i\in I}$ summierbar zu s. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists |J_n| < \infty\ \forall \text{ endliche } J \supset J_n : \left\| \sum_{i\in J_n} x_i - s \right\| < \frac{1}{n}$$

Sei

$$x_j \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} : \| x_j \| &= \left\| \sum_{i \in J_n \cup \{j\}} x_i - \sum_{i \in J_n} x_i \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{i \in J_n \cup \{j\}} x_i - s \right\| + \left\| \sum_{i \in J_n} x_i - s \right\| \\
&< \frac{2}{n} \\
\| x_j \| &= 0 \\
x_j &= 0
\end{aligned}$$

Nur die abzählbar vielen Elemente $x_j \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ können somit ungleich Null sein. ∎

Satz 41.16 *Seien $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ summierbare Familien in einem Hilbertraum H, $a \in \mathbb{C}, z \in H$. Dann gilt*

$$\sum_{i \in I} a x_i, \sum_{i \in I} (x_i + y_i), \sum_{i \in I} \langle x_i, z \rangle \ \textit{sind summierbar}$$

und

$$\begin{aligned}
a \sum_{i \in I} x_i &= \sum_{i \in I} (a x_i) \\
\sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i &= \sum_{i \in I} (x_i + y_i) \\
\left\langle \sum_{i \in I} x_i, z \right\rangle &= \sum_{i \in I} \langle x_i, z \rangle
\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i \in J} a x_i - a \sum_{i \in I} x_i \right\| \\
= & \left\| a \left(\sum_{i \in J} x_i - \sum_{i \in I} x_i \right) \right\| \\
= & |a| \left\| \sum_{i \in J} x_i - \sum_{i \in I} x_i \right\| \\
\to & \ 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i\in J}(x_i+y_i) - \left(\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i\right)\right\| \\
\leq \quad & \left\| \sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in I} x_i \right\| + \left\| \sum_{i\in J} y_i - \sum_{i\in I} y_i \right\| \\
\to \quad & 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \sum_{i\in J} x_i, z\right\rangle - \left\langle \sum_{i\in I} x_i, z\right\rangle \right| \quad &= \quad \left| \left\langle \sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in I} x_i, z\right\rangle \right| \\
&\leq \quad \left\| \sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in I} x_i \right\| \, \| z \| \\
&\to \quad 0
\end{aligned}$$

■

Satz 41.17 *Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie paarweise senkrechter Elemente $\neq 0$ in einem Hilbertraum H. Dann gilt*

$$(x_i)_{i\in I} \text{ ist summierbar in } H \iff (\| x_i \|^2)_{i\in I} \text{ summierbar in } \mathbb{R}$$

und

$$\left\| \sum_{i\in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i\in I} \| x_i \|^2$$

Beweis. Da $\mathbb{R}, H$ vollständige Längenräume sind, gilt

$$\begin{aligned}
& (x_i)_{i\in I} \text{ ist summierbar in H} \\
\iff \quad & (x_i)_{i\in I} \text{ ist Cauchy-Netz} \\
\iff \quad & \forall \varepsilon > 0 \; \exists J_0 \; \forall J, J' \supset J_0 : \; \left\| \sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in J'} x_i \right\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (\| x_i \|^2)_{i\in I} \text{ summierbar in } \mathbb{R} \\
\iff \quad & (\| x_i \|^2)_{i\in I} \text{ ist Cauchy-Netz} \\
\iff \quad & \forall \varepsilon > 0 \; \exists J_0 \; \forall J, J' \supset J_0 : \; \left| \sum_{i\in J} \| x_i \|^2 - \sum_{i\in J'} \| x_i \|^2 \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i\in J\setminus J_0} \| x_i \|^2 - \sum_{i\in J'\setminus J_0} \| x_i \|^2 \right| \\
\leq\ & \sum_{i\in J\cup J'\setminus J_0} \| x_i \|^2 + \sum_{i\in J\cup J'\setminus J_0} \| x_i \|^2 \\
<\ & 2\varepsilon
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in J'} x_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i\in J\setminus J'} x_i - \sum_{i\in J'\setminus J} x_i \right\|^2 \\
&\overset{\text{senkrecht}}{=} \sum_{i\in J\setminus J'+J'\setminus J} \| x_i \|^2 \\
&\leq \left| \sum_{i\in J\cup J'} \| x_i \|^2 - \sum_{i\in J_0} \| x_i \|^2 \right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i\in J} \| x_i \|^2 \rightarrow \sum_{i\in I} \| x_i \|^2$$

$$\sum_{i\in J} \| x_i \|^2 = \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\|^2 \rightarrow \left\| \sum_{i\in I} x_i \right\|^2$$

und da der Grenzwert eindeutig ist, folgt

$$\sum_{i\in I} \| x_i \|^2 = \left\| \sum_{i\in I} x_i \right\|^2$$

■

Satz 41.18 *Sei $(x_i)_{i\in I}$ senkrechte Familie mit Länge 1 im Hilbertraum H. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} | \langle z, x_i \rangle |^2 &\leq \| z \|^2 \\
\sum_{i\in I} | \langle z, x_i \rangle |^2 &= \| z \|^2 \Longleftrightarrow z = \sum_{i\in I} \langle z, x_i \rangle \, x_i
\end{aligned}$$

Beweis. a) Sei $J \subset I$ endlich. Wegen

$$\begin{aligned}
& \left\langle z - \sum_{i\in J} \langle z, x_i\rangle\, x_i, \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, \overline{\langle z, x_j\rangle} - \sum_{i,j\in J} \overline{\langle z, x_j\rangle}\, \langle z, x_i\rangle\, \langle x_i, x_j\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, \overline{\langle z, x_j\rangle} = \sum_{i,j\in J} \langle z, x_i\rangle\, \overline{\langle z, x_j\rangle}\, \langle x_i, x_j\rangle$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{j\in J} |\, \langle z, x_j\rangle\, |^2 \\
\overset{\text{s.o.}}{=}\ & \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, \overline{\langle z, x_j\rangle} \\
=\ & \sum_{i,j\in J} \langle z, x_i\rangle\, \overline{\langle z, x_j\rangle}\, \langle x_i, x_j\rangle \\
=\ & \left\langle \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j, \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\rangle \\
=\ & \left\| \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\|^2 \\
\leq\ & \left\| \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\|^2 + \left\| z - \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\|^2 \\
\overset{\text{Terme senkrecht, s.o.}}{=}\ & \|\, z\, \|^2
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\sup_{J\subset I} \sum_{j\in J} |\, \langle z, x_j\rangle\, |^2 &\leq \|\, z\, \|^2 \\
\sum_{i\in I} |\, \langle z, x_i\rangle\, |^2 &\leq \|\, z\, \|^2
\end{aligned}$$

b) Aus

$$\left\| \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\|^2 + \left\| z - \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\|^2 = \| z \|^2$$

$$\sum_{j\in J} | \langle z, x_j\rangle |^2 + \left\| z - \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\|^2 = \| z \|^2$$

folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{j\in J} | \langle z, x_j\rangle |^2 \to \| z \|^2 \\ \iff \quad & \left\| z - \sum_{j\in J} \langle z, x_j\rangle\, x_j \right\|^2 \to 0 \end{aligned}$$

■

Satz 41.19 *Für eine senkrechte Familie mit Länge 1 $(e_i)_{i\in I}$ in dem Hilbertraum H sind gleichwertig*

1.) $\forall x \in H : \| x \|^2 = \sum_{i\in I} | \langle x, e_i\rangle |^2$

2.) $\forall x \in H : \; x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\, e_i$

3.) $Lin\{e_i : i \in I\}$ *ist dicht in* H

4.) $\forall i \in I : x \perp e_i \Rightarrow x = 0$

5.) $(e_i)_{i\in I}$ *ist maximale senkrechte Familie mit Länge 1*

6.) $f : l^2(I) \to H, (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i e_i$

ist umkehrbar und erhält das Skalarprodukt

Sie heißt dann ***senkrechte Basis mit Länge 1*** *von H.*

Beweis. 6) $\Rightarrow$ 1): Sei $x = \sum_{i\in I} a_i e_i \in H$. Mit

$$\begin{aligned} \langle x, e_j\rangle &= \left\langle \sum_{i\in I} a_i e_i, e_j \right\rangle \\ &\overset{\text{früher}}{=} \sum_{i\in I} \langle a_i e_i, e_j\rangle \\ &= a_j \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\| x \|_H^2 &= \left\| \sum_{i\in I} a_i e_i \right\|_H^2 \\
&\overset{\text{f längenerhaltend}}{=} \left\| \sum_{i\in I} a_i \right\|_{l^2(I)}^2 \\
&= \sum_{i\in I} \| a_i \|^2 \\
&= \sum_{i\in I} | \langle x, e_i \rangle |^2
\end{aligned}$$

1) $\iff$ 2): schon gezeigt.
2) $\Rightarrow$ 3): Sei

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Nach Definition der Summierbarkeit kann man x beliebig genau durch eine endliche Linearkombination der e_i nähern, d.h.

$$Lin\{e_i : i \in I\} \text{ ist dicht in } H$$

3) $\Rightarrow$ 4): Wegen

$$\begin{aligned}
& \left\| x - \sum_{j\in J} a_j e_j \right\|^2 - \left\| x - \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\
= & \left\langle x - \sum_{i\in J} a_i e_i, x - \sum_{j\in J} a_j e_j \right\rangle - \left\langle x - \sum_{i\in J} \langle x, e_i \rangle e_i, x - \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle \\
= & \langle x, x \rangle - \sum_{i\in J} a_i \langle e_i, x \rangle - \sum_{j\in J} \overline{a_j} \overline{\langle e_j, x \rangle} + \sum_{i,j\in J} \langle a_i, \overline{a_j} \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\
& - \langle x, x \rangle + \sum_{i\in J} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle + \sum_{j\in J} \overline{\langle x, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle} \\
& - \sum_{i,j\in J} \left\langle \langle x, e_i \rangle, \overline{\langle x, e_j \rangle} \right\rangle \langle e_i, e_j \rangle \\
= & \left\langle \sum_{i\in J} (\langle x, e_i \rangle - a_i) e_i, \sum_{j\in J} (\langle x, e_j \rangle - a_j) e_j \right\rangle \\
& + 2 \sum_{j\in J} \overline{\langle x, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle} + \sum_{i,j\in J} \langle a_i, \overline{a_j} \rangle \\
\geq & \ 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\left\| x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \, e_j \right\|^2 \leq \left\| x - \sum_{j \in J} a_j e_j \right\|^2$$

Da $\mathrm{Lin}\{e_i : i \in I\}$ dicht ist, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ endliches } J, a_j, e_j : \ \left\| x - \sum_{j \in J} a_j e_j \right\|^2 < \varepsilon$$

und somit

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ endliches } J, e_j : \ \left\| x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \, e_j \right\|^2 < \varepsilon$$

und somit

$$\begin{array}{rcl}
\forall \varepsilon > 0 : \ \varepsilon & > & \left\| x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \, e_j \right\|^2 \\
& \overset{\text{senkrecht}}{=} & \| \, x \, \|^2 - \sum_{j \in J} \| \, \langle x, e_j \rangle \, e_j \, \|^2 \\
& = & \| \, x \, \|^2 - \sum_{j \in J} | \, \langle x, e_j \rangle \, |^2 \\
& \geq & 0 \\
\forall \varepsilon > 0 : \ \varepsilon & > & \| \, x \, \|^2 \\
0 & = & \| \, x \, \| \\
0 & = & x
\end{array}$$

4) $\Rightarrow$ 5): Sei x mit

$$\forall i \in I : \ x \perp e_i$$

Mit 4.) folgt

$$x = 0$$

d.h. die Familie ist maximal.

5) $\Rightarrow$ 4): Sei $x \in H$ und $(e_i)_i$ eine maximale senkrechte Familie mit Länge 1 und

$$\forall i : \ x \perp e_i$$

Annahme: $x \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{x}{\| x \|} \text{ ist senkrecht zur Familie } (e_i)_{i\in I}$$
$$\left\| \frac{x}{\| x \|} \right\| = 1$$

im Widerspruch zur Maximalität des Familie. Somit gilt

$$x = 0$$

4) $\Rightarrow$ 6):

$$\begin{aligned}
\| f((a_i)_{i\in I}) \|_H^2 &\overset{\text{Def}}{=} \left\| \sum_{i\in I} a_i e_i \right\|_H^2 \\
&\overset{\text{früher, senkrecht}}{=} \sum_{i\in I} \| a_i e_i \|_H^2 \\
&= \sum_{i\in I} |a_i|^2 \\
&= \sum_{i\in I} \| a_i \|_{l^2(I)}^2 \\
&\overset{\text{Def}}{=} \left\| \sum_{i\in I} a_i \right\|_{l^2(I)}^2
\end{aligned}$$

Da der Term in der 3. Zeile existiert, existiert auch der rechte Term in der 1. Zeile, d.h. f ist wohldefiniert, erhält die Länge und ist eins zu eins. Wegen

$$H = f(l^2(I)) \oplus \underbrace{(f(l^2(I)))^\perp}_{=0 \text{ nach 4.)}}$$

ist f auf. ■

Satz 41.20 *Jede senkrechte Familie $(e_j)_{j\in J}$ mit Länge 1 in einem Hilbertraum H läßt sich zu einer maximalen senkrechten Familie mit Länge 1 fortsetzen.*

Beweis. Sei

$$F = \{\{e_i : \ i \in I\} : J \subset I, e_i \text{ senkrecht mit Länge } 1\}$$

die senkrechten Familien $\{e_i : \ i \in J\}$ mit Länge 1 die $\{e_j : \ j \in J\}$ enthalten mit

$$(e_i)_{i\in I} < (e_k)_{k\in K} \iff \{e_i : \ i \in I\} \subsetneqq \{e_k : \ k \in K\}$$

Wegen

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall I : \{e_i : \ i \in I\} = \{e_i : \ i \in I\} \\ 2.) & (\{e_i : \ i \in I_1\} \subsetneqq \{e_i : \ i \in I_2\} \text{ und } \{e_i : \ i \in I_2\} \subsetneqq \{e_i : \ i \in I_3\}) \\ & \Rightarrow \{e_i : \ i \in I_1\} \subsetneqq \{e_i : \ i \in I_3\} \end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall I : (e_i)_{i\in I} \not< (e_i)_{i\in I} \\ 2.) & ((e_i)_{i\in I_1} < (e_i)_{i\in I_2} \text{ und } (e_i)_{i\in I_2} < (e_i)_{i\in I_3}) \\ & \Rightarrow (e_i)_{i\in I_1} < (e_i)_{i\in I_3} \end{array}$$

und F ist teilgeordnet.
Sei $F_1 \subset F$ eine Kette, d.h. in F_1 gilt

3.)$\forall I_1, I_2 : \ ((e_i)_{i\in I_1} < (e_i)_{i\in I_2}$ oder $(e_i)_{i\in I_1} > (e_i)_{i\in I_2}$ oder $(e_i)_{i\in I_1} = (e_i)_{i\in I_2})$

Betrachte

$$\bigcup_{I_k\in F_1} \{e_i : \ i \in I_k\}$$

Dann gilt

$$\forall e_i, e_j \in \bigcup_{I_k\in F_1} \{e_i : \ i \in I_k\} \exists I_K : \ e_i, e_j \in I_k$$
$$\Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Damit gilt

$$\bigcup_{I_k\in F_1} \{e_i : \ i \in I_k\} \in F$$

und die Kette hat eine obere Schranke.
Da die Kette beliebig war, existiert ein maximales Element. ■

Satz 41.21 *Seien $(e_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}$ senkrechte Basen mit Länge 1 für H. Dann gilt:*

$$|I| = |J|$$

Beweis. Das kann ich leider nicht beweisen. ■

Satz 41.22 *Sei $x_1, x_2, \ldots$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren in einem Prähilbertraum H. Dann existiert ein senkrechte Familie mit Länge 1 $e_1, e_2, \ldots$ mit*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ Lin(e_1, \ldots, e_n) = Lin(x_1, \ldots, x_n)$$

Beweis. Da die x_i linear unabhängig sind, gilt

$$\forall i \in I: \; x_i \neq 0$$

Setze

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & \dfrac{x_1}{\| x_1 \|} \in Lin(x_1) \\ x_1 & = & \| x_1 \| \, e_1 \in Lin(e_1) \\ e_{n+1} & = & \dfrac{x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle x_{n+1}, e_i \rangle \, e_i}{\|x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle x_{n+1}, e_i \rangle \, e_i\|} \\ & \in & Lin(x_{n+1}, e_1, \ldots, e_n) \\ x_{n+1} & \in & Lin(e_{n+1}, e_1, \ldots, e_n) \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} Lin(e_{n+1}, e_1, \ldots, e_n) & \overset{\text{Fall n}}{=} & Lin(e_{n+1}, x_1, \ldots, x_n) \\ & = & Lin(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \forall 1 \leq k \leq n: & & \langle e_{n+1}, e_k \rangle \\ & = & \dfrac{\langle x_{n+1}, e_k \rangle - \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_k \rangle \, \langle x_{n+1}, e_k \rangle}{\|x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle x_{n+1}, e_i \rangle \, e_i\|} \\ & = & 0 \end{array}$$

■

Satz 41.23 *Sei $X \subset H$ ein Untervektorraum. Dann gilt*

$$\overline{X} = (X^\perp)^\perp$$

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} x \in X & \Rightarrow & \forall y \in X^\perp: \; \langle x, y \rangle = 0 \\ & \overset{\text{Def } (X^\perp)^\perp}{\Rightarrow} & x \in (X^\perp)^\perp \\ & \Rightarrow & X \subset (X^\perp)^\perp \\ & \overset{(X^\perp)^\perp \text{ abgeschlossen}}{\Rightarrow} & \overline{X} \subset (X^\perp)^\perp \end{array}$$

Da $\overline{X}$ abgeschlossen ist, gilt

$$H = \overline{X} \oplus \overline{X}^C$$

Setze eine senkrechte Basis mit Länge 1 $(e_i)_{i\in I}$ von $\overline{X}$ fort mit $(e_k)_{k\in K}$ zu einer senkrechten Basis mit Länge 1 von H. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& y \in \overline{X}^C \cap (X^\perp)^\perp \\
\Rightarrow\quad & y = \sum_{k\in K} a_k e_k \in X^\perp \text{ und } y \in (X^\perp)^\perp \\
\Rightarrow\quad & y \in X^\perp \cap (X^\perp)^\perp = \{0\} \\
\Rightarrow\quad & y = 0
\end{aligned}$$

d.h.

$$\overline{X} \supset (X^\perp)^\perp$$

■

Satz 41.24 *Sei H ein Hilbertraum, $0 \neq E \subset H$ abgeschlossener Untervektorraum. Für*

$$P : H = E \oplus E^\perp \to E, x + y \mapsto x$$

gilt

$$P = P^* = P^2$$

Beweis. a) Wegen

$$\begin{aligned}
P(x_1 + y_1 + c(x_2 + y_2)) &= x_1 + cx_2 \\
&= P(x_1 + y_1) + cP(x_2 + y_2)
\end{aligned}$$

ist P linear.
b)

$$\begin{aligned}
\| P(x + y) \|^2 &= \| x \|^2 \\
&\leq \| x \|^2 + \| y \|^2 \\
&= \| x + y \|^2 \\
\| P \| &\leq 1
\end{aligned}$$

Wegen $E \neq \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned}
\forall x \in E :\ P(x) &= x \\
\forall x \in E : \| P(x) \| &= \| x \| \\
\| P \| &= 1
\end{aligned}$$

c) Wegen

$$\begin{aligned}
\langle P(x_1 + y_1), x_2 + y_2\rangle &= \langle x_1, x_2 + y_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle \\
&= \langle x_1 + y_1, x_2\rangle \\
&= \langle x_1 + y_1, P(x_2 + y_2)\rangle
\end{aligned}$$

gilt

$$P = P^*$$

. **d)** Wegen

$$\forall x \in E, y \in E^{\perp}: \; P^2(x+y) = P(x) = x = P(x+y)$$

gilt

$$P^2 = P$$

■

Satz 41.25 *Sei H ein Hilbertraum und*

$$\begin{aligned} j(y) : H \to \mathbb{C}, x \mapsto \langle x, y \rangle \\ j : H \to H', y \mapsto j(y) \end{aligned}$$

Dann ist j antilinear, längenerhaltend und umkehrbar.
Jedes stetige lineare $f : H \to \mathbb{K}$ *läßt sich also darstellen als*

$$f := \langle \cdot, y \rangle$$

Beweis. a) Sei

$$f_y : H \to \mathbb{K}, x \mapsto \langle x, y \rangle$$

Wegen

$$\begin{aligned} f_y(ax_1 + x_2) &= \langle ax_1 + x_2, y \rangle \\ &= a \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \\ &= af_y(x_1) + f_y(x_2) \end{aligned}$$

ist f linear. Wegen

$$\begin{aligned} \forall x \in H: \; |f_y(x)| &= |\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \| y \| \\ |f_y(y)| &= |\langle y, y \rangle| = \| y \| \| y \| \\ \| f_y \| &= \| y \| \\ \| j(y) \| &\overset{Def}{=} \| f_y \| = \| y \| \end{aligned}$$

ist j längenerhaltend und somit eins zu eins.
b) Wegen

$$\begin{aligned} j(y_1 + cy_2)(x) &= \langle x, y_1 + cy_2 \rangle \\ &= \langle x, y_1 \rangle + \bar{c} \langle x, y_2 \rangle \\ &= j(y_1)(x) + \bar{c} j(y_2)(x) \end{aligned}$$

ist j antilinear.
c): Sei $f \in H'$ mit $\| f \| = 1$ und

$$\begin{aligned} 0 \neq v &= f^{-1}(1) \\ V &= Lin(v) \\ \dim V &= 1 \end{aligned}$$

Wegen

$$1 = \| f \| = \sup_{\|y\|=1} |f(y)|$$

und da f stetig und linear ist, gilt

$$\exists y \in V, \| y \| = 1 : f(y) = 1$$

Für beliebiges

$$x = ay + z \in V + V^{\perp}$$

gilt

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle ay, y \rangle \\ &= a \underbrace{\langle y, y \rangle}_{=1} = a \\ &= a \underbrace{f(y)}_{=1} = f(x) \end{aligned}$$

und somit

$$\langle \cdot, y \rangle = f(\cdot)$$

■

Satz 41.26 *Seien $x, y \in L(H)$ und $(e_i)_{i \in I}$ eine Basis. Dann gilt*

$$\forall v \in H : \ \langle xv, v \rangle = \langle yv, v \rangle \Rightarrow x = y$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} & \langle x(v + cw), (v + cw) \rangle \\ = & \langle xv, v \rangle + c \langle xw, v \rangle + \overline{c} \langle xv, w \rangle + |c|^2 \langle xw, w \rangle \\ & \langle y(v + cw), (v + cw) \rangle \\ = & \langle yv, v \rangle + c \langle yw, v \rangle + \overline{c} \langle yv, w \rangle + |c|^2 \langle yw, w \rangle \end{aligned}$$

Abziehen ergibt mit $c = 1$ und $c = i$

$$\begin{array}{rcl}
c\,(\langle xw, v\rangle - \langle yw, v\rangle) & = & \overline{c}\,(\langle xv, w\rangle - \langle yv, w\rangle) \\
\langle xw, v\rangle - \langle yw, v\rangle & = & \langle yv, w\rangle - \langle xv, w\rangle \\
i\,(\langle xw, v\rangle - \langle yw, v\rangle) & = & \overline{i}\,(\langle yv, w\rangle - \langle xv, w\rangle) \\
(\langle xw, v\rangle - \langle yw, v\rangle) & = & -\,(\langle yv, w\rangle - \langle xv, w\rangle) \\
\langle xw, v\rangle - \langle yw, v\rangle & = & 0 \\
\langle xw, v\rangle & = & \langle yw, v\rangle
\end{array}$$

Das ergibt

$$\begin{array}{rl}
& \forall v \in H:\ \langle xv, v\rangle = \langle yv, v\rangle \\
\Rightarrow & \forall v, w \in H:\ \langle xv, w\rangle = \langle yv, w\rangle \\
\Rightarrow & \forall i, j \in I:\ \langle xe_i, e_j\rangle = \langle ye_i, e_j\rangle \\
\Rightarrow & \forall i, j \in I:\ xe_i = ye_i \\
\Rightarrow & x = y
\end{array}$$

und $\blacksquare$

42. A^*

Satz 42.1 *Seien H ein Hilbertraum und $z_1, z_2 \in H$ mit*

$$z_1 = z_2 \iff \forall x \in H: \ \langle z_1, x\rangle = \langle z_2, x\rangle$$

Beweis. "$\Leftarrow$":

$$\begin{array}{cl} & \forall x \in H: \ \langle z_1, x\rangle = \langle z_2, x\rangle \\ \iff & \forall x \in H: \ \langle z_1 - z_2, x\rangle = 0 \\ \overset{x=z_1-z_2}{\Rightarrow} & \| z_1 - z_2 \|^2 = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = 0 \\ \overset{\text{Länge}}{\Rightarrow} & z_1 = z_2. \end{array}$$

"$\Rightarrow$":

$$\forall x \in H: \ \langle z_1, x\rangle = \langle z_1, x\rangle$$

■

Satz 42.2 *Seien H,K Hilberträume und $A : H \to K$ linear. Dann gilt*

$$\begin{array}{c} \exists! \textit{ stetiges lineares } A^* : K \to H \\ \forall x \in H \ \forall y \in K: \ \langle x, A^*y\rangle_H = \langle Ax, y\rangle_K \end{array}$$

Es gilt auch

$$\begin{array}{rcl} \| A^* \| & = & \| A \| \\ \langle A^*y, x\rangle_H & = & \langle y, Ax\rangle_K \end{array}$$

Beweis. 1.) Sei $y \in \mathbb{K}$. Da

$$H \to \mathbb{C}, x \mapsto \langle Ax, y\rangle_K$$

linear und stetig ist, gilt

$$\exists! z \in H \ \forall x \in H: \ \langle Ax, y\rangle_K = \langle x, z\rangle_H$$

Setze deshalb

$$A^* : K \to H, y \mapsto z$$

Da das z eindeutig ist, ist A^* wohldefiniert.
2.) $\forall x \in H$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \langle x, A^*(ay_1 + by_2)\rangle & \overset{\text{Def von } A^*}{=} & \langle Ax, ay_1 + by_2\rangle \\ & = & \overline{a}\, \langle Ax, y_1\rangle + \overline{b}\, \langle Ax, y_2\rangle \\ & \overset{\text{Def von } A^*}{=} & \overline{a}\, \langle x, A^*y_1\rangle + \overline{b}\, \langle x, A^*y_2\rangle \\ & = & \langle x, aA^*y_1 + bA^*y_2\rangle \end{array}$$

d.h.

$$A^*(ay_1 + by_2) = aA^*y_1 + bA^*y_2$$

Damit ist A^* linear.
3.)

$$\begin{aligned}
\| A^*x \|^2 &= \langle A^*x, A^*x\rangle \\
&\stackrel{Def}{=} \langle AA^*x, x\rangle \\
&\leq \| x \| \| A^*Ax \| \\
&\leq \| A \| \| A^*x \| \| x \| \\
\forall \| x \| = 1 : \| A^*x \| &\leq \| A \| \\
\| A^* \| &\leq \| A \|
\end{aligned}$$

und A^* ist stetig. Außerdem

$$\begin{aligned}
\| Ax \|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle \\
&\stackrel{Def}{=} \langle x, A^*Ax\rangle \\
&\leq \| x \| \| A^*Ax \| \\
&\leq \| A^* \| \| Ax \| \| x \| \\
\forall \| x \| = 1 : \| Ax \| &\leq \| A^* \| \\
\| A \| &\leq \| A^* \| \\
\| A \| &= \| A^* \|
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle y, Ax\rangle &= \overline{\langle Ax, y\rangle} \\
&= \overline{\langle x, A^*y\rangle} \\
&= \langle A^*y, x\rangle
\end{aligned}$$

■

Satz 42.3 *Seien H, K Hilberträume und $A : H \to K$. Dann gilt*

$$\| A^* \| = \| A' \|$$

und das folgende Diagramm vertauscht.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}
j_H : H \to H', y \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle) \\
A : K' \to H', f \mapsto f \circ A
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & A' & \\
K' & \longrightarrow & H' \\
j_K \uparrow & A & j_H \uparrow \\
K & \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} & H \\
 & A^* &
\end{array}
$$

gilt

$$
\begin{array}{rcl}
(A' j_K(x))(y) & \overset{\text{Def von } A'}{=} & j_K(x)(Ay) \\
 & \overset{\text{Def von } j_K}{=} & \langle Ay, x\rangle_K \\
 & \overset{\text{Def von } A^*}{=} & \langle y, A^*x\rangle_H \\
 & \overset{\text{Def von } j_H}{=} & j_H(A^*x)(y) \\
A' j_K & = & j_H A^* \\
A^* & = & j_H^{-1} A' j_K
\end{array}
$$

Da j_K, j_H^{-1} die Länge erhalten, folgt

$$\| A^* \| = \| j^{-1} A' j \| = \| A' \|$$

■

Satz 42.4 *Sei H ein Hilbertraum. Die Abbildung*

$$* : L(H) \to L(H), A \mapsto A^*$$

ist antilinear, längenerhaltend und erfüllt

$$
\begin{array}{rcl}
A^{**} & = & A \\
(AB)^* & = & B^* A^* \\
\| A^* A \| & = & \| A \|^2
\end{array}
$$

Beweis. a) Seien $x, y \in H$ beliebig. Wegen

$$
\begin{array}{rcl}
\langle x, (aA+B)^* y\rangle & = & \langle (aA+B)x, y\rangle \\
 & = & \langle aAx, y\rangle + \langle Bx, y\rangle \\
 & = & a\,\langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle \\
 & = & \langle x, (\overline{a}A^* + B^*)y\rangle \\
(aA+B)^* & = & \overline{a}A^* + B^*
\end{array}
$$

ist A^* antilinear.
b) Wir haben schon gezeigt

$$\| A \| = \| A^* \|$$

c) Wegen

$$\forall x, y \in H: \ \langle A^{**}x, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

gilt da $x \mapsto x^2$ stetig ist

$$A^{**} = A$$

d) Sei $\| x \| = 1$. Wegen

$$\begin{aligned} \| Ax \|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^*Ax \rangle \\ &\leq \| x \|^2 \| A^*A \| \\ &\leq \| A^* \| \| A \| = \| A \|^2 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \| A \|^2 &= \left(\sup_{\|x\|=1} \| Ax \| \right)^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} (\| Ax \|^2) \\ &\leq \| A^*A \| \leq \| A \|^2 \\ \| A \|^2 &= \| A^*A \| \end{aligned}$$

■

Satz 42.5 *Sei $A \in L(H)$. Dann gilt*

$$\| A \| = \sup\{ | \langle Ax, y \rangle | : \| x \| = \| y \| = 1 \}$$

Für $A = A^* \in L(H)$ gilt:

$$\begin{aligned} &1.) \quad \forall x \in H: \ \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} \\ &2.) \quad \| A \| = \sup\{ | \langle Ax, x \rangle | : \| x \| = 1 \} \end{aligned}$$

Beweis. a) Seien $\| x \| = \| y \| = 1$.

$$\begin{aligned} | \langle Ax, y \rangle | &\leq \| Ax \| \underbrace{\| y \|}_{=1} \\ &\leq \| A \| \underbrace{\| x \|}_{=1} = \| A \| \\ \sup\{ | \langle Ax, y \rangle | : \| x \| = \| y \| = 1 \} &\leq \| A \| \end{aligned}$$

und

$$\begin{array}{cl} & \sup\{|\langle Ax,y\rangle| : \| x \| = \| y \| = 1\} \\ \overset{\text{größere Menge}}{\geq} & \sup\left\{\left|\left\langle Ax, \frac{Ax}{\| Ax \|}\right\rangle\right| : \| x \| = 1, \| Ax \| \neq 0\right\} \\ = & \sup\{\| Ax \| : \| x \| = 1\} \\ = & \| A \| \end{array}$$

b) 1.)

$$\overline{\langle Ax,x\rangle} = \langle x,Ax\rangle = \langle x,A^*x\rangle = \langle Ax,x\rangle$$

2.)

$$\begin{array}{rcl} |\langle Ax,x\rangle| & \leq & \| Ax \| \| x \| \\ & \leq & \| A \| \| x \|^2 \\ \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Ax,x\rangle| & \leq & \| A \| \end{array}$$

Da

$$\begin{array}{cl} & \langle Ax,y\rangle + \overline{\langle Ax,y\rangle} \\ = & \langle x,A^*y\rangle + \overline{\langle x,A^*y\rangle} \\ \overset{A=A^*}{=} & \langle x,Ay\rangle + \overline{\langle x,Ay\rangle} \end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{cl} & \langle A(x+y),x+y\rangle - \langle A(x-y),x-y\rangle \\ & +\overline{\langle A(x+y),x+y\rangle} - \overline{\langle A(x-y),x-y\rangle} \\ = & \langle Ax,x\rangle + \langle Ax,y\rangle + \langle Ay,x\rangle + \langle Ay,y\rangle \\ & -(\langle Ax,x\rangle - \langle Ax,y\rangle - \langle Ay,x\rangle + \langle Ay,y\rangle) \\ & +\overline{\langle Ax,x\rangle + \langle Ax,y\rangle + \langle Ay,x\rangle + \langle Ay,y\rangle} \\ & -\overline{(\langle Ax,x\rangle - \langle Ax,y\rangle - \langle Ay,x\rangle + \langle Ay,y\rangle)} \\ = & 2\langle Ax,y\rangle + 2\langle Ay,x\rangle + \overline{2\langle Ax,y\rangle} + 2\overline{\langle Ay,x\rangle} \\ = & 4\langle Ax,y\rangle + 4\overline{\langle Ax,y\rangle} \end{array}$$

Seien $x,y \in H$ mit $\| x \| = \| y \| = 1$.

$$\exists a \in \mathbb{K}, |a| = 1 : \ |\langle Ax,y\rangle| = \overline{a}\langle Ax,y\rangle$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{\langle Ax, ay\rangle}_{\in\mathbb{R}} \\
= \quad & \frac{1}{2}\langle Ax, ay\rangle + \frac{1}{2}\overline{\langle Ax, ay\rangle} \\
= \quad & \frac{1}{8}\langle A(x+ay), x+ay\rangle + \frac{1}{8}\overline{\langle A(x+ay), x+ay\rangle} \\
& -\frac{1}{8}\langle A(x-ay), x-ay\rangle - \frac{1}{8}\langle A(x-ay), x-ay\rangle \\
\overset{x\pm ay\neq 0}{\leq} \quad & \frac{1}{4}\left|\left\langle A\frac{x+ay}{\| x+ay \|}, \frac{x+ay}{\| x+ay \|}\right\rangle\right| \| x+ay \|^2 \\
& +\frac{1}{4}\left|\left\langle A\frac{x-ay}{\| x-ay \|}, \frac{x-ay}{\| x-ay \|}\right\rangle\right| \| x-ay \|^2 \\
\leq \quad & \frac{\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|}{4}\left(\| x+ay \|^2 + \| x-ay \|^2\right) \\
= \quad & \frac{\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|}{4} 2\underbrace{\left(\| x \|^2 + \| ay \|^2\right)}_{=2} \\
= \quad & \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|
\end{aligned}
$$

Für $\| x \|= 1$ mit $\| Ax \|\neq 0$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\| Ax \|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle = |\langle Ax, Ax\rangle| \\
&= \| Ax \| \left|\left\langle Ax, \frac{Ax}{\| Ax \|}\right\rangle\right| \\
&\overset{s.o.}{\leq} \| Ax \| \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \\
\forall \| x \|= 1 : \| Ax \| &\leq \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \\
\| A \| &\leq \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \\
\| A \| &= \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|
\end{aligned}
$$

■

Satz 42.6 *Sei $A \in L(H)$. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
&1.) \qquad Null\ A = (Bild\ A^*)^\perp \\
&2.) \qquad (Null\ A)^\perp = \overline{Bild\ \ A^*}
\end{aligned}
$$

Beweis. 1.)

$$\begin{aligned} x \in (Bild\ A^*)^\perp &\iff \forall z \in H : \langle x, A^* z\rangle = 0 \\ &\iff \forall z \in H : \langle Ax, z\rangle = 0 \\ &\iff Ax = 0 \\ &\iff x \in Null A \end{aligned}$$

2.) Wegen

$$Null A = (Bild\ A^*)^\perp$$

gilt

$$(Null A)^\perp = (Bild\ A^*)^{\perp\perp} = \overline{Bild\ A^*}$$

■

43. Kompakte lineare Abbildungen I

Definition 43.1 *Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen vollständigen Längenräumen. T heißt **kompakt** $\iff$*
Eine der folgenden gleichwertigen Bedingungen ist erfüllt:
1.) Für jede beschränkte Menge M ist $\overline{TM}$ kompakt
2.) $\overline{TB(0,1)}$ ist kompakt
3.) Für jede beschränkte Folge $(x_n)_n$ in X enthält $(Tx_n)_n$ eine Teilfolge, die einen Grenzwert in Y hat.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 3): Da $M = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist und

$$(Tx_n)_n \subset \overline{TM} \text{ kompakt}$$

existiert eine Teilfolge von $(Tx_n)_n$, die einen Grenzwert hat.
3) $\Rightarrow$ 1): Sei $(x_n)_n$ eine Folge in M.
Dann hat $(Tx_n)_n$ eine Teilfolge, die einen Grenzwert hat.
Damit ist $\overline{TM}$ kompakt.
1) $\Rightarrow$ 2): $B(0,1)$ ist beschränkt
2) $\Rightarrow$ 1): Da M beschränkt ist, gilt

$$\exists r : \ M \subset B(0,r)$$

Da

$$f : Y \to Y, y \mapsto ry$$

stetig ist, gilt

$$\underbrace{\overline{TM}}_{\text{abgeschlossen}} \subset \overline{TB(0,r)} = r\overline{TB(0,1)} = f\left(\overline{TB(0,1)}\right) \text{ ist kompakt}$$

Damit ist $\overline{TM}$ kompakt. ∎

Satz 43.2 *1.) Jedes kompakte lineare T ist stetig.*
2.) Sei $T : X \to Y$ stetig, linear und $\dim TX < \infty$. Dann ist T kompakt.
3.) Sei X vollständiger Längenraum $Id : X \to X$ kompakt. Dann gilt $\dim X < \infty$
*4.) Sei H Hilbertraum, $E \subset H$ **abgeschlossener** Untervektorraum und sei*

$$P_E : E \oplus E^\perp \to E, x + y \mapsto x$$

Dann gilt:

$$P_E \textit{ ist kompakt} \iff \dim E < \infty$$

Beweis. 1.) Nach Definition ist T linear.

$$\begin{aligned} T \text{ kompakt} &\Rightarrow \overline{TB(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ &\Rightarrow \overline{TB(0,1)} \text{ ist beschränkt} \\ &\Rightarrow \exists\, C > 0 : \ \overline{TB(0,1)} \subset B(0, C) \\ &\Rightarrow \parallel T \parallel = \sup_{\|x\| \leq 1} \parallel Tx \parallel \leq C \\ &\Rightarrow T \text{ ist stetig} \end{aligned}$$

2.)

$$\overline{TB(0,1)} \subset B(0, \parallel T \parallel) \cap TX$$

ist abgeschlossen und beschränkt in einem endlich dimensionalen Vektorraum, d.h. kompakt.
Damit ist T kompakt.
3.)

$$\begin{aligned} &\text{Id kompakt} \\ \Rightarrow\ & \overline{B(0,1)} = \overline{Id\ B(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ \Rightarrow\ & \dim X < \infty \end{aligned}$$

4.) "$\Leftarrow$": Wegen

$$\dim P_E H = \dim E < \infty$$

ist P_E nach 2.) kompakt.
"$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} &\underbrace{\overline{B_E(0,1)}}_{\text{abgeschlossen}} \overset{P_E|_E = id|_E}{=} \overline{P_E B_E(0,1)} \subset \underbrace{\overline{P_E B_H(0,1)}}_{\text{kompakt nach Vor.}} \\ \Rightarrow\ & \overline{B_E(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ \Rightarrow\ & \dim E < \infty \end{aligned}$$

■

Satz 43.3 *Sei X vollständiger Längenraum und*

$$K(X) = \{K : X \to X \mid K \text{ kompakt } \}$$

Dann ist $K(X)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von L(X) mit

$$\forall K \in K(X)\ \forall T \in L(X) : \ TK, KT \in K(X)$$

Beweis. Setze $B := B(0,1)$
a) Seien T_1, T_2 kompakt.
Da $\overline{T_1 B}, \overline{T_2 B}$ kompakt sind, ist $\overline{T_1 B} \times \overline{T_2 B}$ kompakt. Da

$$f : X \times X \to X, (x,y) \mapsto x + y$$

stetig ist, gilt

$$\overline{T_1 B} + \overline{T_2 B} = f\left(\overline{T_1 B} \times \overline{T_2 B}\right) \text{ ist kompakt}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (T_1+T_2)B = T_1 B + T_2 B &\subset \underbrace{\overline{T_1 B} + \overline{T_2 B}}_{\text{kompakt}} \\ \Rightarrow \quad \underbrace{\overline{(T_1+T_2)B}}_{\text{abgeschlossen}} &\subset \underbrace{\overline{T_1 B} + \overline{T_2 B}}_{\text{kompakt}} \end{aligned}$$

ist $\overline{(T_1+T_2)B}$ kompakt und $T_1 + T_2$ kompakt.
b) Da $B(0,r)$ beschränkt ist, gilt

$$\begin{aligned} T \text{ kompakt} \quad &\Rightarrow \quad \overline{TB(0,r)} \text{ ist kompakt} \\ &\Rightarrow \quad \overline{rTB(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ &\Rightarrow \quad rT \text{ ist kompakt} \end{aligned}$$

c) Sei A stetig, T kompakt.
Da $\overline{TB(0,1)}$ kompakt und A stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} & A\overline{TB(0,1)} \text{ ist kompakt, also abgeschlossen} \\ \Rightarrow \quad & \overline{ATB(0,1)} = A\overline{TB(0,1)} \text{ ist kompakt} \end{aligned}$$

Damit ist AT kompakt.
d) Sei A stetig und T kompakt.
Da $AB(0,1)$ beschränkt ist durch $B(0, \| A \|)$ und T kompakt ist, gilt

$$\overline{TAB(0,1)} \text{ ist kompakt}$$

Somit ist TA kompakt.
e) Seien T_k kompakt mit $\lim_{k\to\infty} T_k = T$ und $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge.
Ohne Einschränkung gelte $(x_n)_n \subset \overline{B(0,1)}$.

$$\begin{aligned} & T_1 \text{ kompakt} \\ \Rightarrow \quad & \exists \text{ Teilfolge } (T_1 x_n^{(1)})_n = (T_1 x_{n_j})_j \text{ von } (T_1 x_n)_n \text{ mit einem Grenzwert} \\ & \forall k \in \mathbb{N} : \; T_k \text{ kompakt} \\ \Rightarrow \quad & \exists \text{ Teilfolge } (T_k x_n^{(k)})_n = (T_k x_{n_j}^{(k-1)})_j \text{ von } (T_k x_n^{(k-1)})_n \\ & \text{ mit einem Grenzwert} \end{aligned}$$

Setze

$$y_i := x_{n_i}^{(i)}$$

Bis auf ein Anfangsstück ist $(y_i)_i$ eine Teilfolge von $(x_{n_i}^{(i)})_{n_i}$, daher gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ (T_n y_i)_i \text{ hat einen Grenzwert}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da T_{n_0} stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \| x_n \| &\leq 1 \\ \forall i \in \mathbb{N} : \| y_i \| &\leq 1 \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \| T_{n_0} - T \| &< \varepsilon \\ \exists i_0 \ \forall i, j \geq i_0 : \| T_{n_0} y_i - T_{n_0} y_j \| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \forall i, j \geq i_0 : \quad & \| Ty_i - Ty_j \| \\ \leq \ & \| Ty_i - T_{n_0} y_i \| + \| T_{n_0} y_i - T_{n_0} y_j \| + \| T_{n_0} y_j - Ty_j \| \\ \leq \ & \underbrace{\| T - T_{n_0} \|}_{<\varepsilon} \underbrace{\| y_i \|}_{\leq 1} + \varepsilon + \underbrace{\| T - T_{n_0} \|}_{<\varepsilon} \underbrace{\| y_j \|}_{\leq 1} \\ < \ & 3\varepsilon \end{aligned}$$

und die Teilfolge $(Ty_i)_i$ von $(Tx_n)_n$ ist Cauchyfolge und hat im vollständigen X einen Grenzwert.
Damit ist T kompakt. ■

Satz 43.4 *Seien $T_n : X \to X$ mit $\dim T_n X < \infty$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} T_n$ kompakt.*

Beweis. Wegen $\dim T_n X < \infty$ sind die T_n kompakt.
Da $K(X)$ abgeschlossen ist, ist $\lim_{n\to\infty} T_n$ kompakt. ■

Satz 43.5 *1.) Seien X, Y vollständige Längenräume.*

$$T : X \to Y \ \textit{ist kompakt} \iff T' : Y' \to X' \ \textit{ist kompakt}$$

2.) Sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ kompakt. Dann ist T^* kompakt.

Beweis. 1.) Da T kompakt ist, ist $\overline{TB_X(0,1)}$ kompakt.
Betrachte eine Folge $(f_n)_n$ mit

$$f_n : \overline{TB_X(0,1)} \to \mathbb{C}$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N} : \| f_n \|_Y \leq 1$$

$$
\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{K} \\
i_X \downarrow & & \downarrow i_Y & & \\
X'' & \xrightarrow[T'']{} & Y'' & &
\end{array}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
|f_n(y)| &\leq \| f_n \| \| y \| \leq \| y \| \\
\forall y \in Y : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(y)| &\leq \| y \|
\end{aligned}
$$

ist die Folge $(f_n)_n$ punktweise beschränkt. Wegen

$$
\begin{aligned}
|f_n(y_1) - f_n(y_2)| &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \| f_n \| \| y_1 - y_2 \| \\
&\leq \| y_1 - y_2 \|
\end{aligned}
$$

ist $(f_n)_n$ gleichgradig stetig und

$$\overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} \text{ ist kompakt}$$

Damit existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die auf $\overline{TB_X(0,1)}$ bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ einen Grenzwert hat. Diese ist Cauchyfolge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \| f_{n_k} - f_{n_l} \|_{\overline{TB_X(0,1)}} \leq \varepsilon$$

Da $B_X(0,1)$ dicht in $\overline{B_X(0,1)}$ ist, $TB_X(0,1)$ dicht in $\overline{TB_X(0,1)}$ ist und $T' f_{n_k}, f_{n_k}$ stetig sind, gilt

$$
\begin{aligned}
\| T' f_{n_k} - T' f_{n_l} \| &= \sup_{x \in \overline{B_X(0,1)}} |T' f_{n_k}(x) - T' f_{n_l}(x)| \\
&= \sup_{x \in B_X(0,1)} |T' f_{n_k}(x) - T' f_{n_l}(x)| \\
&\overset{\text{Def}}{=} \sup_{x \in B_X(0,1)} |f_{n_k}(T \circ x) - f_{n_l}(T \circ x)| \\
&= \sup_{y \in TB_X(0,1)} |f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y)| \\
&= \| f_{n_k} - f_{n_l} \|_{\overline{TB_X(0,1)}} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

und $(T' f_{n_k})_k$ ist eine Cauchyfolge und hat im vollständigen X' einen Grenzwert.

Da $(T'f_n)_n$ eine Teilfolge hat, die einen Grenzwert hat und $(f_n)_n$ in $B_{Y'}(0,1)$ liegt, gilt

$$\begin{array}{cl} & \overline{T'(B_{Y'}(0,1))} \text{ ist kompakt} \\ \Rightarrow & T' \text{ ist kompakt} \\ \overset{\text{analog}}{\Rightarrow} & T'' \text{ ist kompakt} \end{array}$$

Da

$$i_X : X \to X''$$

stetig ist, gilt

$$\begin{array}{l} T''i_X \text{ ist kompakt} \\ i_Y T = T''i_X \text{ ist kompakt} \\ \overline{i_Y TB(0,1)}^{Y''} \text{ ist kompakt} \end{array}$$

Da Y in Y'' abgeschlossen ist und Y'' vollständig ist, gilt

$$\overline{TB(0,1)}^{Y} \text{ ist kompakt}$$

Nach Definition ist dann T kompakt.
2.) Wegen $jB_H(0,1) \subset B_{H'}(0,1)$ ist $jB(0,1)$ beschränkt.

$$\begin{array}{rcl} T' \text{ ist kompakt} & \Rightarrow & \overline{T'jB(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ & \overset{j^{-1} \text{ stetig}}{\Rightarrow} & j^{-1}\overline{T'jB(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ & \Rightarrow & \overline{j^{-1}T'jB(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ & \Rightarrow & \overline{T^*B(0,1)} \text{ ist kompakt} \\ & \Rightarrow & T^* \text{ ist kompakt} \end{array}$$

■

Satz 43.6 *Sei X ein Längenraum, $T \in L(X)$ und TX abgeschlossen. Dann ist*

$$S : (X/TX)' \to Null\ T' \subset X', f \mapsto f \circ pr$$

umkehrbar zwischen vollständigen Längenräumen und S, S^{-1} sind stetig.

Beweis. a) Wir haben schon gezeigt:
Da TX abgeschlossen ist, ist X/TX ein Längenraum.
Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, ist $(X/TX)'$ vollständig.
Da $Null\ T'$ abgeschlossen ist im vollständigen X', ist $Null\ T'$ vollständig.
b) Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in X: \ pr(Tx) & = & Tx + TX = 0 + TX \\ pr \circ T & \equiv & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{pr}{\longrightarrow} & X/TX \\ f \circ pr \searrow & & \swarrow f \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

Sei $f \in (X/TX)'$ beliebig. Wegen

$$\begin{aligned} T'(f \circ pr) &= f \circ \underbrace{pr \circ T}_{=0} = 0 \\ f \circ pr &\in Null(T') \end{aligned}$$

und S ist wohldefiniert.
c) Sei $g \in Null(T')$. Setze

$$f : X/TX \to \mathbb{K}, x + TX \mapsto g(x)$$

Wegen

$$\begin{aligned} & x_1 + TX = x_2 + TX \\ \iff & \exists y \in X : \quad x_1 - x_2 = Ty \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(x_1 + TX) &= g(x_1) \\ &= g(x_2 + Ty) \\ &\stackrel{g \in Null(T)}{=} g(x_2) + \underbrace{g \circ T}_{=0}(y) \\ &= f(x_2 + TX) \end{aligned}$$

und f ist unabhängig vom Vertreter. Wegen

$$\begin{aligned} f(ax_1 + x_2 + TX) &= g(ax_1 + x_2) \\ &= ag(x_1) + g(x_2) \\ &= af(x_1 + TX) + f(x_2 + TX) \end{aligned}$$

ist f linear. Wegen

$$\begin{aligned} \forall x \in X : \ f \circ pr(x) &= f(x + TX) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

gilt

$$f \circ pr = g$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\| f \| &= \sup_{\|x+TX\|_{X/TX} \leq 1} |f(x+TX)| \\
&\overset{f(x+TX)=g(x)}{=} \sup_{\inf\{\|x+Tz\|_X \ | \ z \in X\} \leq 1} |g(x)| \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} |g(x)| \\
&= \| g \|_X < \infty
\end{aligned}$$

ist f stetig und somit ist S auf.
d) Wegen

$$(af_1 + f_2) \circ pr = a(f_1 \circ pr) + f_2 \circ pr$$

ist S linear.
e) Es gelte

$$f \circ pr \equiv 0$$

Da pr auf ist, folgt

$$\begin{aligned}
f(X/TX) = f \circ pr(X) &= \{0\} \\
f &\equiv 0
\end{aligned}$$

d.h. S ist eins zu eins.
f) Wegen

$$\begin{aligned}
\| Sf \| &= \| f \circ pr \| \\
&\leq \| f \| \underbrace{\| pr \|}_{\leq 1} \\
&\leq \| f \| \\
\| S \| &\leq 1
\end{aligned}$$

ist S stetig.
Da $(X/TX)'$ und $Null(T')$ vollständig sind, ist S^{-1} stetig. ∎

Satz 43.7 *Sei X vollständiger Längenraum, $K \in K(X)$ kompakt. Dann gilt:*
1.) $\dim Null(1-K) < \infty$.
2.) $(1-K)X$ *ist abgeschlossen.*
3.) $\dim X/(1-K)X < \infty$.

Beweis. 1.)

$$\begin{aligned} \forall v \in Null(1-K): \ (1-K)(v) &= 0 \\ K|_{Null(1-K)} &\equiv id|_{Null(1-K)} \text{ ist kompakt} \\ \dim Null(1-K) &< \infty \end{aligned}$$

2.)a) Wegen $\dim Null(1-K) < \infty$ existiert ein lineares stetiges $P: X \to X$ mit $P^2 = P$ und

$$\begin{aligned} &X = PX \oplus (1-P)X \\ &PX, (1-P)X \text{ ist abgeschlossen} \end{aligned}$$

und

$$X = Null(1-K) \oplus (Null(1-K))^C$$

Die Abbildung

$$1-K : (Null(1-K))^C \to (1-K)X$$

ist stetig, da $1-K$ stetig ist. Wegen

$$Null(1-K) \cap (Null(1-K))^C = \{0\}$$

ist sie eins zu eins und wegen

$$\begin{aligned} (1-K)(Null(1-K))^C &= (1-K)(Null(1-K) \oplus (Null(1-K))^C) \\ &= (1-K)X \end{aligned}$$

ist sie auf.
b) Annahme

$$(1-K)^{-1} : (1-K)X \to (Null(1-K))^C$$

ist nicht stetig, d.h.

$$\begin{aligned} & \exists (y_n)_n \text{ in } (1-K)X : \Big(\lim_{n\to\infty} y_n = y \\ & \quad \text{und } \neg \Big(\lim_{n\to\infty} (1-K)^{-1} y_n = (1-K)^{-1} y \Big) \Big) \\ \overset{1-K \text{ umkehrbar}}{\Longleftrightarrow} \ & \exists (x_n)_n \text{ in } X : \Big(\lim_{n\to\infty} (1-K)x_n = (1-K)x \\ & \quad \text{und } \neg \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = x \Big) \Big) \\ \overset{1-K \text{ linear}}{\Longleftrightarrow} \ & \exists (x_n)_n \text{ in } X : \Big(\lim_{n\to\infty} (1-K)x_n = 0 \text{ und } \neg \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Big) \Big) \end{aligned}$$

Wegen

$$\neg\left(\lim_{n\to\infty} x_n = 0\right) \iff \exists\varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0 : \parallel x_n \parallel \geq \varepsilon$$

betrachte die Teilfolge von $(x_n)_n$ (nenne sie wieder $(x_n)_n$) mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \parallel x_n \parallel \geq \varepsilon$$

Da K kompakt ist, hat $(Kx_n)_n$ eine Teilfolge $(Kx_{n_k})_k$ mit einem Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} (Kx_{n_k})_k = z$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} x_{n_k} &= \lim_{k\to\infty} (1-K)x_{n_k} + \lim_{k\to\infty} Kx_{n_k} \\
&= z
\end{aligned}$$

Da $x_{n_k} \in (Null(1-K))^C$ und da $(Null(1-K))^C$ abgeschlossen ist, gilt

$$z \in (Null(1-K))^C$$

Da $(1-K)$ stetig ist und da $(x_{n_k})_k$ Teilfolge von $(x_n)_n$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
(1-K)z &= \lim_{k\to\infty} (1-K)x_{n_k} = 0 \\
z &\in Null(1-K) \\
z &\in Null(1-K) \cap (Null(1-K))^C \\
z &= 0 \\
\parallel z \parallel &= 0
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu

$$\parallel z \parallel = \lim_{k\to\infty} \parallel x_{n_k} \parallel \geq \varepsilon$$

c)

$$\begin{aligned}
& (Null(1-K))^C \text{ ist abgeschlossen} \\
\Rightarrow\ & (Null(1-K))^C \text{ ist vollständig} \\
\overset{b)}{\Rightarrow}\ & (1-K)X \text{ ist vollständig} \\
\Rightarrow\ & (1-K)X \text{ ist abgeschlossen}
\end{aligned}$$

c) Betrachte

$$(1-K)' : X' \to X', f \mapsto f \circ (1-K)$$

Für $f \in X'$ gilt

$$\begin{aligned} f \in Null(1-K)' &\iff (1-K)'f = 0 \\ &\iff f \circ (1-K) = 0 \\ &\iff f = f \circ K \\ &\iff f = K'f \\ &\iff (1-K')f = 0 \\ &\iff f \in Null(1-K') \end{aligned}$$

Da K' kompakt ist, gilt nach 1.)

$$\dim Null(1-K') < \infty$$

Da $(1-K)X$ abgeschlossen ist, ist

$$S : (X/(1-K)X)' \to Null(1-K)', f \mapsto f \circ x$$

umkehrbar und S, S^{-1} sind stetig und linear. Das ergibt

$$\begin{aligned} \dim(X/(1-K)X)' &= \dim Null(1-K)' \\ &= \dim Null(1-K') \\ &< \infty \end{aligned}$$

■

Satz 43.8 *Sei X ein vollständiger Längenraum und $u \in L(X)$. Seien M,L abgeschlossene Untervektorräume von X mit*

$$\begin{aligned} M &\subsetneq L \\ (1-u)L &\subset M \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\exists a \in L, \| a \| = 1 \ \forall x \in M : \| u(x) - u(a) \| \geq \frac{1}{2}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall y \in L : \ u(y) &= \underbrace{y}_{\in L} - \underbrace{(1-u)y}_{\in M \subset L} \in L \\ u(L) &\subset L \\ \forall y \in M : \ u(y) &= \underbrace{y}_{\in M} - \underbrace{(1-u)y}_{\in M} \in M \\ u(M) &\subset M \end{aligned}$$

Betrachte

$$L \to L/M, y \mapsto y + M$$

Sei $x \in L$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(x) - x &= (1-u)\underbrace{(-x)}_{\in L} \overset{\text{Vor}}{\in} M \\ (u(x)-x) + M &= 0 + M \\ u(x) + M &= x + M \end{aligned}$$

Wegen $M \subsetneqq L$ wähle $b \in L$ mit

$$\begin{aligned} \| b + M \|_{L/M} &= \inf\{\| b + z \| : z \in M\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da

$$M \to [0, \infty), z \mapsto \| b + z \|$$

stetig und unbeschränkt ist, gilt

$$\exists z_1 \in M : \| b + z_1 \| = 1$$

Für $a := b + z_1$ gilt

$$\begin{aligned} \| a \| &= 1 \\ \| a + M \| &= \| b + z_1 + M \| \\ &= \| b + M \| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für $x \in M$ folgt

$$\begin{aligned} \| \underbrace{u(x)}_{\in M} - u(a) \| &\geq \inf\{u(a) + x : x \in M\} \\ &= \| u(a) + M \| \\ &= \| a + M \| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Satz 43.9 *Sei X vollständiger Längenraum über $\mathbb{C}$ und $K : X \to X$ kompakt. Setze*

$$\begin{aligned} N_m &= Null(1-K)^m \\ F_m &= (1-K)^m X \end{aligned}$$

Dann gilt:
1.) F_m *und* N_m *sind abgeschlossene Untervektorräume*
2.) $\forall m \in \mathbb{N}: \ \dim N_m < \infty$ *und* $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ *und* $(1-K)N_{m+1} = N_m$
3.) $\forall m \in \mathbb{N}: \ \dim X/F_m < \infty$ *und* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ *und* $(1-K)F_{m+1} = F_m$
4.) $\exists m_0 \in \mathbb{N} \ \forall m \geq m_0 : \ N_{m+1} = N_m = N_{m_0}$
5.) $\exists m_1 \in \mathbb{N} \ \forall m \geq m_1 : \ F_{m+1} = F_m = F_{m_1}$.
6.) $N_{m_0} \cap F_{m_0} = \{0\}$
7.) $N_{m_1} + F_{m_1} = X$
8.) $m_0 = m_1$
9.) $X = N_{m_0} \oplus F_{m_0}$
10.) $1-K : F_{m_0} \to F_{m_0}$ *ist stetig umkehrbar.*
11.) Für $1-K : N_{m_0} \to N_{m_0}$ *gilt* $\exists m \in \mathbb{N} : (1-K)|_{N_{m_0}}^m = 0$.
12.) $N_{m_0} \neq \{0\} \Rightarrow Null(1-K) \neq \{0\}$.
13.) $KN_{m_0} \subset N_{m_0}$ *und* $KF_{m_0} \subset F_{m_0}$
14.) $\dim X = \infty \Rightarrow K$ *nicht umkehrbar.*

Beweis. 1.) Da K kompakt ist, ist

$$\begin{aligned} K_m &:= 1-(1-K)^m \\ &= 1-\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(-K)^i \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(-K)^i \end{aligned}$$

kompakt. Wir haben gezeigt, dass dann gilt

$$\begin{aligned} 1-K_m &= (1-K)^m \\ \dim N_m &= \dim Null(1-K)^m \\ &= \dim Null(1-K_m) < \infty \\ \dim X/F_m &= \dim X/(1-K)^m X \\ &= \dim X/(1-K_m)X < \infty \\ F_m &= (1-K)^m X = (1-K_m)X \text{ ist abgeschlossen} \\ N_m &= Null(1-K)^m \text{ ist abgeschlossen} \end{aligned}$$

2.) Wegen

$$\begin{aligned} x \in N_n &\iff (1-K)^n x = 0 \\ &\Rightarrow (1-K)(1-K)^n x = 0 \\ &\iff x \in N_{n+1} \end{aligned}$$

gilt

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots$$

Wegen

$$\begin{aligned} x \in N_{n+1} \quad &\iff \quad (1-K)^{n+1}x = 0 \\ &\iff \quad (1-K)^n(1-K)x = 0 \\ &\iff \quad (1-K)x \in N_n \end{aligned}$$

gilt

$$(1-K)N_{n+1} = N_n$$

3.) Wegen

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= (1-K)^m(1-K)X \\ &\subset (1-K)^m X \\ &= F_m \end{aligned}$$

gilt

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots$$

Es gilt

$$(1-K)F_m = (1-K)(1-K)^m X = F_{m+1}$$

4.) Annahme: N_m wird nicht konstant für ein m, d.h.

$$\forall m \in \mathbb{N}: \ N_m \subsetneq N_{m+1}$$

Da die N_m abgeschlossen sind und wegen $(1-K)N_{m+1} = N_m$ gilt

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \exists x_{m+1} \in F_{m+1}, \| \ x_{m+1} \ \| = 1 \ \forall x \in N_m : \| \ Kx - Kx_{m+1} \ \| \geq \frac{1}{2}$$

Wegen $N_1 \subset \ldots \subset N_m$ erhalten wir eine Folge $(x_n)_n$ mit $\| \ x_n \ \| = 1$ und

$$\forall n > m \geq 1 : \| \ Kx_n - Kx_m \ \| \geq \frac{1}{2}$$

im Widerspruch zu $(Kx_n)_n$ hat eine Teilfolge mit einem Grenzwert, d.h.

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}: \ N_{m_0} = N_{m_0+1}$$

$r \to r+1$:

$$\begin{aligned} x \in N_{m_0+r+1} \quad &\Rightarrow \quad (1-K)^{m_0+r+1}x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (1-K)^{m_0+1}(1-K)^r x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (1-K)^r x \in N_{m_0+1} = N_{m_0} \\ &\Rightarrow \quad (1-K)^{m_0}(1-K)^r x = 0 \\ &\Rightarrow \quad x \in N_{m_0+r} \\ &\Rightarrow \quad N_{m_0+r+1} \subset N_{m_0+r} \\ &\Rightarrow \quad N_{m_0+r+1} = N_{m_0+r} \end{aligned}$$

5.) Annahme:

$$\forall m \in \mathbb{N}: \; F_m \supsetneqq F_{m+1}$$

Da die F_m abgeschlossen sind und wegen $(1-K)F_m \subset F_{m+1}$ gilt

$$\forall m \in \mathbb{N} \; \exists x_{m+1} \in F_{m+1}, \| x_{m+1} \| = 1 \; \forall x \in F_m : \| Kx - Kx_{m+1} \| \geq \frac{1}{2}$$

Induktion ergibt wegen $F_1 \supset \ldots \supset F_m$ eine Folge $(x_n)_n$ mit $\| x_n \| = 1$ und

$$\forall m > n \geq 1 : \| Kx_n - Kx_m \| \geq \frac{1}{2}$$

im Widerspruch zu $(Kx_n)_n$ hat eine Teilfolge mit einem Grenzwert.
$r \to r+1:$

$$x \in F_{m_1+r} \Rightarrow \exists y : x = (1-K)^{m_1+r} y$$

Wegen

$$(1-K)^{m_1} y \in F_{m_1} = F_{m_1+1}$$

gilt

$$\exists z : \; (1-K)^{m_1} y = (1-K)^{m_1+1} z$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} x &= (1-K)^{m_1+r} y \\ &= (1-K)^{r+m_1+1} z \\ &\in F_{m_1+r+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_{m_1+r} &\subset F_{m_1+r+1} \\ F_{m_1+r} &= F_{m_1+r+1} \end{aligned}$$

6.) Sei $x \in N_{m_0} \cap F_{m_0}$. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &\overset{x \in N_{m_0}}{=} (1-K)^{m_0} x \\ \exists y \in X : x &\overset{x \in F_{m_0}}{=} (1-K)^{m_0} y \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & (1-K)^{2m_0} y = 0 \\ \Rightarrow \quad & y \in N_{m_0} = N_{2m_0} \\ \Rightarrow \quad & (1-K)^{m_0} y = 0 \\ \Rightarrow \quad & x = (1-K)^{m_0} y = 0 \\ \Rightarrow \quad & N_{m_0} \cap F_{m_0} = \{0\} \end{aligned}$$

7.) Sei $x \in X$. Wegen

$$(1-K)^{m_1}x \in F_{m_1} = F_{2m_1}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\exists y \in X: \ (1-K)^{m_1}x &= (1-K)^{2m_1}y \\
(1-K)^{m_1}(x-(1-K)^{m_1}y) &= (1-K)^{m_1}x-(1-K)^{2m_1}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
x &= (x-(1-K)^{m_1}y)+(1-K)^{m_1}y \\
&\in N_{m_1}+F_{m_1}
\end{aligned}$$

8.), 9.) Sei $x \in N_{m_0}$. Annahme: $m_0 > m_1$

$$\begin{aligned}
m_0 > m_1 &\Rightarrow F_{m_1} = F_{m_0} \\
&\Rightarrow x = y+z \in N_{m_1}+F_{m_1} \\
&\Rightarrow \begin{cases} z = \underbrace{x}_{\in N_{m_0}} - \underbrace{y}_{\in N_{m_1} \subset N_{m_0}} \in N_{m_0} \\ z \in F_{m_1} = F_{m_0} \end{cases} \\
&\Rightarrow z = 0 \\
&\Rightarrow x \in N_{m_1} \\
&\Rightarrow N_{m_0} \subset N_{m_1} \\
&\Rightarrow N_{m_0} = N_{m_1}
\end{aligned}$$

Annahme: $m_0 < m_1$. Sei $x \in F_{m_0}$.

$$\begin{aligned}
m_0 < m_1 &\Rightarrow N_{m_1} = N_{m_0} \\
&\Rightarrow x = y+z \in N_{m_1}+F_{m_1} \\
&\Rightarrow \begin{cases} y = \underbrace{x}_{\in F_{m_0}} - \underbrace{z}_{\in F_{m_1} \subset F_{m_0}} \in F_{m_0} \\ y \in N_{m_1} = N_{m_0} \end{cases} \\
&\Rightarrow y = 0 \\
&\Rightarrow x \in F_{m_1} \\
&\Rightarrow F_{m_0} \subset F_{m_1} \\
&\Rightarrow F_{m_0} = F_{m_1}
\end{aligned}$$

10.) Die Abbildung

$$1-K : F_{m_0} \to F_{m_0+1} = F_{m_0}$$

ist auf, stetig und wegen

$$\begin{aligned} Null(1-K)\cap F_{m_0} &= N_1 \cap F_{m_0} \\ &\subset N_{m_0}\cap F_{m_0} = \{0\} \end{aligned}$$

ist sie eins zu eins.
Da F_{m_0} vollständig ist, ist $(1-K)^{-1} : F_{m_0} \to F_{m_0}$ stetig.
11.) Betrachte $1-K : N_{m_0+1} = N_{m_0} \to N_{m_0}$.

$$\begin{aligned} x \in N_{m_0} &\Rightarrow (1-K)^{m_0}x = 0 \\ &\Rightarrow \forall m \geq m_0 : \ (1-K)^m x = 0 \end{aligned}$$

12.) Da m_0 minimal ist mit

$$0 \subsetneqq N_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq N_{m_0} = N_{m_0+1} = \ldots$$

gilt

$$N_{m_0} \neq \{0\} \Rightarrow Null(1-K) = N_1 \neq \{0\}$$

13.)

$$\begin{aligned} x \in N_{m_0} = N_{m_0+1} &\Rightarrow (1-K)^{m_0}(1-K)x = 0 \\ &\Rightarrow (1-K)x \in N_{m_0} \\ &\overset{N_{m_0}\text{ Vektorraum}}{\Rightarrow} Kx = \underbrace{1\cdot x}_{\in N_{m_0}} - \underbrace{(1-K)x}_{\in N_{m_0}} \in N_{m_0} \\ &\Rightarrow KN_{m_0} \subset N_{m_0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in F_{m_0} &\Rightarrow \exists y \in X : \ x = (1-K)^{m_0} y \\ &\Rightarrow \exists y \in X : \ (1-K)x = (1-K)^{m_0+1} y \in F_{m_0} \\ &\overset{F_{m_0}\text{ Vektorraum}}{\Rightarrow} Kx = \underbrace{1\cdot x}_{\in F_{m_0}} - \underbrace{(1-K)x}_{\in F_{m_0}} \in F_{m_0} \\ &\Rightarrow KF_{m_0} \subset F_{m_0} \end{aligned}$$

14.)

$$\begin{aligned} K \text{ ist umkehrbar} &\overset{X\text{ vollständig}}{\Rightarrow} K^{-1} \text{ ist stetig} \\ &\Rightarrow id = KK^{-1} \text{ ist kompakt} \\ &\Rightarrow \dim X < \infty \end{aligned}$$

■

44. Spektralwerte

Spektralwerte sind die Verallgemeinerung der Eigenwerte. Im Folgenden gilt $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 44.1 *1.) Eine **Algebra** ist ein Vektorraum X mit einer zweilinearen Multiplikation*

$$\cdot : X \times X \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto xy$$

und

$$\forall x, y, z : \ (xy)z = x(yz)$$

*2.) Die Algebra hat eine **Eins** $\Longleftrightarrow$*

$$\exists 1 \in X \ \forall x \in X : \ 1x = x1 = x$$

*3.) Eine **Algebra mit einer Länge** oder **Längenalgebra** ist eine Algebra über $\mathbb{C}$ mit*

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$$

*4.) Eine **Unteralgebra** ist ein Untervektorraum, der abgeschlossen ist unter Multiplikation.*

Satz 44.2 *a) In einer Längenalgebra ist*

$$\cdot : X \times X \to \mathbb{C}, (x, y) \to xy$$

stetig
b) Ist X ein vollständiger Längenraum, so ist L(X) eine vollständige Längenalgebra mit Eins.
Insbesondere ist $M_n(\mathbb{C})$ eine vollständige Längenalgebra.
c) $L(X)$ vertauscht $\Longleftrightarrow$ $\dim X = 1$ oder $\dim X = 0$.
d) Ist X kompakt, so ist $(C(X, \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ eine vertauschende vollständige Längenalgebra.

Beweis. a) Mit $C = 1$ und

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$$

ist es eine stetige Zweilinearform.
b) Da X vollständig ist, ist L(X) vollständig. Wir haben schon gezeigt

$$\begin{aligned} (aA + B)C &= aAC + BC \\ C(aA + B) &= aCA + CB \\ (AB)C &= A(BC) \\ A \circ id &= id \circ A = A \\ \| AB \| &\leq \| A \| \| B \| \end{aligned}$$

c) $X = \{0\}$ enthält nur ein Element und ist somit vertauschend.
$X = \mathbb{K}$ ist als Körper vertauschend. Wegen

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist die Unteralgebra $M_2(\mathbb{C})$ nicht-vertauschend.
Für $\dim X \geq 2$ vertauscht $L(X)$ also nicht.
d) $C(X, \mathbb{K})$ ist ein vollständiger Längenraum.
$f(x)g(x)$ ist zweilinear und $f(gh) = (fg)h$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\forall x \in X: \; f(x)g(x) &\leq \| f \|_\infty \| g \|_\infty \\
\| fg \|_\infty &\leq \| f \|_\infty \| g \|_\infty
\end{aligned}$$

■

Satz 44.3 *Sei A vollständige Längenalgebra mit Eins.*
a) Ist $x \in A$ mit $\| 1 - x \| < 1$, so ist x umkehrbar und es gilt

$$x^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - x)^k$$

b) Sei $x \in A$ umkehrbar und

$$\exists y \in A : \| x - y \| < \frac{1}{\| x^{-1} \|}$$

Dann ist y umkehrbar mit

$$y^{-1} = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - yx^{-1})^k$$

c) Die Menge der umkehrbaren Elemente $Gl(A)$ ist offen.
d) Die Abbildung

$$Gl(A) \to Gl(A), x \mapsto x^{-1}$$

ist stetig.

Beweis. a) Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left\| (1 - x)^k \right\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \| 1 - x \|^k \\
&= \frac{1}{1 - \| 1 - x \|} < \infty
\end{aligned}$$

hat die Reihe im vollständigen Längenraum einen Grenzwert y

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k = y$$

Wegen

$$\begin{array}{rcl}
xy & \xleftarrow{\text{Multiplikation stetig}} & x\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k \\
& = & (1-(1-x))\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k \\
& = & \sum_{k=0}^{n}(1-x)^k - \sum_{k=1}^{n+1}(1-x)^k \\
& = & 1-(1-x)^{n+1} \\
& \xrightarrow{\|1-x\|^{n+1}\to 0} & 1
\end{array}$$

gilt

$$xy = 1$$

Analog gilt

$$yx = 1$$

Das ergibt

$$x^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k$$

b) Wegen

$$\begin{aligned}
\| 1 - yx^{-1} \| &= \| (x-y)x^{-1} \| \\
&\leq \| x - y \| \| x^{-1} \| < 1 \\
\sum_{k=0}^{\infty}(1-yx^{-1})^k &= (yx^{-1})^{-1} \\
yx^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(1-yx^{-1})^k &= yx^{-1}(yx^{-1})^{-1} = 1
\end{aligned}$$

gilt

$$y^{-1} = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(1-yx^{-1})^k$$

c) $Gl(A)$ ist offen nach b)
d) Für umkehrbares x und $\| x-y \| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ existiert nach b) auch y^{-1}. Es gilt

$$\begin{aligned} c &:= \| 1 - yx^{-1} \| \\ &\leq \| x^{-1} \| \| x-y \| \\ &\overset{y \to x}{\to} 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \| y^{-1} - x^{-1} \| &= \left\| x^{-1} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (1-yx^{-1})^n \right) \right\| \\ &\leq \| x^{-1} \| \sum_{n=1}^{\infty} \| 1 - yx^{-1} \|^n \\ &= \| x^{-1} \| \left(\frac{1}{1-c} - 1 \right) \\ &= \| x^{-1} \| \frac{c}{1-c} \\ &\overset{y \to x}{\to} 0 \end{aligned}$$

■

Definition 44.4 *Sei A eine vollständige Längenalgebra mit Eins und $x \in A$.*

$$Sp\ x = \{ c \in \mathbb{C} | (c \cdot 1 - x) \text{ ist nicht umkehrbar} \} \subset \mathbb{C}$$

*ist das **Spektrum von x**.*
*Die Elemente heißen **Spektralwerte**.*

Satz 44.5 *Sp x ist abgeschlossen und beschränkt, insbesondere kompakt.*

$$Sp\ x \subset \overline{B(0, \| x \|)}$$

Beweis. Sei x fest. Betrachte die stetige Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to A, c \mapsto c \cdot 1 - x$$

Da Gl(A) offen ist, ist

$$\mathbb{C} \backslash Sp\ x = f^{-1}(\underbrace{Gl(A)}_{\text{offen}})$$

offen, somit Sp x abgeschlossen.
Sei $|c| > \| x \|$. Wegen

$$\begin{aligned} c > \| x \| \quad &\Rightarrow \quad \left\| 1 - \left(1 - \frac{x}{c}\right) \right\| = \left\| \frac{x}{c} \right\| < 1 \\ &\Rightarrow \quad 1 - \frac{x}{c} \text{ ist umkehrbar} \\ &\Rightarrow \quad c \cdot 1 - x = c \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right) \text{ ist umkehrbar} \\ &\Rightarrow \quad Sp\ x \subset \overline{B(0, \| x \|)} \end{aligned}$$

ist Sp x beschränkt. ■

Satz 44.6 *Sei A* ***vollständige*** *Längenalgebra.*

$$\forall x \in A: \ Sp(x) \neq \emptyset$$

Beweis. a) Seien $a, b \in \mathbb{C} \backslash Sp\ x$.

$$\begin{aligned} & ((a-x)^{-1} - (b-x)^{-1})(a-x)(b-x) \\ = \ & (b-x) - (b-x)^{-1}(b-x)(a-x) \\ = \ & (b-x) - (a-x) \\ = \ & b - a \end{aligned}$$

d.h.

$$(a-x)^{-1} - (b-x)^{-1} = (b-a)(a-x)^{-1}(b-x)^{-1}$$

b) Annahme:

$$Sp\ x = \emptyset$$

Wähle ein stetiges lineares $f: A \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x^{-1}) \neq 0$$

und setze

$$g: \mathbb{C} = (Sp\ x)^C \to \mathbb{C}, a \mapsto f((a-x)^{-1})$$

Sei $b \in \mathbb{C}$ beliebig. Da

$$\mathbb{C} = (Sp\ x)^C \to A, b \mapsto (b-x)^{-1}$$

stetig ist und da f stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{g(a) - g(b)}{a - b} \quad &= \quad \frac{f((a-x)^{-1}) - f((b-x)^{-1})}{a-b} \\ &\overset{f \text{ linear}}{=} \quad f\left(\frac{(a-x)^{-1} - (b-x)^{-1}}{a-b}\right) \\ &\overset{a)}{=} \quad -f((a-x)^{-1}(b-x)^{-1}) \\ &\overset{a \to b}{\longrightarrow} \quad -f(((b-x)^{-1})^2) \end{aligned}$$

Da b beliebig war, ist g holomorph.
Wegen

$$\begin{array}{rl} & 1-\frac{x}{a} \stackrel{|a|\to\infty}{\to} 1 \\ \stackrel{y\mapsto y^{-1}\text{ stetig}}{\Rightarrow} & \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1} \stackrel{|a|\to\infty}{\to} 1 \\ \Rightarrow & (a-x)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to 0}\underbrace{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1}}_{\to 1} \stackrel{|a|\to\infty}{\to} 0 \\ \Rightarrow & \exists R>0\ \forall a \in B(0,R)^C : |g(a)| < 1 \end{array}$$

Da g stetig ist, ist es auf dem kompakten $\overline{B(0,R)}$ beschränkt.
Damit ist g auf $\mathbb{C} = B(0,R)^C \cup \overline{B(0,R)}$ beschränkt.
Mit dem Satz von Liouville der Funktionentheorie ist g konstant. Wegen

$$\lim_{|a|\to\infty} |g(a)| = 0$$

folgt

$$g \equiv 0$$

im Widerspruch zu

$$g(0) = f((0-x)^{-1}) = -f(x^{-1}) \neq 0$$

d.h.

$$\forall x \in A: \ Sp\ x \neq \emptyset$$

■

Satz 44.7 *Sei A eine vollständige Längenalgebra mit 1, nicht notwendig vertauschend und $x \in A$ beliebig.*
*Der **Spektralradius von x** ist definiert als:*

$$r(x) := \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$$

und es gilt

$$\begin{array}{rcl} r(x) & \leq & \| x \| \\ \forall a \in \mathbb{C}: \ Sp(ax) & = & aSp\ x \\ \forall a \geq 0: \ r(ax) & = & ar(x) \\ Sp\ x & \subset & \overline{B(0, r(x))} \\ \exists a \in Sp\ x: \ |a| & = & r(x) \\ r(x) & = & \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

Beweis. a)

$$\begin{array}{rcl} r(x) & = & \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n} \\ & \overset{\|x^n\|\leq\|x\|^n}{\leq} & \limsup_{n\to\infty} (\| x \|^n)^{1/n} = \| x \| \end{array}$$

b) Sei $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcl} c \in Sp\ ax & \Longleftrightarrow & ax - c = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x - \dfrac{c}{a} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{c}{a} \in Spx \\ & \Longleftrightarrow & c \in aSpx \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} r(ax) & = & \limsup_{n\to\infty} \| (ax)^n \|^{1/n} \\ & = & \limsup_{n\to\infty} a \| x^n \|^{1/n} \\ & = & a \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n} \\ & = & ar(x) \end{array}$$

d) Sei c mit $|c| > r(x)$. Wegen

$$\exists 0 < a < 1 : |c| > a|c| > r(x) = \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n}$$
$$\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \| x^n \|^{1/n} < a|c|$$
$$\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left\| \frac{x^n}{c^n} \right\| \leq a^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{x}{c} \right\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{c} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{c}\right)^n & = & \dfrac{1}{c} \left(1 - \dfrac{x}{c}\right)^{-1} \\ & = & (c-x)^{-1} \end{array}$$

und $c - x$ ist umkehrbar, d.h.

$$c \notin Spx$$
$$Sp(x) \subset \overline{B(0, r(x))}$$

e)

$$\exists a \in Sp\ x: \ |a| = r(x)$$

Das kann ich leider nicht beweisen.
f) Sei $p \in \mathbb{N}$ fest und

$$a_n = \| x^n \|$$

Mit

$$\exists 0 \le r_m < p: \ m = k_m p + r_m$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} a_m & = & \| x^m \| = \| x^{k_m p} x^{r_m} \| \\ & \le & \| x^p \|^{k_m} \| x^{r_m} \| \\ & = & a_p^{k_m} a_{r_m} \\ a_m^{\frac{1}{m}} & \le & a_p^{\frac{1}{p}\frac{k_m p}{m}} a_{r_m}^{\frac{1}{m}} \\ & \le & \left(a_p^{\frac{1}{p}}\right)^{1-\frac{r_m}{m}} \left(\max_{i=1}^{p} a_i\right)^{\frac{1}{m}} \\ & \stackrel{m\to\infty}{\to} & \left(a_p^{\frac{1}{p}}\right) \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{rcl} \forall p \in \mathbb{N}: \ \limsup\limits_{m\to\infty} \left(a_m^{\frac{1}{m}}\right) & \le & \left(a_p^{\frac{1}{p}}\right) \\ \limsup\limits_{m\to\infty} \left(a_m^{\frac{1}{m}}\right) & \le & \liminf\limits_{p\to\infty} \left(a_p^{\frac{1}{p}}\right) \end{array}$$

■

Satz 44.8 *1.) Jeder Eigenwert ist Spektralwert.*
2.) In endlich-dimensionalen Vektorräumen gilt:

$$\textit{Eigenwert} \iff \textit{Spektralwert}$$

Beweis. 1.) Sei a Eigenwert zu T, d.h.

$$\exists 0 \ne x \in X: \ Tx = ax$$

Dann gilt

$$\begin{array}{rl} & x \in Null(a - T) \\ \Rightarrow & a - T \text{ ist nicht eins zu eins} \\ \Rightarrow & a - T \text{ ist nicht umkehrbar} \\ \Rightarrow & a \in Sp\ T \end{array}$$

2.)

$$\begin{aligned} a \in Sp\,T &\iff a - T \text{ ist nicht umkehrbar} \\ &\overset{\dim V < \infty}{\iff} a - T \text{ ist nicht eins zu eins} \\ &\iff a \text{ ist Eigenwert} \end{aligned}$$

■

Satz 44.9 *Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ senkrechte Basis mit Länge 1 und Betrachte die Fortsetzung von*

$$T : l^2(\mathbb{N}_0) \to l^2(\mathbb{N}_0), \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_{n+1}$$

T ist längenerhaltend, aber nicht umkehrbar.
0 ist Spektralwert, aber kein Eigenwert.

Beweis. T ist linear und wegen

$$\begin{aligned} \left\| T \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{i+1} \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right\|^2 \end{aligned}$$

ist T längenerhaltend. Damit gilt

$$\| T \| \leq 1$$

Wegen

$$\| Te_n \| = \| e_{n+1} \| = 1$$

gilt

$$\| T \| = 1$$

Wegen

$$\| Tx \| = 0 \Rightarrow \| x \| = \| Tx \| = 0$$

ist T eins zu eins. Wegen

$$e_0 \notin Bild\ T = \overline{Lin\{e_1, e_2, \ldots\}} \perp e_0$$

ist T nicht auf, d.h.

$$\begin{aligned}
&T \text{ ist nicht umkehrbar}\\
&0 - T = -T \text{ ist nicht umkehrbar}\\
&0 \in SpT.
\end{aligned}$$

Wegen

$$Tx = 0 \overset{\text{eins zu eins}}{\Rightarrow} x = 0$$

ist 0 ist aber kein Eigenwert. ■

45. Kompakte lineare Abbildungen II

Definition 45.1 *Sei X vollständig und $T \in L(X)$. Das Spektrum von T ist*

$$Sp(T) = \{a \in \mathbb{C} \;:\; a1 - T \text{ ist nicht umkehrbar}\}$$

Beweis. Da X vollständig ist, gilt

$$a1 - T \text{ ist nicht stetig umkehrbar} \iff a1 - T \text{ ist nicht umkehrbar}$$

■

Satz 45.2 *Sei $T \in L(H)$ mit $\exists n \in \mathbb{N}: \; T^n \equiv 0$. Dann ist $1 - T$ umkehrbar.*

Beweis. Sei $T^n = 0$. Wegen

$$\begin{aligned}
(1-T)\sum_{k=0}^{n-1} T^k &= \sum_{k=0}^{n-1} T^k - \sum_{k=1}^{n} T^k = 1 - T^n = 1 \\
\left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k\right)(1-T) &= \sum_{k=0}^{n-1} T^k - \sum_{k=1}^{n} T^k = 1 - T^n = 1
\end{aligned}$$

gilt

$$(1-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$$

■

Satz 45.3 *Sei X vollständiger Längenraum über $\mathbb{C}$ und $K \in K(X)$*
1.) Jeder Spektralwert $a \neq 0$ ist Eigenwert
2.) Für $\dim X = \infty$ gilt $0 \in Sp\ K$.
3.) $\forall a \in SpK \backslash \{0\}$ $\exists!$ ***abgeschlossene*** *Untervektorräume*

$$\begin{aligned}
F(a) &= (a-K)^{m_0} X \\
N(a) &= Null(a-K)^{m_0}
\end{aligned}$$

mit

$X = F(a) \oplus N(a)$
$K(N(a)) \subset N(a)$
$K(F(a)) \subset F(a)$
$\dim N(a) < \infty$
Für $(a-K) : N(a) \to N(a)$ *gilt* $\exists n \in \mathbb{N}: \; (a-K)^n_{N(a)} \equiv 0$
$(a-K) : F(a) \to F(a)$ *ist stetig umkehrbar*

Alle Eigenräume sind endlich dimensional, außer ggf. für $r = 0$.
4.) SpK ist endlich oder abzählbar. Ist es abzählbar, so ist Null der einzige Häufungspunkt.

$$SpK = \{0\} \cup \{a_1, a_2, \ldots\} \textit{ mit } |a_1| \geq |a_2| \geq \ldots \textit{ und ggf. } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

5.) $a, b \in SpK\backslash\{0\}, a \neq b \Rightarrow N(b) \subset F(a)$
6.)

$$X = \bigoplus_{i=1}^{n} N(a_i) \oplus \bigcap_{i=1}^{n} F(a_i)$$

In $\bigoplus_{i=1}^{n} N(a_i)$ *kann man eine passende Basis wählen, sodaß* $K|_{\bigoplus_{i=1}^{n} N(a_i)}$ *Normalform hat.*

Beweis. 1.)-3.) Da $\frac{K}{a}$ kompakt ist, und

$$Null(a-K)^{m_0} = Null\left(1 - \frac{K}{a}\right)^{m_0}$$

gilt mit den Ergebnissen aus dem Kapitel Kompakte lineare Abbildungen I

$$\begin{aligned} & Null(a-K)^{m_0} \neq \{0\} \\ \Rightarrow \quad & Null(a-K) \neq \{0\} \\ \Rightarrow \quad & a \text{ ist Eigenwert} \end{aligned}$$

und

$$\dim X = \infty \Rightarrow \text{ K nicht umkehrbar } \iff 0 \in SpK$$

und die restlichen Aussagen.
4.) Sei $0 \neq a \in SpK$. Dann gilt

$$(a-K) : F(a) \to F(a) \text{ ist umkehrbar}$$

Da die Menge der umkehrbaren Elemente offen ist, gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall |b-a| < \varepsilon : \ (b-K) : F(a) \to F(a) \text{ ist umkehrbar}$$

Wegen

$$\begin{aligned} b - K &= b - a + a - K \\ &= (b-a)\left(1 - \frac{a-K}{b-a}\right) \end{aligned}$$

und da für $\frac{a-K}{a-b} : N(a) \to N(a)$ gilt $\exists n \in \mathbb{N} : \left(\frac{a-K}{a-b}\right)^n \equiv 0$, folgt

$$\begin{aligned}
&b - K : N(a) \to N(a) \text{ ist umkehrbar}\\
&b - K : N(a) \oplus F(a) \to N(a) \oplus F(a) \text{ ist umkehrbar}\\
&b \notin SpK\\
&\exists \varepsilon > 0 : \; SpK \cap B(a, \varepsilon) = \{a\}
\end{aligned}$$

und a ist kein Häufungspunkt.
Da $SpK \cap B(0, \delta)^C$ kompakt ist, enthält es nur endlich viele Elemente.
Bei unendlich vielen würde eine Teilfolge mit einem Grenzwert, d.h. ein Häufungspunkt, existieren, ein Widerspruch, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; \left|\left\{ b \in SpK : |b| \geq \frac{1}{n} \right\}\right| < \infty$$

Damit ist

$$SpK \backslash \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ b \in SpK : |b| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

abzählbar und der einzige mögliche Häufungspunkt ist 0.
5.) Nach 4.) ist $a - K : N(b) \to N(b)$ umkehrbar. Damit gilt

$$\begin{aligned}
N(b) &= (a-K)^{n_0} N(b)\\
&\subset (a-K)^{n_0} X\\
&= F(a)
\end{aligned}$$

6.) $X = N(a_1) \oplus F(a_1)$. Da

$$K : F(a_1) \to F(a_1)$$

kompakt ist, gilt

$$X = N(a_1) \oplus N(a_2) \oplus (F(a_1) \cap F(a_2))$$

Induktion ergibt die Behauptung. ■

Satz 45.4 *Sei $K = K^* \in K(H)$.*
1.) Es existiert ein Eigenwert $b \in \mathbb{R}$ von K mit $|b| = \| K \|$
2.) Jeder Eigenwert ist reell.
3.) $N(a) = Null(a - K)$.
4.) $a, b \in SpK \backslash \{0\}, a \neq b \Rightarrow Null(a-K) \perp Null(b-K)$
5.)

$$H = \bigoplus_{a \in Sp(K)} Null(a - K)$$

Es gibt eine senkrechte Basis mit Länge 1 von Eigenvektoren.

Beweis. 1.) Wegen

$$\| K \| \overset{K=K^*}{=} \sup\{| \underbrace{\langle Kv, v\rangle}_{\in\mathbb{R}} | : \| v \| = 1\}$$

existiert eine Folge $(v_n)_n, \| v_n \| = 1$ mit

$$\begin{aligned} b &= \lim_{n\to\infty} \langle Kv_n, v_n\rangle \in \mathbb{R} \\ |b| &= \| K \| \end{aligned}$$

Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(Kv_{n_k})_k$ von $(Kv_n)_n$ mit

$$y := \lim_{k\to\infty} Kv_{n_k}$$

und

$$\begin{aligned} & \| Kv_{n_k} - bv_{n_k} \|^2 \\ = \quad & \underbrace{\| Kv_{n_k} \|^2}_{\leq \|K\|^2} - 2Reb \langle Kv_{n_k}, v_{n_k}\rangle + \underbrace{|b|^2}_{=\|K\|^2} \\ \leq \quad & 2b^2 - 2b \underbrace{\langle Kv_{n_k}, v_{n_k}\rangle}_{\to b} \\ \overset{k\to\infty}{\to} \quad & 0. \end{aligned}$$

1. Fall: $b = 0$. Dann ist $K \equiv 0$ und b ist Eigenwert.
2. Fall: $b \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y &\overset{\text{Def}}{=} \lim_{k\to\infty} Kv_{n_k} = \lim_{k\to\infty} bv_{n_k} = b \lim_{k\to\infty} v_{n_k} \\ Ky &= b \lim_{k\to\infty} Kv_{n_k} = by \end{aligned}$$

d.h. b ist Eigenwert.
2.) Sei $\| v \| = 1$ und $Kv = av$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a &= \langle av, v\rangle = \langle Kv, v\rangle \\ &\overset{K=K^*}{=} \langle v, Kv\rangle = \langle v, av\rangle \\ &= \overline{a} \langle v, v\rangle = \overline{a} \end{aligned}$$

3.) Sei $(a-K)^{2^n}v=0$ mit $n\geq 1$ und $a\in\mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \underbrace{(a-K)^{2^n}v}_{=0}, v\right\rangle \\
&\overset{K=K^*}{=} \left\langle (a-K)^{2^{n-1}}v, (a-K)^{2^{n-1}}v\right\rangle \\
&= \left\|(a-K)^{2^{n-1}}v\right\|^2 \\
0 &= (a-K)^{2^{n-1}}v
\end{aligned}$$

d.h.

$$\forall n\geq 1:\ \left((a-K)^{2^n}v=0 \Rightarrow (a-K)^{2^{n-1}}v=0\right)$$

Wegen

$$v\in Null(a-K)\Rightarrow \exists n_0:\ (a-K)^{2^{n_0}}v=0$$

folgt

$$N(a)\subset Null(a-K)$$

4.) Seien $v\in Null(a-K), w\in Null(b-K)$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a\langle v,w\rangle &\overset{2.)}{=} \langle Kv,w\rangle \\
&\overset{K=K^*}{=} \langle v,Kw\rangle \\
&\overset{2.)}{=} \bar{b}\langle v,w\rangle \\
&\overset{b\in\mathbb{R}}{=} b\langle v,w\rangle \\
0 &= \underbrace{(b-a)}_{\neq 0}\langle v,w\rangle \\
0 &= \langle v,w\rangle \\
Null(a-K) &\perp Null(b-K)
\end{aligned}$$

5.) Setze die senkrechten Basen der Länge 1 der Eigenräume zusammen und ergänze zu einer senkrechten Basis der Länge 1 von H

$$H=V\oplus\bigoplus_{a\in SpK\setminus\{0\}} Null(a-K)$$

Seien $v \in V, w \in Null(a - K)$. Wegen

$$\begin{aligned}
\langle w, Kv \rangle &\overset{K=K^*}{=} \langle Kw, v \rangle \\
&\overset{w \in N(a)}{=} \langle aw, v \rangle \\
&= a \underbrace{\langle w, v \rangle}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
Kv &\perp Null(a - K) \\
KV &\subset V
\end{aligned}$$

5.) $K : V \to V$ ist kompakt. Wegen

$$\begin{aligned}
\| K \| > 0 &\Rightarrow \exists \text{ Eigenwert } b : |b| = \| K \| \\
&\Rightarrow \exists\, Null(b - K) \subset V
\end{aligned}$$

gilt

$$\| K|_V \| = 0$$

da kein $Null(b - K)$ in V enthalten ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}
K|_V &\equiv 0 \\
V &= Null(K)
\end{aligned}$$

■

46. Charaktere und maximale Ideale

Im Folgenden gelte $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 46.1 *Sei A eine Algebra.*
1.) Ein Untervektorraum $I \subset A$ heißt ***Ideal*** $\iff$

$$IA, AI \subset I$$

2.) Ein Ideal I heißt ***maximal*** $\iff$

$$\forall \text{ Ideale } J, I \subset J \subset A: \; J = I \text{ oder } J = A$$

3.) Ein Ideal I heißt ***echt*** $\iff$

$$I \neq A$$

Beispiel 46.2 *K(X) ist ein abgeschlossenes Ideal in L(X).*

Beweis. Das haben wir schon gezeigt. ■

Satz 46.3 *a) Sei A mit 1.*

$$I \text{ ist echtes Ideal } \iff 1 \notin I$$

b) Ist I ein Ideal, so ist $\overline{I}$ auch ein Ideal.
c) Sei A mit 1. Dann ist jedes maximale Ideal in A abgeschlossen.
d) Sei A mit 1. Dann ist jedes echte Ideal in einem maximalen Ideal enthalten.

Beweis. a) "$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} 1 \in I &\overset{Ideal}{\Rightarrow} A1 \subset I \\ &\Rightarrow A \subset I \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$":

$$I \subset A \backslash \{1\} \subsetneq A$$

b) Wir haben schon gezeigt, daß $\overline{I}$ ein Vektorraum ist.
Sei $(x_n)_n \subset I$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{I}$.
Sei $a \in A$. Da I ein Ideal ist, gilt

$$ax_n \in I$$

Da die Multiplikation mit a stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} ax_n &= ax \\ ax &\in \overline{I} \end{aligned}$$

Analog gilt

$$xa \in \overline{I}$$

c) Sei I maximal. Annahme: $\exists$ umkehrbares $x \in I$. Dann folgt

$$\begin{aligned}&1 = x^{-1}x \in I\\ &I = A\\ &I \text{ nicht maximal}\end{aligned}$$

ein Widerspruch, d.h.

$$I \subset \underbrace{(Gl(A))^C}_{\text{abgeschlossen}}$$

Nach b) ist $\overline{I}$ ein Ideal und

$$\begin{aligned}&I \subset \overline{I}\\ \overset{I \text{ maximal}}{\Rightarrow}\quad &I = \overline{I}\end{aligned}$$

d) Die Menge aller Ideale J mit $I \subset J, 1 \notin J$ bildet mit "$\subset$" eine induktiv geordnete Menge:

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall I : I = I \\ 2.) & I_1 \subsetneqq I_2, I_2 \subsetneqq I_3 \Rightarrow I_1 \subsetneqq I_3 \end{array}$$

ergibt

$$\begin{array}{ll} 1.) & \forall I : I \not< I \\ 2.) & I_1 < I_2, I_2 < I_3 \Rightarrow I_1 < I_3 \end{array}$$

Sei J_l eine Kette.
Dann ist $\bigcup_{l \in L} J_l$ ein Ideal und ein obere Schranke: Sei $a \in A$

$$\begin{aligned} x, y \in \bigcup_{l \in L} J_l \quad &\Rightarrow \quad x \in J_{l_1}, y \in J_{l_2}\\ &\overset{l_2 \geq l_1}{\Rightarrow} \quad x, y \in J_{l_2}\\ &\overset{J_{l_2}\text{Ideal}}{\Rightarrow} \quad x + y \in J_{l_2} \subset \bigcup_{l \in L} J_l\\ x \in \bigcup_{l \in L} J_l \quad &\Rightarrow \quad x \in J_{l_1}\\ &\overset{Ideal}{\Rightarrow} \quad xa \in J_{l_1} \subset \bigcup_{l \in L} J_l \end{aligned}$$

Damit existiert ein maximales Element.
Dieses enthält nicht die 1. ■

Satz 46.4 *Sei $I \subset A$ ein Ideal. Mit*

$$(x+I)(y+I) = xy + I$$

wird A/I eine Algebra.
Vertauscht A, so vertauscht auch A/I.

Beweis. a) Wegen

$$\begin{aligned} & (x+n_1)(y+n_2) \\ = \; & xy + \underbrace{n_1 y + x n_2 + n_1 n_2}_{\in I \text{ da Ideal}} \\ \in \; & xy + I \end{aligned}$$

ist die Definition unabhängig vom Vertreter.
Wir haben schon gezeigt, dass A/I ein Vektorraum ist. Wegen

$$\begin{aligned} ((x+I)(y+I))(z+I) &= xyz + I \\ &= (x+I)((y+I)(z+I)) \\ (c_1x_1 + c_2x_2 + I)(y+I) &= c_1(x_1y+I) + c_2(x_2y+I) \\ &= c_1(x_1+I)(y+I) + c_2(x_2+I)(y+I) \\ (y+I)(c_1x_1 + c_2x_2 + I) &= c_1(yx_1+I) + c_2(yx_2+I) \\ &= c_1(y+I)(x_1+I) + c_2(y+I)(x_2+I) \end{aligned}$$

ist A/I eine Algebra.
b)

$$\begin{aligned} (x+I)(y+I) &= xy + I \\ &= yx + I \\ &= (y+I)(x+I) \end{aligned}$$

■

Satz 46.5 *Sei A vollständige Längenalgebra über $\mathbb{C}$.*
Für jedes abgeschlossene Ideal I in A ist A/I eine vollständige Längenalgebra.

Beweis. Wir haben schon gezeigt: A/I ist vollständiger Längenraum und Algebra. Wegen

$$\| x + I \|_{A/I} = \inf\{\| x + z \|_A \, | z \in I\}$$

gib es $z_1, z_2 \in I$ mit

$$\begin{aligned} \| x + z_1 \|_A &\leq \| x + I \|_{A/I} + \varepsilon \\ \| y + z_2 \|_A &\leq \| y + I \|_{A/I} + \varepsilon \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\| (x+I)(y+I) \|_{A/I} &\stackrel{Def}{=} \| (xy) + I \|_{A/I} \\
&= \| xy + \underbrace{xz_2 + z_1 y + z_1 z_2}_{\in I} + I \|_{A/I} \\
&= \| (x+z_1)(y+z_2) + I \|_{A/I} \\
&\stackrel{inf}{\leq} \| (x+z_1)(y+z_2) \|_A \\
&\leq \| x+z_1 \|_A \| y+z_2 \|_A \\
&\leq \big(\| x+I \|_{A/I} + \varepsilon\big) \cdot \big(\| y+I \|_{A/I} + \varepsilon\big)
\end{aligned}$$

Da ε beliebig ist, folgt

$$\| (x+I)(y+I) \|_{A/I} \leq \| x+I \|_{A/I} \cdot \| y+I \|_{A/I}$$

■

Definition 46.6 *Sei A vertauschende Algebra und $x \in A$.*

$$J = xA = \{xy : y \in A\}$$

ist das ***von x erzeugte Ideal****.*

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}
&0x = 0 \in J \\
&xy_1, xy_2, x(c_1 y_1 + c_2 y_2) \in J \\
&axy = x \underbrace{ay}_{\in A} \in J
\end{aligned}$$

ist J ein Ideal. ■

Satz 46.7 *Sei A vertauschende Algebra mit Eins, $I \subset A$ maximal. Dann ist A/I ein Körper.*

Beweis. Sei $0 \neq x \in A/I$.
Da A/I vertauscht, ist das von x erzeugte Ideal

$$J = xA/I$$

Sei

$$pr : A \to A/I, a \mapsto a + I$$

Da pr linear ist, ist $pr^{-1}(J)$ ein Untervektorraum. Wegen

$$\begin{aligned} a \in A, x \in pr^{-1}(J) &\Rightarrow a + I \in A/I, x + I \in J \\ &\overset{J \text{ Ideal}}{\Rightarrow} (a+I)(x+I), (x+I)(a+I) \in J \\ &\Rightarrow (ax+I), (xa+I) \in J \\ &\Rightarrow ax, xa \in pr^{-1}(J) \end{aligned}$$

ist $pr^{-1}(J)$ ein Ideal in A und es gilt

$$\begin{aligned} & pr^{-1}(0) = I \overset{0 \neq x \in J}{\subsetneqq} pr^{-1}(J) \subset A \\ \overset{I \text{ maximal}}{\Rightarrow} \quad & pr^{-1}(J) = A \\ \overset{\text{pr ist auf}}{\Rightarrow} \quad & A/I = J \overset{Def}{=} xA/I \overset{Def}{=} \{(x+I)(y+I) : y \in A\} \\ \Rightarrow \quad & \exists y + I \in A/I : \ 1 + I = (x+I)(y+I) \\ \Rightarrow \quad & x + I \text{ ist umkehrbar} \end{aligned}$$

■

Satz 46.8 *Sei A eine vollständige Längenalgebra über $\mathbb{C}$ mit Eins, die ein Körper ist, d.h. alle $a \neq 0$ sind umkehrbar.*
Dann gilt $A = \mathbb{C}1$ und A ist vertauschend.

Beweis. Sei $x \in A$.

$$\begin{aligned} Sp\ x \neq \emptyset &\iff \exists a : a - x \text{ ist nicht umkehrbar} \\ &\overset{\text{Körper}}{\Rightarrow} a - x = 0 \\ &\Rightarrow x = a1 \end{aligned}$$

■

Definition 46.9 *1.) **f erhält die Algebrastruktur** $\iff$*

$$\begin{aligned} &f \text{ ist linear} \\ &f(xy) = f(x)f(y) \end{aligned}$$

*2.) Ein $f : A \to \mathbb{C}$ mit $f \not\equiv 0$, das die Algebrastruktur erhält, heißt **Charakter**.*
3.) Setze

$$Spec(A) = \{ \text{ Charaktere von } A\}$$

Satz 46.10 *Sei A mit 1 und f ein Charakter. Dann gilt a) $f(1) = 1$*
b) $A = Null(f) \oplus \mathbb{C}1$
c) Null(f) ist ein maximales Ideal.

Beweis. a) Wegen

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$$

gilt

$$f(1) \in \{0, 1\}$$

Sei $a \in A$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(a) = f(a1) = f(a)f(1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f \equiv 0 \end{aligned}$$

Wegen $f \not\equiv 0$ folgt

$$f(1) = 1$$

b) Für $x \in Null f \cap \mathbb{C}1$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \quad &\overset{x \in Null f}{=} \quad f(x) \overset{x=c\cdot 1}{=} f(c \cdot 1) \\ &= \quad c \\ 0 \quad &= \quad x \end{aligned}$$

Sei $x \in A$ beliebig. Wegen

$$f(x - f(x) \cdot 1) = f(x) - f(x) = 0$$

gilt

$$x = \underbrace{1 \cdot f(x)}_{\in \mathbb{C}1} + \underbrace{(x - f(x) \cdot 1)}_{\in Null f}$$

c) Da f linear ist, ist $Null(f)$ ein Untervektorraum.
Seien $a \in A, x \in Null(f)$. Wegen

$$\begin{aligned} f(ax) \quad &= \quad f(a)\underbrace{f(x)}_{=0} = 0 \\ f(xa) \quad &= \quad \underbrace{f(x)}_{=0} f(a) = 0 \end{aligned}$$

ist $Null(f)$ ein Ideal. Wegen

$$A = Null(f) \oplus \mathbb{C}1$$

existiert kein echter Untervektorraum zwischen $Null f$ und A, insbesondere kein Ideal und $Null(f)$ ist maximales Ideal. ■

Satz 46.11 *Sei A vertauschende vollständige Längenalgebra mit Eins.*

$$S : \{ \textit{ Charaktere von } A \} \to \{ \textit{ maximale Ideale von } A \}, f \mapsto Null(f)$$

ist umkehrbar.

Beweis. $Null(f)$ ist ein maximales Ideal.
1.) Sei $Null f = Null g$ und $x \in A$ beliebig. Wegen

$$A = \mathbb{C}1 \oplus Null(f) = \mathbb{C}1 \oplus Null(g)$$

gilt

$$x = c1 + y \text{ mit } y \in Null(f) = Null(g)$$

und wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c \cdot 1) + f(y) \\ &= c \\ &= g(c \cdot 1) + g(y) \\ &= g(x) \\ f &\equiv g \end{aligned}$$

und S ist eins zu eins.
2.) Sei $I \subset A$ ein maximales Ideal, dann gilt

$$\begin{aligned} &A/I \text{ ist Körper} \\ &A/I = \mathbb{C} \cdot 1 \end{aligned}$$

d.h.

$$pr : A \to A/I = \mathbb{C} \cdot 1$$

ist ein Charakter und

$$Null(pr) = I$$

d.h. S ist auf. ■

47. Vertauschende Längenalgebren

Satz 47.1 *Sei A vertauschende vollständige Längenalgebra mit Eins und $f : A \to \mathbb{C}$ ein Charakter.*
a) $x \in A$ umkehrbar $\Rightarrow f(x) \in \mathbb{C}$ ist umkehrbar
b) $Sp(x) = \{f(x) \mid f \in SpecA\}$
c) f ist stetig mit $\| f \| \leq 1$.
Für $\| 1 \| = 1$ gilt $\| f \| = 1$.

Beweis. a) Sei x umkehrbar. Wegen

$$1 = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$$

ist $f(x)$ umkehrbar.
b) "$\supset$": Sei f ein Charakter mit $f(x) = c$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & f(c1 - x) = c1 - f(x) = 0 \\ \overset{a)}{\Rightarrow} \quad & c1 - x \text{ ist nicht umkehrbar} \\ \Rightarrow \quad & f(x) = c \in Sp\ x \end{aligned}$$

"$\subset$":

$$\begin{aligned} c \in Sp\ x \quad & \Rightarrow \quad c1 - x \text{ ist nicht umkehrbar} \\ & \Rightarrow \quad I := (c1 - x)A \neq A \\ & \Rightarrow \quad \exists \text{ maximales Ideal } J : I \subset J \\ & \Rightarrow \quad \exists \text{ Charakter } f : Null\ f = J \\ & \Rightarrow \quad f|_I \equiv 0 \\ & \Rightarrow \quad f(c - x) = 0 \\ & \Rightarrow \quad f(x) = c \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) \in Spx \quad & \Rightarrow \quad |f(x)| \leq \| x \| \\ & \Rightarrow \quad \| f \| \leq 1 \end{aligned}$$

Sei $\| 1 \| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \| f(1) \| = \| 1 \| &= 1 \\ \| f \| &= 1 \end{aligned}$$

■

Satz 47.2 *Sei X ein Längenraum und X' der Dualraum. Durch die Halblängen*

$$f_i \to f \iff \forall x \in \overline{B_X(0,1)}: \ |(f - f_i)(x)| \to 0$$

erhält man auf X' eine lokalkonvexe Topologie des punktweisen Grenzwertes.
1) Für diese Topologie ist

$$\overline{B_{X'}(0,1)} = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ stetig } \mid \ \| f \| \leq 1\}$$

kompakt.
*2) $(X')_1$ ist im Allgemeinen unendlich dimensional, also für die Längentopologie **nicht** kompakt.*

Beweis. 1) a) Auf

$$\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}^{\overline{B_X(0,1)}} = \prod_{x \in \overline{B_X(0,1)}} \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}_x$$

haben wir die Produkttopologie

$$\begin{aligned} & (y_{i,x})_{x \in \overline{B_X(0,1)}} \to (y_x)_{x \in \overline{B_X(0,1)}} \\ \iff \quad & \forall x \in \overline{B_X(0,1)}: \ (y_{i,x} - y_x) \to 0 \end{aligned}$$

Da $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$ kompakt ist, ist auch $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}^{\overline{B_X(0,1)}}$ kompakt.
b) Wegen

$$\begin{aligned} (y_x)_{x \in \overline{B_X(0,1)}} \neq (z_x)_{x \in \overline{B_X(0,1)}} \quad & \iff \quad \exists x \in \overline{B_X(0,1)}: \ y_x \neq z_x \\ & \iff \quad p_x(y) \neq p_x(z) \end{aligned}$$

trennt die Topologie auf $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}^{\overline{B_X(0,1)}}$ die Punkte und der Grenzwert von Netzen ist eindeutig.
c) Betrachte

$$S : \overline{B_{X'}(0,1)} \to \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}^{\overline{B_X(0,1)}}, f \mapsto (f(x))_{x \in \overline{B_X(0,1)}}$$

Wegen

$$|f(x)| \leq \| f \| \| x \| \leq 1$$

gilt

$$|f(x)| \in \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$$

und S ist definiert.
d) Wegen

$$\forall x \in \overline{B_X(0,1)}: \ f(x) = g(x) \overset{f,g \text{ linear}}{\Rightarrow} f \equiv g$$

ist S eins zu eins.
e) Sei $(f_i)_i$ ein Netz in $\overline{B_{X'}(0,1)}$ mit $f_i \to f$. Wegen

$$\begin{array}{rcl} f(ax+y) & \leftarrow & f_i(ax+y) \\ & \stackrel{f_i \text{ linear}}{=} & af_i(x)+f_i(y) \\ & \stackrel{\text{topologischer Vektorraum}}{\longrightarrow} & af(x)+f(y) \end{array}$$

ist f linear. Wegen

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| & \leq & \underbrace{|(f_i-f)(x)|}_{\to 0} + \underbrace{|f_i(x)|}_{\leq 1} \\ \forall x \in \overline{B_{X'}(0,1)} : \ |f(x)| & \leq & 1 \end{array}$$

ist $f \in \overline{B_{X'}(0,1)}$ stetig.
Damit ist $\overline{B_{X'}(0,1)}$ abgeschlossen.
f) Da die Topologien auf $\overline{B_{X'}(0,1)}$ und $Bild(S)$ die punktweisen Grenzwerte sind, haben sie dieselben Netze mit einem eindeutigen Grenzwert, d.h.

$$S, S^{-1} \text{ sind stetig}$$

Da $\overline{B_{X'}(0,1)}$ abgeschlossen ist, ist $S(\overline{B_{X'}(0,1)})$ abgeschlossen.
Da $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}^{B_X(0,1)}$ kompakt ist, ist $S(\overline{B_{X'}(0,1)})$ kompakt. ∎

Satz 47.3 *Sei A eine vertauschende vollständige Längenalgebra mit Eins. Spec(A) ist mit der Topologie der punktweisen Grenzwerte kompakt.*

Beweis. Nach Definition gilt

$$f \in SpecA \iff \left\{ \begin{array}{rcl} f(1) & = & 1 \\ \forall x,y : f(xy) & = & f(x)f(y) \end{array} \right.$$

Wegen

$$\begin{array}{rl} & |f_i(x)f_i(y) - f(x)f(y)| \\ \leq & \underbrace{|f_i(x)|}_{\leq 1} |f_i(y)-f(y)| + \underbrace{|f(y)|}_{\leq 1} |f_i(x)-f(x)| \\ \stackrel{\text{topologischer Vektorraum}}{\longrightarrow} & 0 \end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} f(xy) \leftarrow f_i(xy) & = & f_i(x)f_i(y) \to f(x)f(y) \\ 1 & = & f_i(1) = f(1) \end{array}$$

und die Eigenschaften bleiben bei punktweisen Grenzwerten erhalten.
Damit ist $Spec(A)$ abgeschlossen bzgl. punktweiser Grenzwerte.
Wegen $\| f \| \leq 1$ gilt

$$\underbrace{SpecA}_{\text{abgeschlossen}} \subset \underbrace{\overline{B_{A'}(0,1)}}_{\text{kompakt}}$$

Da $\overline{B_{A'}(0,1)}$ kompakt ist, ist $Spec(A)$ kompakt. ■

Satz 47.4 *Sei A vertauschende vollständige Längenalgebra mit 1.*

$$G : A \to C(SpecA), x \mapsto (G(x) : Spec(A) \to Sp(x) \subset \mathbb{C}, f \mapsto f(x))$$

G erhält die Algebrastruktur, $G, G(x)$ *sind stetig und es gilt*

$$\begin{aligned} \forall x \in A : \| G(x) \| &\leq \| x \| \\ \| G \| &\leq 1 \\ \forall x \in A : \| G(x) \| &= r(x) \end{aligned}$$

Bemerkung 47.5 *Die rechte Seite ist eine Algebra von Funktionen, also leicht zu verstehen, die linke Seite ist schwer zu verstehen. Eventuell verliert die Abbildung viel Information oder ist sogar die Null-Abbildung.*

Beweis. Da Spec A kompakt ist, ist $(C(SpecA), \| \cdot \|_\infty)$ eine vollständige Längenalgebra. Wegen

$$\begin{aligned} G(xy)(f) &= f(xy) = f(x)f(y) \\ &= G(x)(f)G(y)(f) \\ G(x + a \cdot y)(f) &= f(x + a \cdot y) = f(x) + af(y) \\ &= G(x)(f) + aG(y)(f) \end{aligned}$$

erhält G die Algebra-Struktur. Wegen

$$|G(x)(f)| = |f(x)| \leq \| f \| \| x \|$$

ist $G(x)$ stetig. Wegen

$$\begin{aligned} \| G(x) \| &= \sup_{\| f \| = 1} |G(x)(f)| \leq \| x \| \\ \| G \| &\leq 1 \end{aligned}$$

ist G stetig. Wegen

$$\begin{aligned} Sp(x) &= \{f(x) | f \in Spec(A)\} \\ &= \{ \text{ Wertebereich von } G(x) : Spec(A) \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)\} \end{aligned}$$

gilt

$$r(x) = \sup_{a \in Sp(x)} |a| = \sup_{f \in Spec(A)} |f(x)| = \| G(x) \|$$

■

48. Vertauschende C^*-Algebren

Definition 48.1 *Sei A eine Algebra und für*

$$* : A \to A, x \mapsto x^*$$

gelte $\forall c \in \mathbb{K}, \forall x, y \in A$

$$\begin{aligned} x^{**} &= (x^*)^* = x \\ (x+y)^* &= x^* + y^* \\ (ax)^* &= \overline{a} x^* \\ (xy)^* &= y^* x^* \end{aligned}$$

Satz 48.2 *a) $*$ ist umkehrbar*
b) $1^* = 1$
c) Sei x umkehrbar. Dann ist x^* umkehrbar und es gilt

$$(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$$

d) $Sp(x^*) = \overline{Sp(x)}$

Beweis. a)

$$(\forall x \in A: \ x^{**} = x) \Rightarrow^{**} = id$$

und * ist umkehrbar.
b)

$$\begin{aligned} \forall x \in A: \ x^* &= (1x)^* = x^* 1^* \\ \forall x \in A: \ x^* &= (x1)^* = 1^* x^* \end{aligned}$$

d.h. 1^* ist Linkseins und Rechtseins. Da die Eins eindeutig ist, gilt

$$1 = 1^*$$

c)

$$\begin{aligned} xx^{-1} = 1 &\Rightarrow (x^{-1})^* x^* = 1^* = 1 \\ x^{-1}x = 1 &\Rightarrow x^* (x^{-1})^* = 1^* = 1 \end{aligned}$$

Damit ist $(x^{-1})^*$ ist rechts- und linksinvers zu x^*.
d)

$$\begin{aligned} c - x \text{ ist umkehrbar} &\iff (c-x)^* \text{ ist umkehrbar} \\ &\iff \overline{c} - x^* \text{ ist umkehrbar} \end{aligned}$$

■

Definition 48.3 *Eine* ***C*-Algebra*** *ist eine vollständige Längenalgebra mit* $*$*, sodaß*

$$\forall x \in A : \| x^* x \| = \| x \|^2$$

Satz 48.4 *a) Für eine* C^**-Algebra gilt:*

$$\forall x \in X : \| x^* \| = \| x \|$$

b) In jeder $*$*-Algebra mit* 1 *gilt*

$$1^* = 1$$

c) Für eine C^**-Algebra genügt es zu fordern*

$$\| x \|^2 \leq \| x x^* \|$$

Beweis. a) 1. Fall $\| x \| = 0$: Dann gilt $\| x^* \| = 0 = \| x \|$.
2. Fall $\| x \| \neq 0$:

$$\begin{aligned} \| x \|^2 &= \| x^* x \| \leq \| x^* \| \| x \| \\ \| x \| &\leq \| x^* \| \end{aligned}$$

und

$$\| x \| \leq \| x^* \| \leq \| x^{**} \| = \| x \|$$

b)

$$\begin{aligned} & \forall x \in A : \ 1x = x1 = x \\ \Rightarrow \ & \forall x \in A : \ x^* 1^* = 1^* x^* = x^* \\ \Rightarrow \ & 1^* = 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \| x \|^2 &\leq \| x^* x \| \leq \| x^* \| \| x \| \\ \| x \| &\leq \| x^* \| \leq \| x^{**} \| = \| x \| \\ \| x \|^2 &= \| x^* x \| \end{aligned}$$

■

Satz 48.5 *Sei* A C^**-Algebra und* $a = a^* \in A$*. Dann gilt*

$$r(a) = \| a \|$$

und es gibt höchstens eine Länge auf einer C^**-Algebra, die sie zu* C^**-Algebra macht.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\left\|a^2\right\| &= \| a \|^2 \\
\left\|a^{2^n}\right\| &= \| a \|^{2^n} \\
r(a) &= \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|a^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \| a \|
\end{aligned}
$$

Seien $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ solche Längen

$$
\begin{aligned}
\| a \|_1^2 &= \|a^* a\|_1 \\
&= r\left(a^* a\right) \\
&= \sup_{c \in Sp(a^* a)} |c|
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 48.6 *a) $A = L(H)$ ist eine C^*-Algebra.*
b) Jede abgeschlossene Unteralgebra $A \subset L(H)$ mit

$$x \in A \Rightarrow x^* \in A$$

ist eine C^*-Algebra.
c) Sei $\dim H = \infty$*. Dann ist $K(H) \subset L(H)$ eine C^*-Algebra ohne Eins.*
d) Sei X kompakt. Mit

$$
\begin{aligned}
\overline{f} &= f^* \\
\| f \|_\infty &= \sup\{|f(t)| : t \in X\}
\end{aligned}
$$

ist $A = C(X)$ eine C^*-Algebra.
e) Jede abgeschlossene Unteralgebra $A \subset C(X)$, die unverändert ist unter

$$f \mapsto \overline{f}$$

ist eine C^*-Algebra.

Beweis. a) Wir haben schon gezeigt: Vollständige Längenalgebra mit $*$ und für $x \in L(H)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\| x \|^2 &= \sup\{\langle xu, xu\rangle \mid \| u \| = 1\} \\
&= \sup\{\langle x^* xu, u\rangle \mid \| u \| = 1\} \\
&\overset{x^*x=(x^*x)^*}{=} \| x^* x \|
\end{aligned}
$$

b) Da A abgeschlossen ist, ist A vollständige Längenalgebra.
$\forall x \in L(H) : \| x^*x \| = \| x \|^2$ gilt wegen

$$x \in A \Rightarrow x^* \in A$$

auch in A.
Die $*$-Bedingungen gelten in $L(H)$ und wegen $x \in A \Rightarrow x^* \in A$ auch in A.
c) Wegen

$$x \in K(H) \Rightarrow x^* \in K(H)$$

und da K(H) abgeschlossene Unteralgebra ist, ist K(H) mit b) eine C^*-Algebra.
Für $\dim H = \infty$ ist $id : H \to H$ nicht kompakt, d.h.

$$1 = id \notin K(H)$$

d) Wir haben schon gezeigt: vollständiger Längenraum. Es gilt

$$f^* = \overline{f} \in C(X)$$

und somit

$$\begin{aligned}
f^{**} &= \overline{\overline{f}} = f \\
(f+g)^* &= \overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g} = f^* + g^* \\
(af)^* &= \overline{a}\overline{f} = \overline{a} f^* \\
(fg)^* &= \overline{fg} = \overline{g}\overline{f} \\
&= g^* f^* \\
\| f^* f \|_\infty &= \| \overline{f} f \|_\infty \\
&= \| |f|^2 \|_\infty = \| f^2 \|_\infty
\end{aligned}$$

e) nach b) und d)
■

Satz 48.7 *Sei A vertauschende C^*-Algebra und*

$$G : A \to C(SpecA), x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

Dann gilt:

$$G(x^*) = \overline{G(x)}$$

Beweis. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + ib \\
f(x^*) &= c + id.
\end{aligned}$$

a) Annahme: $b+d \neq 0$. Wegen

$$(x+x^*)^* = (x^* + x^{**}) = x^* + x$$

gilt

$$\begin{aligned} y &:= \frac{x+x^* - (a+c)1}{b+d} = y^* \\ f(y) &= \frac{bi+di}{b+d} = i \end{aligned}$$

Für $e \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(y+ei) &= i(1+e) \\ |1+e| &= |f(y+ei)| \\ &\leq \parallel f \parallel \parallel y+ei \parallel \\ &\overset{\parallel f \parallel \leq 1}{\leq} \parallel y+ei \parallel \\ (1+e)^2 &\leq \parallel y+ei \parallel^2 \\ &\overset{C^*}{=} \parallel (y+ei)^*(y+ei) \parallel \\ &\overset{y=y^*}{=} \parallel (y-ei)(y+ei) \parallel \\ &= \parallel y^2 + e^2 \parallel \\ &\leq \parallel y^2 \parallel + e^2 \end{aligned}$$

d.h.

$$1 + 2e \leq \parallel y^2 \parallel$$

ein Widerspruch, da e beliebig groß wird, somit gilt

$$b = -d$$

b) Annahme: $a-c \neq 0$. Wegen

$$(ix - ix^*)^* = (\bar{i}x^* - \bar{i}x^{**}) = -ix^* + ix$$

gilt

$$\begin{aligned} y &:= \frac{ix - ix^* - (d-b)1}{a-c} = y^* \\ f(y) &= \frac{i(a+ib) - i(c+id) - (d-b)1}{a-c} = i \end{aligned}$$

Wie in a) erhält man einen Widerspruch, d.h.

$$\begin{aligned} a &= c \\ \overline{f(x)} = a - ib &= c + id = f(x^*) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \forall f:\ f(x^*) &= \overline{f(x)} \\ \forall f:\ G(x^*)(f) = f(x^*) &= \overline{f(x)} = \overline{G(x)(f)} \\ G(x^*) &\equiv \overline{G(x)} \end{aligned}$$

■

Satz 48.8 *Sei A vertauschende C^*-Algebra mit Eins. Dann ist*

$$G : A \to C(SpecA), x \mapsto (Spec(A) \to Sp(x), f \mapsto f(x))$$

umkehrbar und erhält die C^*-Algebrenstruktur und ist längenerhaltend.

Beweis. Da Spec A kompakt ist, ist $C(Spec(A))$ mit $\overline{f} = f^*$ eine C^*-Algebra.
$G(A)$ ist eine Unteralgebra.
Wir haben schon gezeigt: $G(x^*) = \overline{G(x)}$ und für $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} \| x^2 \|^2 &= \| x^* x^* x x \| \\ &\overset{\text{vertauschend}}{=} \| x^* x x^* x \| \\ &\overset{C^*-\text{Bedingung}}{=} \| x^* x \|^2 \\ &\overset{C^*-\text{Bedingung}}{=} \| x \|^4 \\ \| x^2 \| &= \| x \|^2 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{n\to\infty} \| x^{2^n} \|^{\frac{1}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\| x \|^{2^n} \right)^{\frac{1}{2^n}} \\ &= \| x \| \end{aligned}$$

Wegen

$$\| G(x) \| = r(x) = \| x \|$$

ist G längenerhaltend und es gilt

$$\begin{aligned} \| G(x)^2 \| &= \| x \|^2 \\ &= \| x^* x \| = \| G(x)\overline{G(x)} \| \end{aligned}$$

Wegen

$$G(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

ist G eins zu eins. Wegen

$$\begin{aligned}
G(x_n) \to y \quad & \Rightarrow \quad (G(x_n))_n \text{ Cauchyfolge} \\
& \stackrel{\text{längenerhaltend}}{\Rightarrow} \quad (x_n)_n \text{ Cauchyfolge in } A \\
& \stackrel{\text{A abgeschlossen}}{\Rightarrow} \quad \exists x \in A : \; x_n \to x \\
& \stackrel{G \text{ stetig}}{\Rightarrow} \quad G(x_n) \to G(x)
\end{aligned}$$

ist $G(A)$ abgeschlossen.
Die $(*)$-Bedingungen sind erfüllt wegen $G(x^*) = \overline{G(x)}$.
Damit ist $G(A)$ $*$-Unteralgebra von $C(SpecA)$. Wegen

$$G(1) = 1$$

gilt

$$1 \in G(A)$$

Gilt

$$\forall x \in A : \; f_1(x) = G(x)(f_1) = G(x)(f_2) = f_2(x)$$

so folgt

$$f_1 = f_2$$

Wegen

$$\begin{aligned}
f_1 \neq f_2 \quad & \Rightarrow \quad \exists x \in A : \; f_1(x) \neq f_2(x) \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in A : \; G(x)(f_1) \neq G(x)(f_2)
\end{aligned}$$

trennt $G(A)$ Punkte und somit gilt

$$G(A) = C(Spec(A))$$

und G ist auf. ■

49. Stetige Funktionen in C^*-Algebren

Für $x \in L(H)$ und ein Polynom $p(z, \overline{z}, 1)$ wählt man $p(x, x^*, 1) \in L(H)$. Wir suchen eine Fortsetzung auf den Abschluß $\overline{P(z, \overline{z}, 1)}$.

Satz 49.1 *Sei A C^*-Algebra mit 1 und $x \in A$.*
a) *Die von x,1 erzeugte Unter-C^*-Algebra:*

$$C^*(x,1) := \bigcap_{x,1 \in B,\ B\ C^*-Algebra} B.$$

ist die kleinste C^*-Algebra, die $x, 1$ enthält.
b) *Sei*

$$P(x, x^*, 1) = \{\textit{Linear-Kombinationen von Produkten } x, x^*, 1\}$$

d.h. die nicht-vertauschenden Polynome in x, x^*. Dann gilt:

$$\overline{P(x, x^*, 1)} = C^*(x, 1)$$

Beweis. a) Sie ist die kleinste, da über alle möglichen geschnitten wird.
b) Es gilt

$$\begin{array}{rcl} P(x, x^*, 1) & \subset & C^*(x, 1) \\ \overline{P(x, x^*, 1)} & \subset & C^*(x, 1) \end{array}$$

$P(x, x^*, 1)$ ist ein Untervektorraum und eine Algebra, da die Multiplikation von Polynomen zweilinear und ist und es gilt $(p(x)q(x))r(x) = p(x)(q(x)r(x))$.
Damit ist $\overline{P(x, x^*, 1)}$ eine Unteralgebra.
Da $\overline{P(x, x^*, 1)}$ abgeschlossen ist, ist sie vollständig.
Die Eigenschaften von $(*)$ gelten in A.
Da die linken und rechten Seiten in $\overline{P(x, x^*, 1)}$ sind, gelten für $\overline{P(x, x^*, 1)}$ die Bedingungen von $(*)$.

$$\forall x \in A : \| x^* x \| = \| x \|^2$$

gilt weiterhin in $\overline{P(x, x^*, 1)}$.
Damit ist $\overline{P(x, x^*, 1)}$ eine C^*-Algebra, die $x, 1$ enthält und es folgt

$$C^*(x, 1) \subset \overline{P(x, x^*, 1)}$$

■

Satz 49.2

$$C^*(x, 1) \textit{ ist vertauschend} \iff xx^* = x^* x$$

Beweis. "$\Rightarrow$": klar.
"$\Leftarrow$": In $P(x, x^*, 1)$ lassen sich mit

$$xx^* = x^*x$$

die x nach links und die x^* nach rechts ziehen.
Das überträgt sich auf den Grenzwert.
Sei $y, z \in C^*(x, 1)$ beliebig. Dann gilt

$$\exists p_n, q_n \in P(x, x^*, 1) : \lim_{n\to\infty} p_n = y \text{ und } \lim_{n\to\infty} q_n = z$$

und

$$\begin{aligned} yz &= \lim_{n\to\infty} p_n \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n q_n \\ &\overset{xx^*=x^*x}{=} \lim_{n\to\infty} q_n p_n = \lim_{n\to\infty} q_n \lim_{n\to\infty} p_n \\ &= zy \end{aligned}$$

■

Satz 49.3 *a) Seien A,B C^*-Algebren und $f, g : B \to A$ stetig und C^*-Algebra erhaltend. Dann ist*

$$\begin{aligned} B_0 &:= \{x \in B : f(x) = g(x)\} \\ &= (f-g)^{-1}(0) \end{aligned}$$

eine C^*-Unteralgebra.
b) Sei B mit Eins. Dann gilt:

$$f = g \text{ auf } C^*(x, 1) \iff \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(1) = g(1) \end{cases}$$

Beweis. a) Da f, g stetig ist, ist $f - g$ stetig und

$$B_0 = (f-g)^{-1}(0) \text{ ist abgeschlossen}$$

Da f, g linear, ist $f - g$ linear und

$$B_0 = (f-g)^{-1}(0) \text{ ist ein Untervektorraum}$$

Wegen

$$\begin{aligned} x, y \in B_0 &\Rightarrow f(xy) = f(x)f(y) = g(x)g(y) = g(xy) \\ &\Rightarrow xy \in B_0 \end{aligned}$$

ist B_0 abgeschlossen unter Muliplikation und eine Unteralgebra.
Es gilt weiterhin

$$\forall x \in B_0 : \| x^* x \| = \| x \|^2$$

Da f, g C^*-Algebra erhaltend sind, gilt

$$f(x^*) = f(x)^* = g(x)^* = g(x^*)$$

d.h.

$$x \in B_0 \Rightarrow x^* \in B_0$$

Die linken und rechten Seiten der $(*)$-Bedingungen sind in B_0 und bleiben erhalten, da f,g C^*-Algebra erhaltend sind.
b) "$\Rightarrow$": $x, 1 \in C^*(x, 1)$
"$\Leftarrow$": Nach a) stimmen f, g auf $\overline{P(x, x^*, 1)}$ überein, also auf $C^*(x, 1)$. ■

Satz 49.4 *Sei A C^*-Algebra mit Eins und $x \in A$ mit $xx^* = x^*x$. Dann gilt*
a) $\forall y \in C^*(x, 1) : \ Sp_A(y) = Sp_{C^*(x,1)}(y)$
Die größere Algebra hat nicht mehr umkehrbare Elemente.
b) Die Abbildung

$$\hat{x} : Spec\ C^*(x, 1) \to Sp_A x = Sp_{C^*(x,1)} x \subset \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$$

ist umkehrbar und $\hat{x}, \hat{x}^{-1}$ sind stetig zwischen kompakten Räumen.

Beweis. a) Wegen

$$\begin{aligned} & (c - y)a = a(c - y) \\ \Rightarrow \quad & a(c - y)^{-1} = (c - y)^{-1} a \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & c - y \text{ vertauscht mit } x, 1 \\ \Rightarrow \quad & (c - y)^{-1} \text{ vertauscht mit } x, 1 \end{aligned}$$

und

$$\forall y \in C^*(x, 1) : \ B := C^*(x, (c - y)^{-1}, 1) \text{ ist vertauschende } C^*\text{-Algebra}$$

Wegen

$$C^*(x, 1) \subset B$$

gilt

$$G(C^*(x, 1)) \subset G(B) = C(SpecB)$$

Das längenerhaltende Bild der abgeschlossenen Teilmenge ist abgeschlossen.
Die Unteralgebra $G(C^*(x, 1))$ ist abgeschlossen unter

$$f \to \overline{f}$$

Seien $f, g \in SpecA$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & f = g \text{ auf } C^*(x,1) \\ \Rightarrow & f(y) = g(y) \text{ und } f(1) = g(1) \\ \Rightarrow & f(c-y) = g(c-y) \\ \Rightarrow & f((c-y)^{-1}) = (f(c-y))^{-1} = (g(c-y))^{-1} = g((c-y)^{-1}) \\ \Rightarrow & f = g \text{ auf } 1, x, (c-y)^{-1} \\ \Rightarrow & f = g \text{ auf } C^*(x,(c-y)^{-1},1) \end{array}$$

Damit trennt $G(C^*(x,1))$ Punkte. Damit folgt

$$\begin{array}{rcl} G(C^*(x,1)) & = & G(C^*(x,(c-y)^{-1},1)) \\ C^*(x,1) & = & C^*(x,(c-y)^{-1},1) \\ (c-y)^{-1} & \in & C^*(x,1) \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{ll} & c-y \text{ umkehrbar in } A \\ \Rightarrow & c-y \text{ umkehrbar in } C^*(x,1) \end{array}$$

2.) a) Wegen

$$\begin{array}{rcl} Spx & = & \{f(x) : f \in Spec\ C^*(x,1)\} \\ & = & \{ \text{ Wertebereich von } \hat{x} : Spec\ C^*(x,1) \to Sp_A x, f \mapsto f(x)\} \end{array}$$

ist $\hat{x}$ auf.
b) Da A C^*-Algebra mit 1 ist, gilt $f(1) = g(1)$ und mit

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = g(1) \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall y \in C^*(x,1):\ f(y) = g(y)$$

ist $\hat{x}$ eins zu eins.
c) Da dieselbe Topologie des punktweisen Grenzwertes vorliegt, gilt

$$\begin{array}{rcl} f_i \to f & \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} & \forall y \in C^*(x,1) = \overline{P(x,x^*,1)}:\ f_i(y) \to f(y) \\ & \Longleftrightarrow & \forall y \in P(x,x^*,1):\ f_i(y) \to f(y) \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} f_i(x) \to f(x) \\ f_i(1) \to f(1) \end{array}\right. \\ & \overset{f_i(1)=1=f(1)}{\Longleftrightarrow} & \hat{x}(f_i) = f_i(x) \to f(x) = \hat{x}(f) \end{array}$$

und $G(x), G(x)^{-1}$ sind stetig. ■

Satz 49.5 (Funktionalkalkül) *Sei A eine C^*-Algebra und $x \in A$ mit $xx^* = x^*x$ und*

$$z : Sp(a) \to \mathbb{C}, c \mapsto c$$

Dann existiert eine eindeutige C^*-Algebren erhaltende Abbildung

$$H : C(Sp(x)) \to C^*(x,1)$$

sodaß

$$H(z) = x$$

H erhält die Länge und heißt Funktionalkalkül bei x.

Beweis. Wegen $xx^* = x^*x$ vertauscht $C^*(x,1)$ und

$$G : C^*(x,1) \to C(Spec(C^*(x,1)), y \mapsto (f \mapsto f(y))$$

ist umkehrbar und C^*-Algebra erhaltend. Da

$$\hat{x} : Spec(C^*(x,1)) \to Sp(x), f \mapsto f(x)$$

umkehrbar und $\hat{x}^{-1}$ stetig ist, ist

$$\hat{x}^t : C(Sp(x)) \to C(Spec(C^*(x,1)), g \mapsto g \circ \hat{x}$$

C^*-Algebra erhaltend.

$$\begin{aligned} \overline{f \circ \hat{x}} &= \overline{f} \circ \hat{x} \\ (f_1 \cdot f_2) \circ \hat{x} &= (f_1 \circ \hat{x}) \cdot (f_2 \circ \hat{x}) \\ (f_1 + bf_2) \circ \hat{x} &= (f_1 \circ \hat{x}) + b(f_2 \circ \hat{x}) \\ \hat{x}^t(1) &= 1 \circ \hat{x} = 1 \end{aligned}$$

und umkehrbar durch $\left(\hat{x}^{-1}\right)^t$.

$$H : C(Sp(x)) \to A, f \mapsto G^{-1}\hat{x}^t(f)$$

ist C^*-Algebra erhaltend und längenerhaltend mit

$$\begin{aligned} H(z) &= G^{-1}(\hat{x}^t(z)) = G^{-1}(z \circ \hat{x}) \\ &= G^{-1}(\hat{x}) \\ &= x \\ H(1) &= 1 \end{aligned}$$

Da $C(Sp(x))$ erzeugt wird durch $1, z$ ist

$$H : C(Sp(x)) \to A$$

eindeutig.

■

Satz 49.6 *a)*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\\ \overline{f}(x) &= f(x^*)\end{aligned}$$

und

$$Id : z \mapsto z \text{ wird abgebildet auf } x$$
$$\overline{Id} : z \mapsto \overline{z} \text{ wird abgebildet auf } x^*$$

b)

$$Sp(f(x)) = f(Spx)$$

c)

$$\begin{aligned}x = x^* \in L(H) &\iff \forall v : \langle xv, v\rangle \in \mathbb{R}\\ &\iff Spx \subset \mathbb{R}\end{aligned}$$

Beweis. a) G^{-1} erhält die C^*-Algebrenstruktur.
b)

$$\begin{aligned}Sp_{L(H)}f(x) &= Sp_{C^*(x,1)}f(x)\\ &= \{\text{Wertebereich von f auf } Spx\}\\ &= f(Spx)\end{aligned}$$

c) "$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned}x = x^* \quad &\Rightarrow \quad \forall v : \langle xv, v\rangle = \langle v, x^*v\rangle = \langle v, xv\rangle = \overline{\langle xv, v\rangle}\\ &\iff \quad \forall v : \langle xv, v\rangle \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Seien $c \in \mathbb{C}$ und $u, v \in H$. Zieht man

$$\begin{aligned}\underbrace{\langle x(u+cv), u+cv\rangle}_{=A} &= \underbrace{\langle xu, u\rangle}_{=B} + \overline{c}\,\langle xu, v\rangle + c\,\langle xv, u\rangle + \underbrace{|c|^2\,\langle xv, v\rangle}_{=C}\\ \underbrace{\langle x(u+cv), u+cv\rangle}_{=A} &= \underbrace{\langle xu, u\rangle}_{=B} + c\,\langle v, xu\rangle + \overline{c}\,\langle u, xv\rangle + \underbrace{|c|^2\,\langle xv, v\rangle}_{=C}\end{aligned}$$

voneinander ab, so gilt mit $c = 1$ und $c = i$

$$\begin{aligned}\langle xu, v\rangle + \langle xv, u\rangle &= \langle v, xu\rangle + \langle u, xv\rangle\\ \langle xu, v\rangle - \langle xv, u\rangle &= -\langle v, xu\rangle + \langle u, xv\rangle\end{aligned}$$

Addieren ergibt

$$\langle xu, v\rangle = \langle u, xv\rangle$$

Da

$$Spx = \{\text{Wertebereich von } G(x)\}$$

gilt

$$\begin{aligned} Spx \subset \mathbb{R} &\iff G(x) \subset \mathbb{R} \\ &\iff G(x) = \overline{G(x)} = G(x^*) \\ &\iff x = x^* \end{aligned}$$

■

Definition 49.7 *Sei $x = x^* \in L(H)$.*

$$\begin{aligned} x \textit{ heißt positiv} &\iff Spx \subset [0, \infty) \\ &\iff Spx \textit{ ist positiv} \end{aligned}$$

Damit kann man Funktionalkalkül mit Funktionen machen, die nur auf $[0, \infty)$ definiert sind.

Satz 49.8 *Jedes positive $x \in L(H)$ besitzt eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel $\sqrt{x}$.*

Beweis. Da die Wurzel auf $Sp(x) \subset [0, \infty)$ existiert und eindeutig ist und wegen

$$C^*(x, 1) = C(Spx)$$

existiert

$$y = \sqrt{x}$$

und ist eindeutig.
Da die Koeffizienten in $\mathbb{R}$ sind (siehe den Beweis) und

$$(\sqrt{x})^* \leftarrow (p_n(x))^* \stackrel{a_i \in \mathbb{R}}{=} p_n(x^*) \rightarrow \sqrt{x^*}$$

gilt

$$(\sqrt{x})^* = \sqrt{x^*} \stackrel{x^*=x}{=} \sqrt{x}$$

Wegen

$$Sp\sqrt{x} = \sqrt{Spx} \subset [0, \infty)$$

ist $\sqrt{x}$ positiv.
■

Satz 49.9 *Mit den stetigen Funktionen id_+ und id_- und dem Funktionalkalkül läßt sich ein x mit $xx^* = x^*x$ zerlegen als*

$$x = x_+ - x_- \textit{ mit } Spx_+, Spx_- \subset [0, \infty)$$

Wegen

$$id_+ \cdot id_- = 0$$

gilt

$$x_+ \cdot x_- = 0$$

Satz 49.10 *Sei $x \in L(H)$.*

$$x \textit{ ist positiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall v: \ \langle xv, v\rangle \geq 0$$

Beweis. "$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} \langle xv, v\rangle &= \left\langle \sqrt{x}\sqrt{x}v, v\right\rangle \\ &= \left\langle \sqrt{x}v, \sqrt{x}v\right\rangle \\ &= \| \sqrt{x}v \|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Annahme: $x_- \neq 0$. Dann gilt

$$\exists w \in H: \ \langle xw, w\rangle < 0$$

Da x_- eine positive Funktion ist, verwende Funktionalkalkül mit x_-. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x_-)^{\frac{3}{2}} &\neq 0 \text{ ist positive Funktion} \\ xx_- &= (x_+ - x_-)x_- = -x_-^2 \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \langle xx_-v, x_-v\rangle &= -\left\langle x_-^2 v, x_-v\right\rangle \\ &= -\underbrace{\left\langle x_-^{\frac{3}{2}} v, x_-^{\frac{3}{2}} v\right\rangle}_{>0} \\ &< 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Satz 49.11 *Die Summe von zwei positiven Operatoren ist positiv.*
Das ist bei der Charakterisierung mit dem Spektrum völlig unklar.
Man weiß aber nichts über das Spektrum der Summe. Bei Matrizen kennt man die Eigenwerte von A,B aber die Eigenwerte von A+B sind völlig unklar.

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle (x_1 + x_2)v, v\rangle &= \langle x_1 v, v\rangle + \langle x_2 v, v\rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

■

50. Literaturverzeichnis

C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter, Berlin, 2001
B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer, Berlin, 2000
Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, 2000
D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 2004

Sachverzeichnis

Inhaltsverzeichnis