n Einführungen Einführunge

Richard Ohnsorge

# Einführung in die Mathematik II

## Numerik und Wahrscheinlichkeitstheorie

n Einführungen Einführunge

Richard Ohnsorge

# Einführung in die Mathematik II

# EINFÜHRUNGEN
# – Naturwissenschaften –

Band 2

LIT

Richard Ohnsorge

# Einführung in die Mathematik II

Numerik und Wahrscheinlichkeitstheorie

LIT

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-643-11272-9



Verlagskontakt:
Fresnostr. 2 D-48159 Münster
Tel. +49 (0) 2 51-620 320 Fax +49 (0) 2 51-922 60 99
e-Mail: lit@lit-verlag.de http://www.lit-verlag.de

**Auslieferung:**
Deutschland: LIT Verlag Fresnostr. 2, D-48159 Münster
Tel. +49 (0) 2 51-620 32 22, Fax +49 (0) 2 51-922 60 99, e-Mail: vertrieb@lit-verlag.de

Österreich: Medienlogistik Pichler-ÖBZ, e-Mail: mlo@medien-logistik.at

# Vorwort

In der Numerik werden Interpolation, Iterationsverfahren, schnelle Fouriertransformation, Differentiation und Integration und Splines abgedeckt.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden der Zentrale Grenzwertsatz, das starke und schwache Gesetz der großen Zahlen, Bedingte Erwartungswerte und Martingale und die Brownsche Bewegung behandelt. Die erforderliche Maßtheorie ist vollständig dargestellt.

Alle Beweise sind detailliert ausgeführt.

Anregende Diskussionen mit den Mathematik-HochschullehrerInnen der Universität Münster haben dieses Buch ermöglicht.

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I.
# Numerik

## 1. Längen

**Definition 1.1** *Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine* ***Länge*** *auf $V$ ist eine Abbildung*

$$\| \cdot \|: V \to [0, \infty), x \mapsto \| x \|$$

*mit*

$$\begin{array}{ll} 1.) & \textit{Aus } \| x \| = 0 \textit{ folgt } x = 0 \\ 2.) & \forall c \in \mathbb{K}\ \forall x \in V : \| cx \| = |c| \, \| x \| \\ 3.) & \forall x, y \in V : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \end{array}$$

*Ein Vektorraum mit einer Länge heißt* ***Längenraum.***
*Schreibweise:* $(V, \| \cdot \|)$.

### Im Folgenden betrachten wir nur den $\mathbb{R}^n$:

**Satz 1.2** *Mit dem Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert man*

$$\| \cdot \|_2: \mathbb{R}^n \to [0, \infty), x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

*a)*

$$\begin{array}{ccc} x = 0 & \Longleftrightarrow & \| x \|_2 = 0 \\ x = 0 & \Rightarrow & \langle x, y \rangle = 0 \end{array}$$

*b) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \|_2 \| y \|_2$$

*c) Es gilt*

$$| \langle x, y \rangle | = \| x \|_2 \| y \|_2 \Longleftrightarrow \textit{x,y linear abhängig}$$

*d) $\| \cdot \|_2$ ist eine Länge.*

**Beweis.** Wegen $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ ist die Wurzel definiert und $\geq 0$. Damit ist die Abbildung definiert.

**a)** Da die Wurzel $\sqrt{\cdot}$ streng monoton steigend ist, gilt

$$\begin{aligned} x = 0 & \iff & x_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n \\ & \iff & x_i^2 = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n \\ & \iff & \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ & \iff & \| x \|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\langle x, y \rangle = \langle 0 \cdot y, y \rangle = 0 \cdot \langle y, y \rangle = 0$$

b) Für $x = 0$ oder $y = 0$ gilt

$$| \langle x, y \rangle | = 0 \leq \| x \|_2 \| y \|_2$$

und die Behauptung stimmt.
Seien $x \neq 0 \neq y$. Für alle $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 & \leq & \left\| tx \pm \frac{1}{t} y \right\|_2^2 \\ & = & \left\langle tx \pm \frac{1}{t} y, tx \pm \frac{1}{t} y \right\rangle \\ & = & \langle tx, tx \rangle \pm \left\langle tx, \frac{1}{t} y \right\rangle \pm \left\langle \frac{1}{t} y, tx \right\rangle + \left\langle \frac{1}{t} y, \frac{1}{t} y \right\rangle \\ & = & t^2 \| x \|_2^2 + \frac{1}{t^2} \| y \|_2^2 \pm 2 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Für $t^2 = \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}$ folgt

$$0 \leq 2 \| x \|_2 \| y \|_2 \pm 2 \langle x, y \rangle$$

und damit die Behauptung.

$$| \langle x, y \rangle | = \pm \langle x, y \rangle \leq \| x \|_2 \| y \|_2$$

**c)** 1. Fall: Für $x = 0$ oder $y = 0$ sind x,y linear abhängig und es gilt

$$| \langle x, y \rangle | = 0 = \| x \|_2 \cdot \| y \|_2$$

2. Fall: Seien $x \neq 0 \neq y$.
"$\Rightarrow$" Mit

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle & = & \| x \|_2 \| y \|_2 \\ t^2 & = & \frac{\| y \|_2}{\| x \|_2} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\left\|tx-\frac{1}{t}y\right\|_2^2 &= t^2 \parallel x \parallel_2^2 + \frac{1}{t^2} \parallel y \parallel_2^2 - 2\langle x,y\rangle \\ &= 2 \parallel x \parallel_2 \parallel y \parallel_2 - 2 \parallel x \parallel_2 \parallel y \parallel_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

und mit a)

$$\begin{aligned}tx-\frac{1}{t}y &= 0 \\ tx &= \frac{1}{t}y\end{aligned}$$

Also sind x und y linear abhängig.
Mit

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= - \parallel x \parallel_2 \parallel y \parallel_2 \\ t^2 &= \frac{\parallel y \parallel_2}{\parallel x \parallel_2}\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\left\|tx+\frac{1}{t}y\right\|_2^2 &= t^2 \parallel x \parallel_2^2 + \frac{1}{t^2} \parallel y \parallel_2^2 + 2\langle x,y\rangle \\ &= 2 \parallel x \parallel_2 \parallel y \parallel_2 - 2 \parallel x \parallel_2 \parallel y \parallel_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}tx+\frac{1}{t}y &= 0 \\ tx &= -\frac{1}{t}y\end{aligned}$$

Also sind x und y linear abhängig.
"$\Leftarrow$" Seien x,y linear abhängig, d.h. $y = ax$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle| &= |a| \cdot |\langle x,x\rangle| \\ &= \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle x,x\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle ax,ax\rangle} \\ &= \parallel x \parallel_2 \parallel y \parallel_2\end{aligned}$$

**d)** Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \| cy \|_2 &= \sqrt{\langle cy, cy \rangle} = \sqrt{c\bar{c}\,\langle y, y\rangle} \\ &= \sqrt{|c|}\sqrt{|c|}\sqrt{\langle y, y\rangle} = |c| \parallel y \|_2 \end{aligned}$$

Addition

$$\begin{aligned} \| x+y \|_2^2 &= \| x \|_2^2 + 2\,\langle x, y\rangle + \| y \|_2^2 \\ &\leq \| x \|_2^2 + 2|\,\langle x, y\rangle\,| + \| y \|_2^2 \\ &\overset{b)}{\leq} \| x \|_2^2 + 2 \parallel x \|_2 \| y \|_2 + \| y \|_2^2 \\ &= (\| x \|_2 + \| y \|_2)^2 \end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel, folgt die Behauptung, da die Wurzel $\sqrt{\cdot}$ streng monoton steigend ist. ■

**Satz 1.3**

$$\begin{gathered} \| \cdot \|_1 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty), x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \| \cdot \|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty), x \mapsto \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \end{gathered}$$

*sind Längen im* $\mathbb{R}^n$.

**Beweis. a)**

$$\begin{aligned} \| x \|_1 = 0 &\overset{Def}{\iff} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\ &\iff \forall 1 \leq i \leq n : |x_i| = 0 \\ &\iff \forall 1 \leq i \leq n : x_i = 0 \end{aligned}$$

und

$$\| cx \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |cx_i| = |c| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |c| \parallel x \|_1$$

Wegen

$$\begin{aligned} \| x+y \|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\ &= \| x \|_1 + \| y \|_1 \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
\| x \|_\infty = 0 &\overset{Def}{\iff} \max_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\
&\iff \forall 1 \le i \le n : |x_i| = 0 \\
&\iff \forall 1 \le i \le n : x_i = 0
\end{aligned}$$

und

$$\| cx \|_\infty = \max_{i=1}^{n} |cx_i| = |c| \max_{i=1}^{n} |x_i| = |c| \, \| x \|_\infty$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\forall 1 \le i \le n : \; |x_i| + |y_i| &\le \max_{i=1}^{n} |x_i| + \max_{i=1}^{n} |y_i| \\
\max_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|) &\le \max_{i=1}^{n} |x_i| + \max_{i=1}^{n} |y_i|
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\| x + y \|_\infty &= \max_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \max_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|) \\
&\le \max_{i=1}^{n} |x_i| + \max_{i=1}^{n} |y_i| \\
&= \| x \|_\infty + \| y \|_\infty
\end{aligned}$$

■

# 2. Längen linearer Abbildungen

Seien U,V endlich-dimensionale Längenräume.

**Definition 2.1**

$$B(U,V) := \{T : U \to V \ \mathit{linear}\}$$

*wird ein Längenraum durch*

$$\| \cdot \|_{U,V} : B(U,V) \to \mathbb{R}, T \mapsto \| T \| := \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\| Tu \|_V}{\| u \|_U} = \sup_{\|u\|=1} \| Tu \|_V$$

**Beweis.** Da sich $\frac{1}{\|u\|}$ an Länge und T linear vorbeiziehen läßt, gilt

$$\begin{aligned} \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\| Tu \|_V}{\| u \|_U} &= \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \left\| T \frac{u}{\| u \|} \right\| \\ &= \sup_{\|u\|=1} \| Tu \|_V \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \forall x, \| x \|_2 = 1 : \| Ax + Bx \| &\leq \| Ax \| + \| Bx \| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| + \sup_{\|x\|=1} \| Bx \| \\ \sup_{\|x\|=1} \| Ax + Bx \| &\leq \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| + \sup_{\|x\|=1} \| Bx \| \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \| A \| &= \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| \geq 0 \\ \| cA \| &= \sup_{\|x\|=1} \| cAx \| = \sup_{\|x\|=1} |c| \, \| Ax \| \\ &= |c| \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = |c| \, \| A \| \\ \| A + B \| &= \sup_{\|x\|=1} \| Ax + Bx \| \\ &\overset{\text{s.o.}}{\leq} \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| + \sup_{\|x\|=1} \| Bx \| \\ &= \| A \| + \| B \| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \| A \| = 0 &\iff \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = 0 \\ &\iff \forall x : \| Ax \| = 0 \\ &\iff \forall x : Ax = 0 \\ &\iff A \equiv 0 \end{aligned}$$

■

**Beispiel 2.2** *Obige Länge wurde aus den Längen auf U und V konstruiert. Man kann Längen aber auch direkt konstruieren.*

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$$

*ist eine Länge.*

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned}\forall 1 \le i,j \le n: \ |a_{ij}+b_{ij}| &\le |a_{ij}| + |b_{ij}| \\ &\le \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| + \sup_{1\le i,j\le n} |b_{ij}| \\ \sup_{1\le i,j\le n} (|a_{ij}+b_{ij}|) &\le \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| + \sup_{1\le i,j\le n} |b_{ij}|\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\| cA \| &= \sup_{1\le i,j\le n} |ca_{ij}| = |c| \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| = |c| \, \| A \| \\ \| A+B \| &= \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}+b_{ij}| \\ &\le \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| + \sup_{1\le i,j\le n} |b_{ij}| \\ &= \| A \| + \| B \| \\ \| A \| = 0 &\iff \forall i,j : |a_{ij}| = 0 \\ &\iff A \equiv 0\end{aligned}$$

■

**Bemerkung 2.3** $\| T \|_{U,V}$ *gibt an, wie stark T die Länge eines Vektors höchstens vergrößert.*

**Satz 2.4** *Es gilt*

$$\begin{array}{ll} a) & \forall u \in U : \| Tu \| \le \| T \| \cdot \| u \|_U \\ b) & \| id \| = 1 \\ c) & \| AB \| \le \| A \| \| B \| \\ d) & \| T \| = \inf \left\{ L > 0 : \sup_{\|u\|=1} \| Tu \| \le L \right\} \end{array}$$

**Beweis. a)** 1. Fall: Sei $u \neq 0$. Aus

$$\frac{\| Tu \|}{\| u \|} \quad \leq \quad \sup_{\|u\|=1} \frac{\| Tu \|}{\| u \|} = \| T \|$$

folgt

$$\| Tu \| \leq \| T \| \| u \|$$

2. Fall: Sei $u = 0$. Dann gilt

$$\| Tu \| = 0 = \| u \|$$

**b)**

$$\sup_{\|u\|=1} \frac{\| \mathrm{id}\, u \|}{\| u \|} = \sup_{\|u\|=1} \frac{\| u \|}{\| u \|} = \sup_{\|u\|=1} 1 = 1$$

**c)**

$$\sup_{\|u\|=1} \frac{\| ABu \|}{\| u \|} \overset{a)}{\leq} \sup_{\|u\|=1} \frac{\| A \| \| Bu \|}{\| u \|} = \| A \| \| B \|$$

**d)** Wegen

$$\sup_{\|u\|=1} \| Tu \| \leq \| T \|$$

gilt

$$\inf \left\{ L > 0 : \sup_{\|u\|=1} \| Tu \| \leq L \right\} \leq \| T \|$$

Wegen

$$\sup_{\|u\|=1} \| Tu \| \geq \| T \|$$

gilt

$$\inf \left\{ L > 0 : \sup_{\|u\|=1} \| Tu \| \leq L \right\} \geq \| T \|$$

■

**Satz 2.5**

$$\begin{aligned} \| A \|_\infty &= \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \ \textit{(die maximale Zeilensumme)} \\ \| A \|_1 &= \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \ \textit{(die maximale Spaltensumme)} \end{aligned}$$

*Merkregel: Ein Buch hat eine Spalte und unendlich viele Zeilen.*

**Beweis. a)** Sei $\| x \|_\infty = 1$ und $A \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\| Ax \|_\infty &= \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \\
&\leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|_\infty = 1} \\
&\leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|
\end{aligned}$$

Das Maximum werde für $i = j$ angenommen.
Für $A \neq 0$ ist dann ein $a_{jk} \neq 0$. Für y mit

$$y_k := \begin{cases} \dfrac{\overline{a}_{j,k}}{|a_{j,k}|} & \text{für } a_{j,k} \neq 0 \\ 0 & \text{für } a_{j,k} = 0 \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\| y \|_\infty &= \max_{k=1}^n |y_k| = 1 \\
a_{j,k} y_k &= a_{j,k} \frac{\overline{a}_{j,k}}{|a_{j,k}|} = |a_{j,k}| \text{ für } a_{j,k} \neq 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\| Ay \|_\infty &= \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} y_k \right| \overset{\max}{=} \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} y_k \right| \\
&= \sum_{k=1}^n |a_{j,k}|
\end{aligned}$$

**b)** Sei $\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\| Ax \|_1 &\overset{Def}{=} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left( |x_k| \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \\
&\leq \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) \left( \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \\
&= \underbrace{\| x \|_1}_{=1} \cdot \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \\
&= \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|
\end{aligned}$$

Sei j die Spalte, in der das Maximum angenommen wird. Setze

$$\begin{aligned}
N &:= \#\{i : a_{ij} \neq 0\} \\
y_j &:= \frac{1}{N} \begin{cases} \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|} & \text{für } a_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{für } a_{ij} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\| y \|_1 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \left| \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|} \right| = 1 \\
a_{ij} y_j &= \frac{a_{ij}}{N} \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|} = |a_{ij}||y_j| \quad \text{für } a_{ij} \neq 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| &\overset{\max}{=} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\
&= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |y_j|\right)}_{=1} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |\underbrace{a_{ij} y_j}_{\geq 0}| \\
&= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n a_{ij} y_j \right| \\
&= \| Ay \|_1
\end{aligned}$$

■

**Satz 2.6** *Ist $T$ umkehrbar, so erhält man eine neue Länge durch*

$$\| x \|_T := \| Tx \|$$

*Für diese gilt*

$$\| A \|_T = \| TAT^{-1} \|$$

**Beweis.** a)

$$\begin{aligned}
\| x \|_T = 0 &\iff \| Tx \| = 0 \iff Tx = 0 \\
&\overset{\text{T umkehrbar}}{\iff} x = 0 \\
\| x \|_T &= \| Tx \| \geq 0 \\
\| x + y \|_T &= \| T(x+y) \| \\
&\overset{T \text{ linear}}{=} \| Tx + Ty \| \\
&\leq \| Tx \| + \| Ty \| \\
&= \| x \|_T + \| y \|_T \\
\| cx \|_T &= \| T(cx) \| \\
&\overset{T \text{ linear}}{=} |c| \, \| Tx \| = |c| \, \| x \|_T
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\| A \|_T &= \sup_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|_T}{\| x \|_T} \\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{\| TAx \|_\infty}{\| Tx \|} \\
&\overset{\text{T umkehrbar}}{=} \sup_{y\neq 0} \frac{\| TAT^{-1}y \|}{\| TT^{-1}y \|} \\
&= \sup_{y\neq 0} \frac{\| TAT^{-1}y \|}{\| y \|} \\
&= \| TAT^{-1} \|
\end{aligned}$$

■

**Satz 2.7** *Für* $U = V = (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2)$ *gilt*

$$\| A \| = \sqrt{c_{max}(A^* A)}$$

*wobei* $c_{\max}(A^* A)$ *der maximale Eigenwert der Matrix* $A^* A$ *ist.*

**Beweis.** Wegen

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

gibt es eine senkrechte Basis $u_1, \ldots, u_n$ mit Länge 1 aus Eigenvektoren mit Eigenwerten $c_i \geq 0$.
Ein beliebiges $x$ mit $\| x \|_2 = 1$ läßt sich in der senkrechten Basis mit Länge 1 darstellen als

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$$

mit

$$\begin{aligned}
1 = \| x \|_2^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i u_i, \sum_{j=1}^{n} b_j u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i b_j \langle u_i, u_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i^2
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}\| Ax \|_2^2 &= \left\langle A\sum_{i=1}^{n} b_i u_i, A\sum_{j=1}^{n} b_j u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_i b_j \left\langle A^T A u_i, u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_i b_j c_i \left\langle u_i, u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i^2 c_i \leq c_{max} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}_{=1} \\ &= c_{max}\end{aligned}$$

Somit

$$\| A \| \leq \sqrt{c_{max}}$$

Für den größten Eigenwert $c_j$ zum Eigenvektor $u_j$ mit $\| u_j \| = 1$ gilt

$$\begin{aligned}\| A \|^2 &\geq \| Au_j \|_2^2 = \langle Au_j, Au_j \rangle \\ &= c_j^2 \langle u_j, u_j \rangle = c_j^2\end{aligned}$$

und somit auch

$$\| A \| \geq \sqrt{c_{max}}$$

■

# 3. Fehlerverstärkung

**Definition 3.1** *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
*a) Es gilt* ***g(t)= O(h(t))*** $\Longleftrightarrow$

$$\exists C > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall |t| < \delta : \| g(t) \| \leq C|h(t)|$$

*b) Es gilt* ***g(t)= o(h(t))*** $\Longleftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \ \exists c : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \ \forall |t| < \delta : \begin{cases} 1.) & \| g(t) \| \leq |c(t)||h(t)| \\ 2.) & \lim_{t \to 0} c(t) = 0 \end{cases}$$

Ein Anfangsfehler $\Delta x$ in den Daten soll sich nach Möglichkeit nicht zu sehr verstärken.

**Definition 3.2** *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in U$. Der Wert $f(x_0)$ soll berechnet werden. Für den relativen Fehler gilt in erster Näherung*

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} = \sum_{j=1}^{m} k_j \frac{\Delta x_j}{x_j}$$

*mit*

$$k_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \frac{x_j}{f(x_0)}$$

*$k_j$ beschreibt, wie stark sich der relative Fehler in den Eingangsdaten durch die Rechnung verstärkt.*

**Beweis.** Nach Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + Df(x_0)\Delta x + r(x) \\ &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Delta x_j + r(x) \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} \\ &\approx \frac{1}{f(x_0)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Delta x_j \end{aligned}$$

∎

**Satz 3.3** *a) Für Multiplikation, Division und für die Addition von Zahlen gleichen Vorzeichens gilt*

$$|k_j| \leq 1$$

*b) Für die Subtraktion von Zahlen gleichen Vorzeichens kann $|k_j|$ sehr groß werden.*

**Beweis.** a) Für $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ergibt sich

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{x_1}{f(x)} = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} = 1$$

Für $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{x_1}{f(x)} = \frac{1}{x_2} \frac{x_1}{x_1/x_2} = 1 \\ k_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{x_2}{f(x)} = \frac{-x_1}{x_2^2} \frac{x_2}{x_1/x_2} = -1 \end{aligned}$$

Für $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ergibt sich

$$|k_1| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{x_1}{f(x)} \right| = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \leq 1$$

b) Für $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ ergibt sich

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{x_1}{f(x)} = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

Das kann sehr groß werden für $x_1 - x_2 \approx 0$. ∎

**Definition 3.4** *Sei $f(x_0)$ zu berechnen in $B(x_0, \delta)$.*
*Definiere die kleinsten oberen absoluten und relativen Schranken.*

$$\begin{aligned} L_{abs}(\delta) &:= \inf \{ L > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) : \| f(x) - f(x_0) \| \leq L \| x - x_0 \| \} \\ L_{rel}(\delta) &:= \inf \left\{ L > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) : \frac{\| f(x) - f(x_0) \|}{\| f(x_0 \|} \leq L \frac{\| x - x_0 \|}{\| x_0 \|} \right\} \\ K_{abs} &:= \lim_{\delta \to 0} L_{abs}(\delta) \\ K_{rel} &:= \lim_{\delta \to 0} L_{rel}(\delta) \end{aligned}$$

**Satz 3.5** *Ist f differenzierbar, so gilt*

$$K_{rel} \leq \| f'(x_0) \| \frac{\| x_0 \|}{\| f(x_0) \|}$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + r(x) \\ 0 &= \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) \| \| x_0 \|}{\| f(x_0) \| \| x - x_0 \|} \\
= \; & \lim_{x\to x_0} \frac{\| f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \| \| x_0 \|}{\| f(x_0) \| \| x - x_0 \|} \\
\leq \; & \lim_{x\to x_0} \frac{\| f'(x_0) \| \| x_0 \|}{\| f(x_0) \|} + \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{\| r(x) \|}{\| x - x_0 \|} \frac{\| x_0 \|}{\| f(x_0) \|}}_{=0} \\
= \; & \frac{\| f'(x_0) \| \| x_0 \|}{\| f(x_0) \|}
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$K_{rel} \leq \frac{\| f'(x_0) \| \| x_0 \|}{\| f(x_0) \|}$$

■

**Definition 3.6** *Sei $A$ umkehrbar und $Ax = b$ zu lösen, d.h.*

$$x = A^{-1}b$$

*Dann gilt*

$$\begin{aligned}
K_{abs} &= \| A^{-1} \| \\
K_{rel} &\leq \| A^{-1} \| \| A \|
\end{aligned}$$

*Die **Kondition** einer Matrix wird deshalb definiert als*

$$Kond(A) := \| A^{-1} \| \| A \|$$

**Beweis.** a) Setze $f(y) = A^{-1}y$. Da sich $\frac{1}{\|y-y_0\|}$ an der Länge und an dem linearen $A^{-1}$ vorbeiziehen läßt, gilt

$$\begin{aligned}
& \inf \left\{ L > 0 : \sup_{y \in B(y_0,\delta)} \frac{\| A^{-1}(y - y_0) \|}{\| y - y_0 \|} \leq L \right\} \\
= \; & \inf \left\{ L > 0 : \sup_{\|y\|=1} \| A^{-1}y \| \leq L \right\} \\
= \; & \| A^{-1} \|
\end{aligned}$$

b) Mit $f(y) = A^{-1}y$ gilt

$$f'(y) = A^{-1}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} K_{rel} &\leq \| f'(y) \| \frac{\| y \|}{\| f(y) \|} \\ &= \| A^{-1} \| \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \\ &\leq \| A^{-1} \| \| A \| \end{aligned}$$

■

Wenn die Matrix A und der Vektor b einen Fehler haben, wie groß ist dann höchstens der Fehler der Lösung?

**Satz 3.7** *Seien $A, \Delta A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ und $A$ umkehrbar mit*

$$\| A^{-1} \| \| \Delta A \| < 1$$

*a) $A + \Delta A$ ist umkehrbar und es gilt*

$$\| (A + \Delta A)^{-1} \| \leq \frac{\| A^{-1} \|}{1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|}$$

*b) Seien $b, \Delta b \in \mathbb{C}^n, b \neq 0$ und $x, x + \Delta x$ die Lösungen von*

$$\begin{aligned} (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b + \Delta b \\ Ax &= b \end{aligned}$$

*Dann gilt*

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \leq \frac{Kond(A)}{1 - Kond(A) \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|}} \left\{ \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|} + \frac{\| \Delta b \|}{\| b \|} \right\}$$

**Beweis.** a) Für $y \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} \| (I + A^{-1}\Delta A)y \| &\geq \| y \| - \| A^{-1}\Delta A y \| \\ &\geq \| y \| (1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Somit ist

$$I + A^{-1}\Delta A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

eins zu eins und daher umkehrbar und

$$\begin{aligned} \| x \| &= \| (I + A^{-1}\Delta A)(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} x \| \\ &\geq \| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} x \| (1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|) \\ \| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} x \| &\leq \frac{\| x \|}{1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|} \\ \| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} \| &\overset{\sup}{\leq} \frac{1}{1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|} \end{aligned}$$

Auch

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$$

ist umkehrbar mit

$$(A + \Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \| (A+\Delta A)^{-1} \| &= \| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} \| \\ &\leq \| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} \| \| A^{-1} \| \\ &\leq \frac{\| A^{-1} \|}{1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|} \end{aligned}$$

b) Zieht man

$$\begin{aligned} (A+\Delta A)(x+\Delta x) &= b + \Delta b \\ Ax &= b \end{aligned}$$

voneinander ab, so erhält man

$$\begin{aligned} Ax + A\Delta x + \Delta A x + (\Delta A)\Delta x - Ax &= b + \Delta b - b \\ (A+\Delta A)\Delta x &= \Delta b - \Delta A x \end{aligned}$$

d.h.

$$\Delta x = (A+\Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta A x)$$

Es folgt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} &\leq \frac{\| (A+\Delta A)^{-1} \| \| \Delta b - \Delta A x \|}{\| x \|} \\ &\leq \frac{\| A^{-1} \|}{1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|}\left(\frac{\| \Delta b \|}{\| x \|} + \| \Delta A \|\right) \\ &= \frac{Kond(A)}{1 - Kond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\| \Delta b \|}{\| A \| \| x \|} + \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|}\right) \\ &\overset{\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|}{\leq} \frac{Kond(A)}{1 - Kond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\| \Delta b \|}{\| b \|} + \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|}\right) \end{aligned}$$

■

# 4. Umformungen von Matrizen

**Definition 4.1** *Sei*

$$P_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

*d.h. i-te und k-te Spalte der Einheitsmatrix wurden vertauscht.*

**Satz 4.2** *a)* $P_{ik} = \overline{P}_{ik}^T$ *und* $P_{ik}^2 = 1$ *und daher* $P_{ik} = P_{ik}^{-1}$
*b)* $P_{ik}A$ *ist die Matrix* $A$ *nach Vertauschen der i-ten und k-ten Zeile*
*c)* $AP_{ik}$ *ist die Matrix* $A$ *nach Vertauschen der i-ten und k-ten Spalte*

**Beweis.** a) Mit $i \neq j \neq k$ gilt

$$\begin{aligned} P_{ij}P_{ij}(e_i) &= P_{ij}(e_j) = e_i \\ P_{ij}P_{ij}(e_j) &= P_{ij}(e_i) = e_j \\ P_{ij}P_{ij}(e_k) &= P_{ij}(e_k) = e_k \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} P_{ij}P_{ij} &= 1 \\ P_{ij} &= P_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

b) Sei $i < j$.

$$P_{ij}a_l = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{l,1} \\ \vdots \\ a_{l,i} \\ \vdots \\ a_{l,j} \\ \vdots \\ a_{l,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{l,1} \\ \vdots \\ a_{l,j} \\ \vdots \\ a_{l,i} \\ \vdots \\ a_{l,n} \end{pmatrix}$$

c) $P_{ik}^T A^T = P_{ik}A^T$ vertauscht i-te und k-te Zeile von $A^T$.

$$AP_{ik} = (P_{ik}^T A^T)^T = (P_{ik}A^T)^T$$

vertauscht i-te und k-te Spalte von $A$. ∎

**Definition 4.3** *Sei $A$ gegeben und $L_i$ die Einheitsmatrix, wobei in der i-ten Spalte unterhalb der 1 die Nullen abgeändert wurden zu*

$$\forall i+1 \leq j \leq n: \; l_{ji}$$

*d.h.*

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Satz 4.4** *Sei $B = L_i A$. Für $1 \leq j \leq n$ seien $a_j, b_j$ die Zeilen von $A$ und $B$. $L_i$ verändert nur die Zeilen $j \geq i+1$. Es addiert das $l_{ji}$-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile:*

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq j \leq i: \; b_j &= a_j \\ \forall i+1 \leq j \leq n: \; b_j &= a_j + l_{ji} a_i \end{aligned}$$

**Beweis.**

$$L_i a_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n l_{1j} a_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n l_{nj} a_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ l_{i+1,i} a_{ik} + a_{i+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,i} a_{ik} + a_{n,k} \end{pmatrix}$$

■

**Satz 4.5** *Es gilt*

$$L_i^{-1} = 2E_n - L_i$$

*d.h. $L_i^{-1}$ hat statt der Einträge $l_{ji}$ die Einträge $-l_{ji}$.*

**Beweis.** Für $k \neq i$ gilt

$$\begin{aligned} (2 \cdot E_n - L_i) L_i (e_k) &= (2 \cdot E_n - L_i)(e_k) \\ &= 2e_k - e_k = e_k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (2 \cdot E_n - L_i) L_i(e_i) \\
= & (2 \cdot E_n - L_i) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ l_{i+1,i} \\ \vdots \\ l_{n,i} \end{pmatrix} \\
= & 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ l_{i+1,i} \\ \vdots \\ l_{n,i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ l_{i+1,i} + l_{i+1,i} \cdot 1 \\ \vdots \\ l_{n,i} + l_{n,i} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
= & e_i
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
(2 \cdot E_n - L_i) L_i &= 2L_i - L_i^2 \\
&= L_i(2 \cdot E_n - L_i)
\end{aligned}$$

folgt

$$L_i^{-1} = 2 \cdot E_n - L_i$$

■

**Satz 4.6** *a) Das Produkt von linken unteren Dreiecksmatrizen ist eine linke untere Dreiecksmatrix.*
*b) Das Produkt von linken unteren Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen 1 ist eine linke untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen 1.*
*c) Das Produkt von rechten oberen Dreiecksmatrizen ist eine rechte obere Dreiecksmatrix.*

**Beweis.** a) Seien $i < j$ und $L, M$ linke untere Dreiecksmatrizen.

$$\begin{aligned}
(LM)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} l_{ik} m_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \underbrace{m_{kj}}_{=0,\text{ für } k<j} + \sum_{k=j}^{n} \underbrace{l_{ik}}_{=0 \text{ für } k \geq j > i} m_{kj} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(LM)_{ii} &= \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \underbrace{m_{ki}}_{=0 \text{ für } k<i} + \underbrace{l_{ii}}_{=1}\underbrace{m_{ii}}_{=1} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{l_{ik}}_{=0 \text{ für } k>i} m_{ki} \\ &= 1\end{aligned}$$

c) Seien R,S rechte obere Dreiecksmatrizen.
Dann sind $R^T, S^T$ linke untere Dreiecksmatrizen.
Nach a) ist $S^T R^T$ ebenfalls eine linke untere Dreiecksmatrix.
Damit ist

$$RS = (S^T R^T)^T$$

eine rechte obere Dreiecksmatrix. ■

**Satz 4.7** *a) Eine linke untere Dreiecksmatrix ist umkehrbar* $\iff$

$$\forall 1 \leq i \leq n: \ l_{ii} \neq 0$$

*Dann ist $L^{-1}$ wieder eine linke untere Dreiecksmatrix*
*Hat L die Diagonalelemente 1, so hat $L^{-1}$ die Diagonalelemente 1.*
*b) Eine rechte obere Dreiecksmatrix ist umkehrbar* $\iff$

$$\forall 1 \leq i \leq n: r_{ii} \neq 0$$

*Dann ist $R^{-1}$ wieder eine rechte obere Dreiecksmatrix*

**Beweis.** a)

$$\begin{aligned}\text{L ist umkehrbar} &\iff \det L \neq 0 \\ &\iff \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \neq 0 \\ &\iff \forall 1 \leq i \leq n: l_{ii} \neq 0\end{aligned}$$

Sei $M = L^{-1}$. Annahme: $\exists i < j$ mit $m_{ij} \neq 0$.
Wähle das größte solche j in der i-ten Zeile. Dann gilt

$$\begin{aligned}(ML)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} l_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} m_{ik} \underbrace{l_{kj}}_{=0} + \underbrace{m_{ij}}_{\neq 0}\underbrace{l_{jj}}_{\neq 0} + \sum_{k=j+1}^{n} \underbrace{m_{ik}}_{=0, \text{ da größtes}} l_{kj} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} ML &= L^{-1}L = 1_n \\ (ML)_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1 &= 1_{jj} = (L^{-1}L)_{jj} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} m_{jk} \underbrace{l_{kj}}_{=0 \text{ da } k<j} + m_{jj} \underbrace{l_{jj}}_{=1} + \sum_{k=j+1}^{n} \underbrace{m_{jk}}_{=0 \text{ da } k>j} l_{kj} \\ &= m_{jj} \end{aligned}$$

b) $R^T$ ist linke untere Dreiecksmatrix. Mit a) gilt

$$\begin{aligned} & R \text{ ist umkehrbar} \\ \Longleftrightarrow\ & R^T \text{ ist umkehrbar} \\ \overset{a)}{\Longleftrightarrow}\ & \forall 1 \leq i \leq n : \quad r_{ii} \neq 0 \end{aligned}$$

und $(R^T)^{-1}$ ist linke untere Dreiecksmatrix. Wegen

$$R^T(R^T)^{-1} = 1 = (RR^{-1})^T = (R^{-1})^T R^T$$

gilt

$$(R^T)^{-1} = (R^{-1})^T$$

und $R^{-1}$ ist rechte obere Dreiecksmatrix. ■

**Satz 4.8** *Für $i < k$ gilt*

$$L_i L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & l_{i+1,i} & \ddots & & & \\ & & \vdots & & 1 & & \\ & & \vdots & & l_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,i} & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Beweis.** $L_i$ addiert das $l_{ji}$-fache der i-ten Zeile zur j-ten.
Die i-te Zeile von $L_k$ ist

$$a_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-te Stelle}}, 0, \ldots, 0)$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
b_j &= a_j \text{ für } 1 \leq j \leq i \\
b_j &= a_j + l_{ji} a_i \text{ für } i+1 \leq j \leq n \\
&= a_j + (0, \ldots, 0, \underbrace{l_{ji} \cdot 1}_{\text{i-te Stelle}}, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}
$$

■

# 5. LR-Zerlegung

Für $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ soll $Ax = b$ gelöst werden.

**Satz 5.1** *Es sind gleichwertig:*
*a) Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung:*

$$\exists! x \in \mathbb{R}^n : Ax = b$$

*b) A ist umkehrbar.*
*c) A ist eins zu eins.*
*d)* $Ax = 0 \iff x = 0$
*e) Die Determinante ist ungleich Null:* $\det A \neq 0$
*f) 0 ist kein Eigenwert von A*
*g) Es gibt ein* $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$*:* $AB = 1_n = BA$

**Beweis.** Das haben wir in der Einführung gezeigt. ∎

## Das LR-Verfahren

Sei $\tilde{A}x = b$. Betrachte im Folgenden die Matrix $A = (\tilde{A}, b)$
Bearbeite in jedem Schritt eine Spalte der Matrix A.
**1. Spalte:** Sind alle Einträge in der ersten Spalte Null, so gehe zur zweiten Spalte.
Ist ein $a_{j1} \neq 0$, so suche das $1 \leq j \leq n$, sodaß $|a_{j1}|$ maximal ist.
Vertausche die erste und j-te Zeile mit der Matrix $P_{1j}$

$$A' := P_{1j} A$$

und ziehe mit $L_1$ von allen Zeilen $2 \leq j \leq n$ das

$$l_{j1} = -\frac{a'_{j1}}{a'_{11}}$$

-fache der 1. Zeile ab. Dadurch werden alle Einträge in der ersten Spalte Null, außer $a'_{11}$.

$$A'' := L_1 P_{1j} A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

**k-te Spalte:**
In den ersten Spalten $1, \ldots, k-1$ von $A^{(k-1)}$ ist unterhalb der Diagonalen schon alles Null.

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} * & * & & \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & 0 & & * \\ \vdots & \vdots & & * \end{pmatrix}$$

Sind alle Einträge $a_{k+1,k}, \ldots, a_{n,k}$ Null so gehe zur Spalte $k+1$.
Ist ein $a_{jk} \neq 0$ für j>k, so wähle das $k \leq j \leq n$, sodaß $|a_{jk}|$ maximal wird.
Vertausche die k-te und j-te Zeile mit der Matrix $P_{jk}$

$$A' := P_{jk} A^{(k-1)}$$

Da nur Zeilen $>$k-1 vertauscht werden, hat A' weiterhin Nullen unterhalb der Diagonale für $1 \leq i \leq k-1$.
Ziehe mittels

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & l_{k+1,k} & \\ & & \vdots & \\ & & l_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}$$

von allen Zeilen $k+1 \leq j \leq n$ das

$$l_{jk} = -\frac{a'_{jk}}{a'_{kk}}$$

-fache der k-ten Zeile ab. Dadurch werden alle Einträge $a_{jk}$ mit $j \geq k+1$, d.h. unterhalb der Diagonalen Null

$$A^{(k)} := L_k P_{jk} A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} * & * & & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Das Verfahren kann durch folgende Matrix beschrieben werden

$$R = L_{n-1} P_{n-1} \ldots L_1 P_1 A$$

mit $P_i = P_{ij}$ für ein $i \leq j \leq n$.
R ist eine rechte obere Dreiecksmatrix.

**Satz 5.2** *Sei $L_k$ eine linke untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen 1 und $P_{ij}$ vertausche nur Elemente in $i, j \geq k+1$. Dann hat*

$$\tilde{L}_k := P_{ij} L_k P_{ij}$$

*die selbe Form wie $L_k$, nur daß die $l_{jk}$ gemäß $P_{ij}$ vertauscht wurden.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_k &:= P_{ij} L_k P_{ij} \\
&= \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \tilde{l}_{k+1,k} & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & 1 & \cdots & 0 & \\ & \tilde{l}_{n,k} & 0 & & & \ddots \end{pmatrix} P_{ij} \\
&= \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & \tilde{l}_{k+1,k} & 1 & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & \tilde{l}_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

**Satz 5.3** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ umkehrbar. Dann gilt*
*a) Es gibt ein $P = P_{n-1} \dots P_1$, eine untere Dreiecksmatrix $L$ mit Diagonalelementen 1 und eine obere Dreiecksmatrix $R$ mit*

$$PA = LR$$

*b) Die LR-Zerlegung ist eindeutig.*
*c) Damit läßt sich $Ax = b$ lösen durch:*

$$\begin{aligned} Lz &= Pb \\ Rx &= z \end{aligned}$$

**Beweis. a)** Aus

$$L_{n-1} P_{n-1} \dots L_1 P_1 A = R$$

folgt

$$A = P_1 L_1^{-1} \dots P_{n-1} L_{n-1}^{-1} R$$

Da

$$P_{n-1} \dots P_{k+1} L_k^{-1} = \tilde{L}_k P_{n-1} \dots P_{k+1}$$

lassen sich die $P_i$ an den $L_i$ vorbeiziehen und es gilt

$$\begin{aligned} PA &= P_{n-1} \cdots P_1 P_1 L_1^{-1} \cdots P_{n-1} L_{n-1}^{-1} R \\ &= P_{n-1} \cdots P_1 P_1 \cdots P_{n-1} \tilde{L}_1 \cdots \tilde{L}_{n-1} R \\ &= \tilde{L}_1 \cdots \tilde{L}_{n-1} R \end{aligned}$$

und

$$L := \tilde{L}_1 \cdots \tilde{L}_{n-1}$$

ist eine linke untere Dreiecksmatrix mit Diagonale 1, d.h.

$$PA = LR$$

Damit ist L umkehrbar mit

$$L^{-1} := \tilde{L}_{n-1}^{-1} \cdots \tilde{L}_1^{-1}$$

**b)** Sei $LR = MS$. Dann gilt

$RS^{-1}$ ist rechte obere Dreiecksmatrix
$L^{-1}M$ ist linke untere Dreiecksmatrix mit Diagonale 1

und somit

$$RS^{-1} = L^{-1}M = 1_n$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} R &= S \\ M &= L \end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\overset{\text{P umkehrbar}}{\Longleftrightarrow} \quad PAx = Pb \\ &\overset{PA=LR}{\Longleftrightarrow} \quad LRx = Pb \\ &\overset{Pb=Lz}{\Longleftrightarrow} \quad LRx = Lz \\ &\overset{\text{L umkehrbar}}{\Longleftrightarrow} \quad Rx = z \end{aligned}$$

■

## Berechnung von $A^{-1}$

Löse $Ax^{(i)} = e_i$ für $1 \leq i \leq n$ mit der LR-Zerlegung. Dann gilt

$$A^{-1} = \left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)$$

oder führe das Verfahren der LR-Zerlegung mit der Matrix $(A, 1_n)$ aus

$$\begin{pmatrix} & | & 1 & & 0 \\ A & | & & \ddots & \\ & | & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r_{11} & * & * & | & * & & 0 \\ & \ddots & * & | & & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} & | & * & & * \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r_{11} & & 0 & | & * & & * \\ & \ddots & & | & & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} & | & * & & * \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & | & \\ & \ddots & & | & A^{-1} \\ 0 & & 1 & | & \end{pmatrix}$$

## Das Programm

Setze $q_i = i$ für $0 \leq i \leq n$ (Speichern der Vertauschungen)
Für $p = 1, \ldots, n-1$:
· Wähle $j \in \{p, \ldots, n\}$ mit $|a_{q_j,p}| = \max_{k=p,\ldots,n} |a_{q_k,p}|$
· Vertausche die Zeilen $q_j$ und $q_p$, d.h. die Werte
· Für $k = p+1, \ldots, n$:
·   Falls $a_{q_j p} = 0$: Breche das Programm ab.
·   Setze $l = a_{q_k p}/a_{q_p q_p}$ (Multiplikationsfaktor)
·   Setze $a_{q_k p} = l$ (Speichere $l$ statt $a_{q_k p} = 0$ in der Matrix)
·   Für $j = p+1, \ldots, n$:
·     Setze $a_{q_k j} = a_{q_k j} - l a_{q_p j}$ (Matrix $A^{(p)}$)
·     Setze $b_{q_k} = b_{q_k} - l b_{q_p}$ (Vektor $b^{(p)}$)

**Lösung durch:**
Setze $x_n = b_{q_n}/a_{q_n n}$

Für $k = n-1, \ldots, 1$ setze

$$x_k = \left( b_{q_k} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{q_k i} x_i \right) \frac{1}{a_{q_k k}}$$

**Satz 5.4** *a) Der Aufwand des Algorithmus ist* $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$
*b) Die Zeilenvertauschung wird als Vektor gespeichert und nicht im Speicher durchgeführt.*
*c) A und b werden überschrieben: Anstelle der Nullen werden die Fakoren* $l_{ij}$ *in der Matrix gespeichert, die Einsen auf der Diagonale von L müssen nicht gespeichert werden, d.h.*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} & R \\ L & \end{pmatrix}$$

**Beweis.** In jeder Spalte k gilt:
Für $k+1 \leq j \leq n$ werden

$$l_{jk} := -\frac{a_{jk}}{a_{kk}}$$

berechnet. Das sind n-k Werte.
Die $l_{jk}$ werden auf die Zeilen $k+1 \leq m \leq n$ angewendet

$$a_{jm} := a_{jm} - l_{jk} a_{km}$$

Das sind $n-k$ Zeilen mit jeweils $n-k$ Einträgen. Das ergibt

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k) + \sum_{k=1}^{n} (n-k) \\
= & \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + O(n^2) \\
= & \frac{(n-1)n(2(n-1)-1)}{6} + O(n^2) \\
= & \frac{1}{3} n^3 + O(n^2)
\end{aligned}$$

■

## Begründung für die Zeilenvertauschung

Es wird

$$a'_{i,k} = a_{i,k} - \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}} a_{j,k}$$

berechnet.
Ist $a_{jj}$ klein, so ist $\frac{1}{a_{jj}}$ groß.
Die relativen Fehler von $a_{jj}$ und $\frac{1}{a_{jj}}$ sind gleich.
Damit wird der absolute Fehler von $\frac{1}{a_{jj}}$ groß. Deshalb sucht man immer das größte Element.

**Beispiel 5.5** *Sei $\varepsilon > 0$ sehr klein.*

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*hat die Lösung*

$$x = \frac{1}{1-\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2\varepsilon \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Ohne maximale Spaltenelementsuche gilt*

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Mit maximaler Spaltenelementsuche gilt*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Beweis.** Da $\varepsilon < 1$ ist A umkehrbar und

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hat die genaue Lösung

$$\begin{aligned} 1 &= \varepsilon x_1 + (2 - x_1) \\ x_1 &= \frac{-1}{-1+\varepsilon} = \frac{1}{1-\varepsilon} \\ x_2 &= 2 - \frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{aligned}$$

Ohne maximale Suche gilt

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} & 2 - \frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right)$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{2-\frac{1}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}} \approx 1 \\
x_1 &= \frac{1}{\varepsilon}\underbrace{(1-x_2)}_{=0} \approx 0
\end{aligned}
$$

Mit maximaler Suche gilt

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ \varepsilon & 1 & | & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1-\varepsilon & | & 1-2\varepsilon \end{pmatrix}
$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx 1 \\
x_1 &= 2 - x_2 \approx 1
\end{aligned}
$$

■

Manchmal reicht die Suche nach dem maximalen Spaltenelement aber nicht aus. Dann benötigt man auch Spaltenvertauschungen.

**Beispiel 5.6**

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \\ 2 \end{pmatrix}
$$

**Beweis.**

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon} & | & \frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon} & | & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & | & 2-\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}
$$

ergibt

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{2-\frac{1}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}} \approx 1 \\
x_1 &= \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\underbrace{\frac{2-\frac{1}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}}}_{\approx 1} \text{ mit großem Fehler}
\end{aligned}
$$

Spaltenvertauschung ergibt

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{1}{\varepsilon} & 1 & | & \frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & 1 & | & 2 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{1}{\varepsilon} & 1 & | & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 1-\varepsilon & | & 1 \end{array} \right)$$

d.h.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1 \\ x_2 &= \varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{1-\varepsilon} \right) \approx 1 \end{aligned}$$

■

# 6. Das Verfahren für positiv definite Matrizen

**Definition 6.1** *$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt* ***positiv definit*** $\Longleftrightarrow$
*a)* $A = \overline{A}^T$
*b)* $\forall x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} : x^T A x > 0$

**Satz 6.2** *Sei A positiv definit. Dann gilt*
*a) $A^{-1}$ existiert und ist positiv definit.*
*b) Alle*

$$B_{i_1,i_k} = \begin{pmatrix} a_{i_1,i_1} & \dots & a_{i_1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & \dots & a_{i_k,i_k} \end{pmatrix}$$

*sind positiv definit. Insbesondere gilt*

$$\forall 1 \leq i \leq n : a_{ii} > 0$$

*c) Alle Eigenwerte sind $> 0$.*

**Beweis. a)** Annahme: es gibt $x \neq 0$ mit $Ax = 0$.
Dann erhält man den Widerspruch

$$0 < x^T A x = x^T 0 = 0$$

Somit ist A eins zu eins und umkehrbar. Wegen

$$\begin{aligned} 1_n &= 1_n^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T \\ 1_n &= 1_n^T = (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T \end{aligned}$$

gilt

$$A^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Sei $y \neq 0$ beliebig. Da A umkehrbar ist, gibt es ein x mit $Ax = y$ und

$$\begin{aligned} y^T A^{-1} y &= x^T A^T A^{-1} A x \\ &= x^T A^T x \\ &= x^T A x > 0 \end{aligned}$$

**b)** symmetrisch: Wegen $A = A^T$ gilt

$$B_{i_1,i_k} = \begin{pmatrix} a_{i_1,i_1} & \dots & a_{i_1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & \dots & a_{i_k,i_k} \end{pmatrix} = B_{i_k,i_1}$$

d.h.

$$\left(B^T\right)_{i_1 i_k} = B_{i_1,i_k}$$

Sei $0 \neq (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{C}^k$ beliebig.
Ergänze $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{C}^k$ durch Nullen zu

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) B_{i_1,i_k} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} x_{i_j} b_{i_j i_l} x_{i_l} \\
= \quad & \sum_{j,l=1}^{n} x_j a_{jl} x_l \\
= \quad & x^T A x \\
\underset{x \neq 0}{>} \quad & 0
\end{aligned}$$

**c)** Für $Ax = cx$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &< x^T A x = c \underbrace{x^T x}_{>0} \\
0 &< c
\end{aligned}$$

■

**Satz 6.3** *Sei A positiv definite* $n \times n$*-Matrix.*
*Dann gibt es genau eine linke untere Dreiecksmatrix L mit*

$$\begin{aligned}
\forall 1 \leq i \leq n: \; l_{ii} &> 0 \\
A &= L\overline{L}^T
\end{aligned}$$

*Ist A reell, so ist auch L reell.*
*Es wird* ***nicht*** $l_{ii} = 1$ *gefordert.*

**Beweis.** Damit ein solches L existiert, muss gelten $A = L\overline{L}^T$.

$$\sum_{k=1}^{j} l_{ik} \bar{l}_{jk} = a_{ij} \text{ für } 1 \leq j \leq i \leq n$$

Das nichtlineare Gleichungssystem besteht aus $\sum_{j=1}^{n} = n(n+1)/2$ Gleichungen und $\sum_{j=1}^{n} = n(n+1)/2$ Unbekannten.
Berechne die Spalten von L
**j=1:** Für i=1 gilt

$$\begin{aligned} l_{11}\bar{l}_{11} &= a_{11} > 0 \\ l_{11} &= \sqrt{a_{11}} > 0 \end{aligned}$$

Für $i = 2, \ldots, n$ gilt

$$\begin{aligned} l_{i1}\bar{l}_{11} &= a_{i1} \\ l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{11}}} \end{aligned}$$

**j-1→j:** Die ersten j-1 Spalten sind bestimmt und ergeben die $(n, j-1)$-Matrix $L_{j-1}$ und es gilt

$$\begin{aligned} (L_{j-1}\overline{L}_{j-1}^{T})_{jj} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,j-1} & a_{j-1,j} \\ a_{j1} & & a_{j,j-1} & x_{jj} \end{pmatrix} \\ x_{jj} &= l_{j1}\bar{l}_{j1} + \ldots + l_{j,j-1}\bar{l}_{j,j-1} \\ A_{jj} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit} \end{aligned}$$

Annahme: $x_{jj} \geq a_{jj}$. Dann gilt für ein beliebiges $0 \neq y \in \mathbb{R}^j$

$$yL_{j-1}L_{j-1}^{T}y = \underbrace{yA_{jj}y}_{>0} + \underbrace{y_j(x_{jj} - a_{jj})y_j}_{\geq 0} > 0$$

und $(L_{j-1}\overline{L}_{j-1}^{T})$ wäre positiv definit mit Rang j.
Wegen $Rang L_{j-1} = j - 1$ gilt

$$Rang L_{j-1}L_{j-1}^{T} \leq j - 1$$

ein Widerspruch. Somit gilt

$$x_{jj} < a_{jj}$$

Für $i = j$ gilt

$$\begin{aligned} a_{jj} &= l_{j1}\bar{l}_{j1} + \ldots + l_{j,j}\bar{l}_{j,j} \\ l_{jj}\bar{l}_{jj} &= a_{jj} - l_{j1}\bar{l}_{j1} - \ldots - l_{jj-1}\bar{l}_{j,j-1} \overset{s.o.}{>} 0 \\ l_{jj} &= \sqrt{a_{jj} - l_{j1}\bar{l}_{j1} - \ldots - l_{jj-1}\bar{l}_{j,j-1}} > 0 \end{aligned}$$

Für $i = j+1, \ldots, n$ gilt

$$\begin{aligned} a_{ij} &= l_{i1}\bar{l}_{j1} + \ldots + l_{i,j}\bar{l}_{jj} \\ l_{ij} &= \frac{a_{ij} - l_{i1}\bar{l}_{j1} - \ldots - l_{i,j-1}l_{j,j-1}}{l_{jj}} \end{aligned}$$

■

## Das Programm

Man arbeitet nur auf dem linken unteren Teil von A und überschreibt ihn mit L

Für $j = 1 \ldots, n$

· Für $i = j, \ldots, n$

· Setze $s = a_{i,j} - a_{i,1}\overline{a}_{j,1} - \ldots - a_{i,j-1}\overline{a}_{j,j-1}$;

· Sei $(i = j)$.

· Für $s \leq 0$ gebe aus "Matrix nicht positiv definit" und breche ab

· Für $s > 0$ setze $a_{j,j} = sqrt(s)$;

· Sei $i > j$.

· Setze $a_{i,j} = s/a_{j,j}$;

**Satz 6.4** *$Ax = b$ kann gelöst werden durch*

$$Ly = b$$
$$\overline{L}^T x = y$$

*Der Algorithmus hat den halben Aufwand des LR-Verfahrens*

$$\frac{n^3}{6} + O(n^2)$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} (n-j)(j-1) + O(1) \\ = \quad & n\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 + O(n^2) \\ = \quad & n\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + O(n^2) \\ = \quad & \frac{1}{6}n^3 + O(n^2) \end{aligned}$$

■

# 7. QR-Zerlegung

Mit einer Spiegelung $H(u)$ an $u$ läßt sich $a$ in $e_k$ überführen. Wähle dazu

$$\begin{aligned} u &:= a \pm \| a \|_2 \, e_k \\ H(u) &:= 1_m - 2\frac{uu^T}{\| u \|_2^2} \end{aligned}$$

**Satz 7.1** *Seien $u, v \in \mathbb{R}^m$. Man erhält eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ durch*

$$\begin{aligned} a_{ij} &= u_i v_j \\ A &= uv^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} (v_1, \ldots, v_m) \end{aligned}$$

*Es gilt*

$$\begin{aligned} Aw &= \langle v, w\rangle \, u \\ A^2 &= \langle u, v\rangle \, A \end{aligned}$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} (Aw)_i &= \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j = u_i \sum_{j=1}^m v_j w_j = \langle v, w\rangle \, u_i \\ (A^2)_{ij} &= (AA)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^m u_i v_k u_k v_j \\ &= u_i v_j \sum_{k=1}^m v_k u_k = \langle v, u\rangle \, a_{ij} \end{aligned}$$

■

**Satz 7.2** *Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$ und*

$$\begin{aligned} H(0) &:= 1_m \\ H(u) &:= 1_m - 2\frac{uu^T}{\| u \|_2^2} \end{aligned}$$

*Dann gilt*

$$H(u) = H(u)^T = H(u)^{-1}$$

**Beweis.**

$$H(u)^T = 1_m^T - \frac{2}{\| u \|_2^2} u^{TT} u^T = H(u)$$

Wegen

$$\begin{aligned}
H(u)^2 &= \left(1_m - 2\frac{uu^T}{\| u \|_2^2}\right)\left(1_m - 2\frac{uu^T}{\| u \|_2^2}\right) \\
&= 1_m - 4\frac{uu^T}{\| u \|_2^2} + 4\frac{(uu^T)^2}{\| u \|_2^4} \\
&= 1_m - \frac{4uu^T}{\| u \|_2^2}\underbrace{\left(1 - \frac{\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\right)}_{=0} \\
&= 1_m
\end{aligned}$$

gilt

$$H(u) = H(u)^{-1}$$

■

**Satz 7.3** *Seien $e_k, a \in \mathbb{R}^m$ und*

$$u := a \pm \| a \|_2 \, e_k$$

*Dann gilt*

$$H(u)a = \mp \| a \|_2 \, e_k$$

**Beweis.** Für $u = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= u = a \pm \| a \|_2 \, e_k \\
H(0)a &= 1_m a = \mp \| a \|_2 \, e_k
\end{aligned}$$

Sei

$$u = a - \| a \|_2 \, e_k \neq 0$$

Mit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \| u \|_2^2 &= \frac{1}{2}\langle a - \| a \|_2 \, e_k, a - \| a \|_2 \, e_k\rangle \\
&= \frac{1}{2} \| a \|_2^2 - \| a \|_2 \langle a, e_k\rangle + \frac{1}{2} \| a \|_2^2 \\
&= \| a \|_2^2 - \| a \|_2 \langle a, e_k\rangle
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
H(u)a &= \left(1_m - 2\frac{uu^T}{\| u \|_2^2}\right) a = a - 2\frac{uu^T a}{\| u \|_2^2} \\
&= a - 2\frac{\langle u, a\rangle}{\| u \|_2^2} u \\
&= a - 2\frac{\langle a - \| a \|_2 e_k, a\rangle}{\| u \|_2^2} u \\
&= a - \underbrace{2\frac{\| a \|_2^2 - \| a \|_2 \langle e_k, a\rangle}{\| u \|_2^2}}_{=1} \cdot u \\
&= a - u \\
&= \| a \|_2 e_k
\end{aligned}$$

Analog für $u = a + \| a \|_2 e_k$ ■

**Satz 7.4**

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & H(u) \end{pmatrix}$$

*ist senkrecht.*

**Beweis.** Da H symmetrisch ist, gilt

$$Q = Q^T$$

Außerdem gilt

$$QQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & (H(u))^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = 1$$

■

## Das Verfahren der QR-Zerlegung

Sei $A = (a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\text{Rang}(A) = n$, d.h. $m \geq n$.
**1. Schritt:** Mit

$$\begin{aligned}
u^{(0)} &:= a_1^{(0)} \pm \| a_1^{(0)} \|_2 e_1 \in \mathbb{R}^m \\
Q_1 &:= H(u^{(0)})
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
H(u^{(0)})a_1^{(0)} &= \mp \parallel a \parallel_2 e_1 \\
Q_1 A &= R^{(1)} = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & & \\ \vdots & A^{(1)} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \\
A^{(1)} &= (a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})
\end{aligned}$$

Wähle dabei in $a \pm \parallel a \parallel_2 e_1$ dasselbe Vorzeichen wie das Vorzeichen von $a_{11}^{(0)}$, damit $a_{11} \pm \parallel a \parallel_2$ numerisch stabil berechnet werden kann.
**2. Schritt:** Mit

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &:= a_2^{(1)} \pm \parallel a_2^{(1)} \parallel_2 e_2 \in \mathbb{R}^{m-1} \\
Q_2 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H(u^{(1)}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$Q_2 Q_1 A = R^{(2)} = \begin{pmatrix} * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & A^{(2)} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Nach n Schritten gilt

$$Q_n \dots Q_1 A = R^{(n)} = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & * \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Da die $Q_i$ senkrecht sind, ist

$$Q := Q_1 \dots Q_n$$

senkrecht und es gilt

$$A = Q_1 \dots Q_n R = QR$$

# 8. Überbestimmte Gleichungssysteme

Für die Lösung von $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ schreibt man

$$b = b_1 + b_2 \in Bild(A) \oplus (BildA)^{\perp}$$

und löst

$$Ax = b_1$$

Da $b_1 \in Bild(A)$ existiert eine Lösung x. Die Menge der Lösungen ist

$$x + NullA$$

Als verallgemeinerte Lösung von $Ax = b$ wählt man aus den Lösungen von $Ax = b_1$ die eindeutige mit

$$x_1 \in (NullA)^{\perp}$$

Um nicht $Bild(A)$ bestimmen zu müssen, benutzt man

$$\text{x löst } Ax = b_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{x löst } A^T Ax = A^T b$$

**Satz 8.1** *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} NullA &= Null(A^T A) \\ \mathbb{R}^m &= Bild(A) \oplus Null(A^T) \end{aligned}$$

*Sei $b = b_1 + b_2 \in BildA \oplus (BildA)^{\perp} = \mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$\textit{x löst } Ax = b_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{x löst } A^T Ax = A^T b$$

*Gilt $RangA = n$, so hat $Ax = b_1$ genau eine Lösung.*

**Beweis. a)** "$\subset$": Aus $Ax = 0$ folgt $A^T Ax = 0$.
"$\supset$": Sei $A^T Ax = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle x, A^T Ax \right\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \| Ax \|^2 \\ 0 &= Ax \end{aligned}$$

**b)** Wegen

$$\mathbb{R}^m = BildA \oplus (BildA)^{\perp}$$

ist zu zeigen $(Bild(A))^{\perp} = Null(A^T)$.

$$\begin{aligned} y \in Bild(A)^{\perp} &\Longleftrightarrow \forall z \in Bild(A) : \ \langle y, z\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, Ax\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : \ \left\langle A^T y, x\right\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow A^T y = 0 \\ &\Longleftrightarrow y \in Null(A^T) \end{aligned}$$

**c)** Wegen $NullA^T = (BildA)^\perp$ ist $A^T$ eins zu eins auf $Bild(A)$.

$$\forall y \in Bild(A) : \left(A^T y = 0 \Rightarrow y \in Bild(A)^\perp\right)$$
$$\forall y \in Bild(A) : \left(A^T y = 0 \Rightarrow y \in Bild(A)^\perp \cap Bild(A) = \{0\}\right)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} & Ax - b_1 = 0 \\ \overset{A^T \text{ eins zu eins auf Bild(A)}}{\iff} \quad & A^T(Ax - b_1) = A^T 0 = 0 \\ \overset{A^T b_2 = 0}{\iff} \quad & A^T(Ax - b) = A^T(Ax - b_1) - \underbrace{A^T b_2}_{=0} = 0 \\ \iff \quad & A^T A x = A^T b \end{aligned}$$

Wegen $NullA^T A = NullA$ gilt

$$x + NullA^T A = x + NullA$$

und somit

$$\text{x löst } Ax = b_1 \quad \iff \quad \text{x löst } A^T A x = A^T b$$

**d)** Wegen

$$\dim NullA = n - \dim BildA = 0$$

gilt $NullA = \{0\}$ und es gibt die Lösungen

$$x + NullA = x$$

■

**Beispiel 8.2 (Ausgleichsgerade)** *a) Für die Daten*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
| $y_i$ | 0.5 | 0.5 | 2 | 3.5 | 3.5 |

*und die Funktion $u(x) = c + dx$ gilt*

$$u(x) = 2 + 0.9x$$

*b) Soll die Funktion*

$$u(x) = \frac{c}{1 + dx}$$

*an die Daten angepasst werden, so betrachtet man $\frac{1}{u(x)}$ und es folgt*

$$u(x) = \frac{0.5}{1 + 0.45x}$$

**Beweis.** Es gilt $Az = b$ mit

$$\begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 2 \\ 3.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$$

Wegen $Rang(A) = 2$ gilt $NullA = 0$ und die Lösung ist eindeutig

$$\begin{aligned} A^T A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= A^T b \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0.9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$g(x) := \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{c} + \frac{d}{c}x = c' + d'x$$

Die selbe Rechnung ergibt

$$\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{c'} = \frac{1}{2} \\ d &= d' \cdot c = 0.45 \\ u(x) &= \frac{0.5}{1 + 0.45x} \end{aligned}$$

■

## Lösen des Ausgleichsproblems mit der QR-Zerlegung bei Rang A =n

Wegen $Kond(A^TA) \approx Kond(A)^2$, ist die LR-Zerlegung für dieses Problem nicht gut geeignet. Deshalb betrachten wir die QR-Zerlegung.

**Satz 8.3** *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang$(A) = n$. Für $A = QR$ gilt*

$$Kond_2(A) = Kond_2(R)$$

**Beweis.** Da $Q, Q^{-1}$ senkrecht sind, gilt

$$\begin{aligned} \| QR \|_2^2 &= \sup_{x\neq 0} \frac{\langle QRx, QRx\rangle}{\langle x, x\rangle} \\ &\overset{Q \text{ senkrecht}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\langle Rx, Rx\rangle}{\langle x, x\rangle} \\ &= \| R \|_2^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \| R^{-1}Q^{-1} \|_2^2 &= \sup_{x\neq 0} \frac{\left\langle R^{-1}Q^{-1}x, R^{-1}Q^{-1}x\right\rangle}{\langle x, x\rangle} \\ &\overset{Q^{-1} \text{ senkrecht}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\left\langle R^{-1}Q^{-1}x, R^{-1}Q^{-1}x\right\rangle}{\langle Q^{-1}x, Q^{-1}x\rangle} \\ &\overset{Q^{-1}\text{umkehrbar}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\left\langle R^{-1}x, R^{-1}x\right\rangle}{\langle x, x\rangle} \\ &= \| R^{-1} \|_2^2 \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} Kond_2(A) &= \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 \\ &= \| QR \|_2 \| R^{-1}Q^{-1} \|_2 \\ &= \| R \|_2 \| R^{-1} \|_2 \\ &= Kond_2(R) \end{aligned}$$

■

**Satz 8.4** *Sei Rang $A = n$ und $A = QR$.*
*$x$ ist verallgemeinerte Lösung des Ausgleichsproblems* $\Longleftrightarrow$

$$x = (R_1^{-1}, 0)Q^Tb$$

**Beweis.** Wegen

$$A^T A \quad = \quad (QR)^T QR = R^T Q^T QR = R^T R$$

gilt

$$\begin{aligned}
A^T Ax = A^T b \qquad & \Longleftrightarrow \qquad R^T Rx = R^T Q^T b \\
& \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{(R_1^T, 0)}_{n\times m} \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{m\times n} x = \underbrace{(R_1^T, 0)}_{n\times m} Q^T b \\
& \Longleftrightarrow \qquad R_1^T R_1 x = R_1^T (1_{n\times n}, 0) Q^T b \\
& \overset{R_1^T \text{eins zu eins}}{\Longleftrightarrow} \qquad R_1 x = (1_{n\times n}, 0) Q^T b \\
& \overset{R_1 \text{umkehrbar}}{\Longleftrightarrow} \qquad x = (R_1^{-1}, 0) Q^T b
\end{aligned}$$

■

# 9. Pseudoinverse

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Wählt man eine senkrechte Basis mit Länge 1 von $Bild(A) \subset \mathbb{C}^m$ bzw. von $Null(A) \subset \mathbb{C}^n$ und setzt sie zu einer senkrechten Basis mit Länge 1 des $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{C}^n$ fort, so erhält man zwei Abbildungen

$$P : \underbrace{(NullA)^\perp \oplus NullA}_{=\mathbb{C}^n} \to \underbrace{(NullA)^\perp}_{\subset\mathbb{C}^n}, x_1 + x_2 \mapsto x_1$$
$$Q : \underbrace{BildA \oplus (BildA)^\perp}_{=\mathbb{C}^m} \to \underbrace{BildA}_{\subset\mathbb{C}^m}, y_1 + y_2 \mapsto y_1$$

**Satz 9.1** *Es gilt*

$$\begin{aligned} &P = P^T = P^2 \\ &Q = Q^T = Q^2 \\ &Px = 0 \iff x \in NullA \\ &Qy = y \iff y \in BildA \\ &x = Px + (I - P)x \end{aligned}$$

**Beweis.** Bzgl. der gewählten Basis des $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$ gilt

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} P &= P^T = P^2 \\ Q &= Q^T = Q^2 \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} Px &= 0 \iff x = x_2 \in Null(A) \\ Qy &= y \iff y = y_1 \in Bild(A) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x &= Px + Ix - Px \\ &= Px + (I - P)x \end{aligned}$$

■

**Satz 9.2** *Sei $x = x_1 + x_2 \in (NullA)^{\perp} \oplus NullA$.*
*Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung*

$$f : \underbrace{BildA}_{\subset \mathbb{C}^m} \to \underbrace{(NullA)^{\perp}}_{\subset \mathbb{C}^n}, A(x_1 + x_2) \mapsto x_1$$

*mit*

$$\forall y \in Bild(A) : \; Af(y) = y$$

**Beweis.** Seien $y, z \in Bild(A)$ beliebig.

$$\begin{aligned} &u_1 + Null(A) \text{ sind die Lösungen von } A(u_1 + u_2) = y \\ &v_1 + Null(A) \text{ sind die Lösungen von } A(v_1 + v_2) = z \end{aligned}$$

wobei $u_1, v_1 \in (NullA)^{\perp}$ eindeutig sind. Wegen

$$\begin{aligned} &bu_1 + cv_1 \in (NullA)^{\perp} \\ &A(bu_1 + cv_1) = bAu_1 + cAv_1 = by + cz \end{aligned}$$

und der Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung gilt

$$bu_1 + cv_1 + Null(A) \text{ sind die Lösungen von } Aw = by + cz$$

Die Abbildung

$$f : \underbrace{BildA}_{\subset \mathbb{C}^m} \to \underbrace{(NullA)^{\perp}}_{\subset \mathbb{C}^n}, y = Au_1 \mapsto u_1$$

ist wegen der Eindeutigkeit definiert und wegen

$$\begin{aligned} f(bAu + cAv) &= f(A(bu + cv)) \\ &= bu_1 + cv_1 \\ &= bf(Au) + cf(Av) \end{aligned}$$

ist f linear.
Sei $y = A(u_1 + u_2)$ mit $u_1 + u_2 \in (NullA)^\perp \oplus NullA$. Wegen

$$Af(y) = Au_1 = y$$

gilt

$$\begin{aligned} A \circ f &: Bild(A) \to Bild(A), y \mapsto y \\ A \circ f|_{Bild(A)} &\equiv id|_{Bild(A)} \end{aligned}$$

■

**Definition 9.3** *Da $Bild(Q) \subset Bild(A)$ und da $Q$ linear ist, ist*

$$f \circ Q : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$$

*definiert und linear.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^m & \xrightarrow{f\circ Q} & (NullA)^\perp \subset \mathbb{C}^n \\ Q \searrow & & \nearrow f \\ & Bild(A) \subset \mathbb{C}^m & \end{array}$$

*Es läßt sich durch eine $n \times m$-Matrix $A^+$ darstellen, d.h.*

$$\forall y \in \mathbb{C}^m : \; A^+ y = f(Q(y))$$

*$A^+$ heißt **Pseudoinverse** von $A$.*

**Satz 9.4** *Seien $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die verallgemeinerte Lösung von Ax=b ist*

$$x = A^+ b \in \mathbb{R}^n$$

**Beweis.** Wegen $A^+ b \in (NullA)^\perp$ und

$$\begin{aligned} Ax &= AA^+b = A \circ f \circ \underbrace{Q(b)}_{\in BildA} \\ &= Q(b) = b_1 \end{aligned}$$

■

**Satz 9.5** *a) Es gilt*

$$\begin{aligned} A^+A &= P \\ AA^+ &= Q \end{aligned}$$

*b) Es gilt*

$$\begin{aligned} A^+A &= (A^+A)^T \\ AA^+ &= (AA^+)^T \\ AA^+A &= A \\ A^+AA^+ &= A^+ \end{aligned}$$

**Beweis.** a)

$$\begin{aligned} A^+Ax &= f(Q \underbrace{Ax}_{\in Bild(A)}) = f(Ax) = x_1 = Px \\ AA^+y &= A(f \underbrace{Qy}_{\in Bild(A)}) = Qy \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (A^+A)^T &= P^T = P = A^+A \\ (AA^+)^T &= Q^T = Q = AA^+ \\ AA^+Ax &= Q \underbrace{Ax}_{\in Bild(A)} = Ax \\ A^+AA^+y &= A^+Qy = fQ^2y \\ &= fQy = A^+y \end{aligned}$$

∎

**Satz 9.6** *Sei $Z$ eine $n \times m$ -Matrix mit*

$$\begin{aligned} ZB &= (ZB)^T \\ BZ &= (BZ)^T \\ BZB &= B \\ ZBZ &= Z \end{aligned}$$

*Dann gilt*

$$Z = B^+$$

**Beweis.**

$$\begin{array}{lcl}
Z & = & ZBZ \\
& \overset{B=BB^+B}{=} & ZBB^+BB^+BB^+BZ \\
& \overset{ZB=B^TZ^T}{=} & B^TZ^TB^T(B^+)^TB^+(B^+)^TB^TZ^TB^T \\
& \overset{BZB=B}{=} & B^T(B^+)^TB^+(B^+)^TB^T \\
& = & (B^+B)^TB^+(BB^+)^T \\
& \overset{B^+B=(B^+B)^T, BB^+=(BB^+)^T}{=} & B^+BB^+BB^+ \\
& = & B^+BB^+ \\
& = & B^+
\end{array}$$

■

**Satz 9.7** *Es gilt*

$$\begin{array}{rcl}
A^{++} & = & A \\
(A^+)^T & = & (A^T)^+
\end{array}$$

**Beweis.** a) Wegen

$$\begin{array}{rcl}
AA^+ & = & (AA^+)^T \\
A^+A & = & (A^+A)^T \\
A^+AA^+ & = & A^+ \\
AA^+A & = & A
\end{array}$$

sind mit $Z := A$ und $B := A^+$ die Eigenschaften des Satzes erfüllt, d.h.

$$A = (A^+)^+$$

b) Wegen

$$\begin{array}{rcl}
(A^+)^TA^T & = & (AA^+)^T = AA^+ = ((A^+)^TA^T)^T \\
A^T(A^+)^T & = & (A^+A)^T = A^+A = (A^T(A^+)^T)^T \\
A^T(A^+)^TA^T & = & (AA^+A)^T = A^T \\
(A^+)^TA^T(A^+)^T & = & (A^+AA^+)^T = (A^+)^T
\end{array}$$

gilt mit $Z := (A^+)^T$ und $B := A^T$

$$(A^+)^T = (A^T)^+$$

■

# 10. $A = USV^T$

Für $Rang(A) = n$ kann man mit der QR-Zerlegung das Ausgleichsproblem lösen. In diesem Kapitel behandeln wir den Fall Rang$(A) < n$.

**Satz 10.1** *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Rang(A) = r$ und $p = \min\{m, n\}$. Dann gibt es senkrechte Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit*

$$\begin{aligned}
U^T AV &= S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & s_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \\
s_1 &\geq \ldots \geq s_r > 0
\end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen

$$s_1 = \| A \|_2 = \max_{\|x\|=1} \| Ax \|_2 = \sqrt{c_{max}(A^T A)}$$

wird das Maximum in einem Eigenvektor $x_1$ von $A^T A$ mit $\| x_1 \|_2 = 1$ angenommen.

$$\begin{aligned}
y_1 &:= \frac{Ax_1}{\| Ax_1 \|_2} \\
Ax_1 &= s_1 y_1 \\
A^T y_1 &= A^T \frac{Ax_1}{\| Ax_1 \|_2} = \frac{s_1^2}{s_1} x_1 = s_1 x_1
\end{aligned}$$

Setze $x_1, y_1$ jeweils zu einer senkrechten Basis der Länge 1 $U_1 = (y_1, \ldots, y_m)$ von $\mathbb{R}^m$ und $V_1 := (x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathbb{R}^n$ fort. Mit

$$\begin{aligned}
U_1^T y_1 &= \begin{pmatrix} \langle y_1, y_1\rangle \\ \vdots \\ \langle y_m, y_1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
V_1^T x_1 &= \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
V_1^T A^T U_1 &= (V_1^T A^T y_1, \ldots, V_1^T A^T y_m) \\
&= (V_1^T s_1 x_1, V_1^T A^T y_2, \ldots, V_1^T A^T y_m) \\
&= \begin{pmatrix} s_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & * \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
U_1^T A V_1 &= (U_1^T A x_1, \dots, U_1^T A x_n) \\
&= (U_1^T s_1 y_1, U_1^T A x_2, \dots, U_1^T A x_n) \\
&= \begin{pmatrix} s_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & * \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
U_1^T A V_1 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}
$$

$k-1 \to k$: Sei

$$
U_{k-1}^T \cdots U_1^T A V_1 \dots V_{k-1}^T = A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & s_{k-1} & \\ 0 & & & B^{(k)} \end{pmatrix}
$$

$$
B^{(k)} : \mathbb{R}^{m-(k-1)} \to \mathbb{R}^{n-(k-1)}
$$

Analog zum ersten Schritt existieren $U^{(k)}, V^{(k)}$ mit

$$
U^{(k)} B^{(k)} V^{(k)} = \begin{pmatrix} s_k & 0 \\ 0 & B^{(k+1)} \end{pmatrix}
$$

Da $s_{k-1}$ der maximale Eigenwert von

$$
(B^{(k-1)})^T B^{(k-1)} = \begin{pmatrix} s_{k-1} & 0 \\ 0 & (B^{(k)})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{k-1} & 0 \\ 0 & B^{(k)} \end{pmatrix}
$$

ist und $s_k$ der maximale Eigenwert von $(B^{(k)})^T B^{(k)}$ ist, gilt

$$
s_{k-1} \geq s_k
$$

Setze

$$
\begin{aligned}
U_k &:= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & U^{(k)} \end{pmatrix} \\
V_k &:= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & V^{(k)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da $U_i, V_i$ umkehrbar sind und da $Rang A = r$ gilt nach r Schritten

$$U_r^T \dots U_1^T A V_1 \dots V_r = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

■

**Satz 10.2** *Sei*

$$S^+ := \begin{pmatrix} 1/s_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1/s_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

*Die Pseudoinverse von* $A = USV^T$ *ist*

$$A^+ := VS^+U^T$$

**Beweis.** a) Mit

$$\begin{aligned} A &= U \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} V^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ Z &= V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} AZ &= U \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} V^T V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T \\ &= U \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}}_{n \times n} U^T \\ &= (AZ)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ZA &= V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} V^T \\ &= V \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}}_{m \times m} V^T \\ &= (ZA)^T \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} ZA &= (ZA)^T \\ AZ &= (AZ)^T \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} AZA &= U \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} V^T V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} V^T \\ &= U \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} V^T = A \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} ZAZ &= V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} S_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} V^T V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T \\ &= V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T = Z \end{aligned}$$

Damit folgt

$$A^+ = Z = V \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T$$

■

**Satz 10.3** *a) Für $m = n$ und umkehrbares $A$ gilt*

$$A^+ = A^{-1}$$

*b) Für $m \geq n$ und Rang(A)=n gilt*

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

*c) Es gilt*

$$\begin{aligned} \| A \|_2 &= s_1 \\ \| A^+ \|_2 &= \frac{1}{s_r} \end{aligned}$$

**Beweis.** a) Da $A^+$ eindeutig ist, gilt

$$\begin{aligned} x &= A^{-1} b \\ A^+ &= A^{-1} \end{aligned}$$

b) Wegen $Rang A = n$ und $Null(A) = Null A^T A$ gilt $Rang A^T A = n$ und $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist umkehrbar. Damit gilt

$$\begin{aligned} & A^T A x = A^T b \\ \iff \quad & x = (A^T A)^{-1} A^T b \end{aligned}$$

und mit der Eindeutigkeit von $A^+$ gilt

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

c)

$$\begin{aligned}
\| A \|_2 &= \| USV^T \|_2 \\
&= \| S \|_2 \\
&= \sqrt{c_{max}(S^T S)} \\
&= s_1 \\
\| A^+ \|_2 &= \| VS^+U^T \|_2 \\
&= \| S^+ \|_2 \\
&= \sqrt{c_{max}(S^{+T} S^+)} \\
&= \frac{1}{s_r}
\end{aligned}$$

■

**Definition 10.4** *Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definieren wir*

$$Kond_2(A) = \| A \|_2 \| A^+ \|_2 = \frac{s_1}{s_r}$$

### Lösen des Ausgleichsproblems

**Satz 10.5** *Sei $U^T AV = S$ mit $V = (v_1, \ldots, v_n), U = (u_1, \ldots, u_m)$. Die verallgemeinerte Lösung von $Ax = b$ ist*

$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle u_i, b \rangle}{s_i} v_i$$

**Beweis.** Sei x Lösung von $Ax = b_1$. Wegen

$$\begin{aligned}
& \text{x ist verallgemeinerte Lösung} \\
\Longleftrightarrow \quad & x \in (NullA)^{\perp} = BildA^T = Bild(VS^T U^T) \\
\Longleftrightarrow \quad & x \in Lin(v_1, \ldots, v_r) \\
\Longleftrightarrow \quad & \exists (y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n : \ x = Vy
\end{aligned}$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& A^T A x = A^T b \\
\iff \quad & V S^T U^T U S V^T V y = V S^T U^T b \\
\iff \quad & S^T S y = S^T U^T b \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} s_1^2 y_1 \\ \vdots \\ s_r^2 y_r \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \langle u_1, b \rangle \\ \vdots \\ s_r \langle u_r, b \rangle \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
x = V y = V \begin{pmatrix} \dfrac{\langle u_1, b \rangle}{s_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle u_r, b \rangle}{s_r} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle u_i, b \rangle}{s_i} v_i
$$

■

# 11. Minimalität der verallgemeinerten Lösung

Es wird eine Linearkombination der Funktionen $u_1, \dots, u_n$ gesucht, die die Messdaten $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ am "besten" beschreibt. Das heißt gesucht sind $c_1, \dots, c_n$ mit $u = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$ und

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} c_j u(x_j) - y_j \right\| \text{ ist minimal}$$

In Matrixschreibweise sucht man ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(x_m) & \dots & u_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right\| \text{ ist minimal}$$

Wählt man die 2-Länge, so erhält man erneut die verallgemeinerte Lösung.

**Satz 11.1** *Sei $y = y_1 + y_2 \in V \oplus V^{\perp}$. Dann gilt*

$$\| y \|_2^2 = \| y_1 \|_2^2 + \| y_2 \|_2^2$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} \| y \|_2^2 &= \langle y_1 + y_2, y_1 + y_2 \rangle \\ &= \langle y_1, y_1 \rangle + \underbrace{\langle y_1, y_2 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y_2, y_1 \rangle}_{=0} + \langle y_2, y_2 \rangle \\ &= \| y_1 \|_2^2 + \| y_2 \|_2^2 \end{aligned}$$

■

**Satz 11.2** *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b = b_1 + b_2 \in BildA \oplus (BildA)^{\perp} = \mathbb{R}^m$. Es gilt*

$$Ax = b_1 \iff \| Ax - b \|_2 \text{ ist minimal}$$

**Beweis.** Da $Ax \in BildA$ gilt

$$\| Ax - b \|_2^2 = \| Ax - b_1 \|_2^2 + \| b_2 \|_2^2$$

Wegen $Bild(A) = (NullA^T)^{\perp}$ ist $A^T$ eins zu eins auf Bild A. Das ergibt

$$\begin{aligned} & \| Ax - b \|_2 \text{ ist minimal} \\ \overset{x \mapsto x^2 \text{streng monoton}}{\iff} \quad & \| Ax - b \|_2^2 \text{ ist minimal} \\ \iff \quad & \| Ax - b_1 \|_2^2 + \underbrace{\| b_2 \|_2^2}_{= \text{konstant}} \text{ ist minimal} \\ \overset{b_1 \in Bild(A)}{\iff} \quad & \| Ax - b_1 \|_2^2 = 0 \\ \iff \quad & Ax = b_1 \end{aligned}$$

■

**Satz 11.3** *Sei x Lösung von $Ax = b_1$. Dann gilt*

$$x \in (Null A)^{\perp} \iff \| x \|_2 \text{ ist minimal}$$

**Beweis.** Sei

$$x = x_1 + x_2 \in (Null A)^{\perp} \oplus Null A$$

eine Lösung von $Ax = b_1$.

$$\begin{aligned} \| x \|_2^2 = \underbrace{\| x_1 \|_2^2}_{= \text{konstant}} + \| x_2 \|_2^2 \text{ ist minimal} &\iff \| x_2 \|_2 = 0 \\ &\iff x_2 = 0 \\ &\iff x = x_1 \in (Null A)^{\perp} \end{aligned}$$

■

# 12. Ein Fixpunktsatz

**Definition 12.1** *$\overline{x}$ heißt **Fixpunkt** von $T : D \to D \iff$*

$$T\overline{x} = \overline{x}$$

**Satz 12.2** *Sei $D \subset U$ abgeschlossen und $T : D \to D$ Lipschitz-stetig mit $0 < L < 1$, d.h.*

$$\forall x, y \in D : \quad \| Tx - Ty \| \leq L \| x - y \|$$

*Sei $x_0 \in D$ ein beliebiger Startwert und für $n \in \mathbb{N}_0$*

$$x_{n+1} = Tx_n$$

*Dann gilt*
*a) $T$ hat genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in D$*
*b) Für $p \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\| x_n - x_{n+p} \| \leq \frac{L^n}{1-L} \| x_1 - x_0 \|$$

*c) Die Folge $(T^n x_0)_n$ geht für jeden Startwert $x_0$ gegen den Fixpunkt $\overline{x}$, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = \overline{x}$$

*d) Der Fehler nimmt monoton ab: Für $n \geq 1$ gilt*

$$\| \overline{x} - x_n \| \leq L \| \overline{x} - x_{n-1} \|$$

*e) Eine Abschätzung mit den Anfangswerten ist*

$$\| \overline{x} - x_n \| \leq \frac{L^n}{1-L} \| x_1 - x_0 \|$$

*f) Eine Abschätzung mit den letzten berechneten Werten ist*

$$\| \overline{x} - x_n \| \leq \frac{L}{1-L} \| x_n - x_{n-1} \|$$

Mit e) und f) erhält man ein Abbruchkriterium für die Verfahren.
**Beweis. a)** Seien $y, z$ Fixpunkte. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \| y - z \| & \overset{\text{Fixpunkte}}{=} & \| Ty - Tz \| \leq L \| y - z \| \\ 0 & \leq & \| y - z \| \underbrace{(L-1)}_{<0} \\ 0 & = & \| y - z \| \\ y & = & z \end{array}$$

**b)** Es gilt

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq L^n \| x_1 - x_0 \|$$

$n = 1$:

$$\| x_2 - x_1 \| = \| Tx_1 - Tx_0 \| \leq L \| x_1 - x_0 \|$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \| x_{n+2} - x_{n+1} \| &= \| Tx_{n+1} - Tx_n \| \\ &\leq L \| x_{n+1} - x_n \| \\ &\overset{\text{Fall n}}{\leq} L \cdot L^n \| x_1 - x_0 \| \\ &= L^{n+1} \| x_1 - x_0 \| \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \| x_{n+p} - x_n \| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{p} (x_{n+i} - x_{n+i-1}) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{p} L^{n+i} \| x_1 - x_0 \| \\ &\leq L^n \| x_1 - x_0 \| \sum_{i=0}^{\infty} L^i \\ &= \frac{L^n}{1-L} \| x_1 - x_0 \| \end{aligned}$$

**c)** Somit ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.
Da D abgeschlossen ist in einem vollständigen Raum, ist D vollständig und die Cauchyfolge hat einen Grenzwert y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y$$

Wegen der Stetigkeit von T ist $y$ ein Fixpunkt:

$$Ty = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y$$

**d)**

$$\| \overline{x} - x_n \| \overset{\text{Fixpunkt}}{=} \| T\overline{x} - Tx_{n-1} \| \leq L \| \overline{x} - x_{n-1} \|$$

**e)** Wegen der Stetigkeit der Länge und wegen $\overline{x} = \lim_{p\to\infty} x_{n+p}$ gilt

$$\begin{aligned} \| \overline{x} - x_n \| &= \lim_{p\to\infty} \| x_n - x_{n+p} \| \\ &\overset{b)}{\leq} \frac{L^n}{1-L} \| x_1 - x_0 \| \end{aligned}$$

**f)**

$$\begin{aligned}
\| x_{n+p} - x_n \| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{p} (x_{n+i} - x_{n+i-1}) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \| x_{n+i} - x_{n+i-1} \| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} L^i \| x_n - x_{n-1} \| \\
&\leq L \cdot \| x_n - x_{n-1} \| \sum_{i=0}^{\infty} L^i \\
&= \frac{L}{1-L} \| x_n - x_{n-1} \|
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
\| \overline{x} - x_n \| &= \lim_{p \to \infty} \| x_{n+p} - x_n \| \\
&\leq \frac{L}{1-L} \| x_n - x_{n-1} \|
\end{aligned}$$

■

# 13. Wiederholtes Einsetzen

Man möchte $Ax = b$ durch eine Fixpunktgleichung lösen.
Sei $A = L + D + R$ und $M = D$ oder $M = L + D$ umkehrbar.

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\iff \quad Mx = (M - A)x + b \\ &\iff \quad x = (1_n - M^{-1}A)x + M^{-1}b \end{aligned}$$

Man rechnet $M^{-1}$ nicht explizit aus, sondern benutzt

$$Mx_{k+1} = (M - A)x_k + b$$

**Satz 13.1** *Gilt*

$$\| 1_n - M^{-1}A \| < 1$$

*so hat das Verfahren einen eindeutigen Grenzwert.*

**Beweis.** Mit

$$F(x) := (1_n - M^{-1}A)x + M^{-1}b$$

gilt

$$\begin{aligned} \| F(y_1) - F(y_2) \| &= \| (1_n - M^{-1}A)(y_1 - y_2) \| \\ &= \| 1_n - M^{-1}A \| \| y_1 - y_2 \| \\ &< \| y_1 - y_2 \| \end{aligned}$$

und der Fixpunktsatz ist anwendbar. ■

**Definition 13.2** *Sei $B$ eine $n \times n$-Matrix. Der **Spektralradius von B** ist*

$$r(B) := \max\{|c| : c \in \mathbb{C} \textit{ ist Eigenwert von } B\}$$

**Satz 13.3** *Für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und **jede** durch eine Länge erzeugte Matrixlänge gilt*

$$r(B) \leq \| B \|$$

**Beweis.** Ist c Eigenwert zum Eigenvektor u, so gilt

$$\begin{aligned} |c| \| u \| &= \| cu \| \\ &= \| Bu \| \\ &\leq \| B \| \| u \| \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \text{Für alle Eigenwerte c gilt:} \quad |c| &\leq \| B \| \\ r(B) &\leq \| B \| \end{aligned}$$

■

**Satz 13.4** *Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine durch eine Länge erzeugte Matrixlänge $\| \cdot \|_{A,\varepsilon}$ auf $\mathbb{C}^n$ sodaß*

$$\| A \|_{A,\varepsilon} \leq r(A) + \varepsilon$$

**Beweis.** Sei $J = P^{-1}AP$ die Normalform von A

$$J = \begin{pmatrix} c_1 & m_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & m_{n-1} \\ 0 & & & c_n \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $c_k$ und mit $m_k \in \{0, 1\}$. Setze

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} D^{-1}JD &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\varepsilon} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & \varepsilon m_1 & & 0 \\ & \varepsilon c_2 & \varepsilon^2 m_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \varepsilon^{n-1} m_{n-1} \\ & & & \varepsilon^{n-1} c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & \varepsilon m_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon m_{n-1} \\ 0 & & & c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \| A \|_{(PD)^{-1}} &= \| D^{-1}P^{-1}APD \|_\infty \\ &= \| D^{-1}JD \|_\infty \\ &\leq |c_{max}| + \varepsilon \\ &= r(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Satz 13.5** *Ist $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ umkehrbar, so sind gleichwertig:*
*a)* $\lim_{n\to\infty} \parallel T^n \parallel = 0$
*b) Für alle $u \in \mathbb{C}^n$ gilt:* $\lim_{n\to\infty} \parallel T^n u \parallel = 0$
*c)* $r(T) < 1$
*d) Es gibt eine Länge auf $\mathbb{C}^n$, sodaß für die erzeugte Matrixlänge gilt*

$$\parallel T \parallel < 1$$

*Das Verfahren hat einen Grenzwert $\iff$ $r(T) < 1$.*

**Beweis. a) $\Rightarrow$ b):** Wegen $\lim_{n\to\infty} \parallel T^n \parallel = 0$ gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \parallel T^n u \parallel \leq \parallel u \parallel \lim_{n\to\infty} \parallel T^n \parallel = 0$$

**b) $\Rightarrow$ c):** Annahme $r(T) \geq 1$.
Dann existiert ein Eigenwert $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \geq 1$ zu einem Eigenvektor $0 \neq u \in \mathbb{C}^n$ mit $\parallel u \parallel = 1$. Wegen

$$\parallel T^n u \parallel = \parallel c^n u \parallel = |c^n| \parallel u \parallel \geq 1$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \parallel T^n u \parallel = \lim_{n\to\infty} \parallel u \parallel \geq 1 \neq 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.
**c) $\Rightarrow$ d):** Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - r(T))$ gibt es eine erzeugte Matrixlänge sodaß

$$\begin{aligned} \parallel T \parallel_{T,\varepsilon} &\leq r(T) + \varepsilon \\ &= r(T) + \frac{1 - r(T)}{2} \\ &= \frac{1 + r(T)}{2} < 1 \end{aligned}$$

**d) $\Rightarrow$ a):**

$$\lim_{n\to\infty} \parallel T^n \parallel \leq \lim_{n\to\infty} \parallel T \parallel^n = 0$$

■

## Das Verfahren mit der Diagonalmatrix M=D

Sei A=L+D+R und D umkehrbar.

$$\begin{aligned} Dx^{k+1} &= (D - A)x^k + b \\ x^{k+1} &= (I - D^{-1}A)x^k + D^{-1}b \end{aligned}$$

Für die einzelnen Zeilen gilt

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{l=1, l\neq i}^{n} a_{il} x_l^k \right)$$

**Satz 13.6** *Das Verfahren hat einen Grenzwert, wenn*
*a) das starke Zeilensummenkriterium erfüllt ist*

$$\max_i \left( \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} \right) < 1$$

*b) das starke Spaltensummenkriterium erfüllt ist*

$$\max_k \left( \sum_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{|a_{ki}|}{|a_{ii}|} \right) < 1$$

**Beweis.** a)

$$\begin{aligned} r(1 - D^{-1}A) &\leq \| 1 - D^{-1}A \|_\infty \\ &= \max_i \sum_{k=1}^{n} \left| \delta_{ik} - \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} \right| \\ &= \max_i \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} \\ &< 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} r(1 - D^{-1}A) &\leq \| 1 - D^{-1}A \|_1 \\ &= \max_k \sum_{i=1}^{n} \left| \delta_{ik} - \frac{|a_{ki}|}{|a_{ii}|} \right| \\ &= \max_k \sum_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{|a_{ki}|}{|a_{ii}|} \\ &< 1 \end{aligned}$$

■

**Definition 13.7** *a) Eine Matrix A heißt* ***zerlegbar*** $\iff$
*es gibt eine Zerlegung* $N_1 + N_2 = \{1, \ldots, n\}$ *mit*

$$\forall (i,k) \in N_1 \times N_2 : a_{ik} = 0$$

*b) Der zugehörige Graph G(A) mit den Knoten* $P_1 \ldots, P_n$ *und*

$$P_j P_k \text{ ist gerichtete Kante } \iff a_{jk} \neq 0$$

*heißt* ***zusammenhängend*** $\iff$
$\forall k, l \in \{1, \ldots, n\}\ \exists i_1 = k, \ldots, i_r = l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall 1 \leq j \leq r-1 : a_{i_j, i_{j+1}} \neq 0$$

**Satz 13.8** *Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind gleichwertig:*
*a) A ist zerlegbar.*
*b) Der Graph G(A) ist nicht zusammenhängend.*
*c) Es gibt eine Vertauschungsmatrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodaß gilt*

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

**Beweis. a) $\Rightarrow$ b):** Sei

$$\forall (k,l) \in N_1 \times N_2 : \; a_{kl} = 0$$

Annahme: $G(A)$ ist zusammenhängend, d.h. $\exists i_1 = k, \ldots, i_r = l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall 1 \leq j \leq r-1 : a_{i_j, i_{j+1}} \neq 0$$

Wähle das kleinste j mit $i_j \in N_1$ und $i_{j+1} \in N_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{i_j, i_{j+1}} &\neq 0 \text{ da der Graph zusammenhängend ist} \\ a_{i_j, i_{j+1}} &= 0 \text{ da } i_j \in N_1, i_{j+1} \in N_2 \end{aligned}$$

ein Widerspruch.
**b) $\Rightarrow$ a):** Sei G(A) nicht zusammenhängend.
Dann gibt es $j, k$ sodaß zwischen $P_j$ und $P_k$ kein Pfad existiert. Sei

$$\begin{aligned} N_1 &:= \{l : \text{ es gibt einen Pfad zwischen } P_j \text{ und } P_l\} \cup \{j\} \\ N_2 &:= N \backslash N_1 \end{aligned}$$

Dann gilt $k \in N_2$ und

$$\begin{aligned} N_1 &\neq \emptyset \text{ , da } j \in N_1 \\ N_2 &\neq \emptyset \text{ , da } k \in N_2 \\ N &= N_1 \cup N_2 \\ \emptyset &= N_1 \cap N_2 \end{aligned}$$

Sei $(i,l) \in N_1 \times N_2$.
Wäre $a_{il} \neq 0$, so gäbe es einen Pfad von $P_j$ über $P_i$ nach $P_l$ und somit $l \in N_1$, ein Widerspruch. Deshalb gilt

$$\forall (i,l) \in N_1 \times N_2 : \; a_{il} = 0$$

**a) $\Rightarrow$ c):** Sei

$$\begin{aligned} N_1 &:= \{P_{s_1}, \ldots, P_{s_k}\} \\ N_2 &:= \{P_{s_{k+1}}, \ldots, P_{s_n}\} \end{aligned}$$

Konstruiere die Matrix Q durch

$$\forall i = 1, \ldots, n: \; Q(e_i) = e_{s_i}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left(Q^T A Q\right)_{ij} &= e_i^T Q^T A Q e_j \\
&= e_{s_i}^T A e_{s_j} \\
&= a_{s_i s_j} \\
&= 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k \text{ und } k+1 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

gilt

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

**c) $\Rightarrow$ a):** Mit $Q(e_i) = e_{s_i}$ setze

$$\begin{aligned}
N_1 &:= \{P_{s_1}, \ldots, P_{s_k}\} \\
N_2 &:= \{P_{s_{k+1}}, \ldots, P_{s_n}\}
\end{aligned}$$

■

**Satz 13.9** *Ist die Matrix unzerlegbar und das schwache Zeilensummenkriterium erfüllt, d.h.*

$$\begin{aligned}
\max_i \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} &\leq 1 \\
\exists r \in \{1, \ldots, n\}: \sum_{k=1, k\neq r}^{n} \frac{|a_{rk}|}{|a_{rr}|} &< 1
\end{aligned}$$

*so hat das Verfahren einen Grenzwert.*

**Beweis.** Da A unzerlegbar ist, gilt:
Für alle Zerlegungen $N_1 + N_2 = \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\exists (i,k) \in N_1 \times N_2 : \; a_{ik} \neq 0$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq i} |a_{ik}| &> 0 \\
|a_{ii}| &\geq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| > 0
\end{aligned}$$

und wieder

$$\begin{aligned} r(1-D^{-1}A) &\leq \| 1-D^{-1}A \|_\infty \\ &= \max_i \sum_{k\neq i} \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Annahme: $1-D^{-1}A$ hat einen Eigenwert $c \in \mathbb{C}$ zum Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ mit $|c|=1$.
Sei $\| v \|_\infty = 1$, d.h.

$$\exists 1 \leq s \leq n : |v_s| = 1$$

Für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\begin{aligned} cv_i &\overset{\text{Eigenvektor}}{=} (1-D^{-1}A)v_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left( \delta_{ik} - \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right) v_k \\ &= \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} v_k \end{aligned}$$

Das ergibt

$$|v_i| = |cv_i| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{k\neq i} |a_{ik}||v_k|$$

Da G(A) zusammenhängend ist, existiert ein Pfad zwischen $P_s$ und $P_r$, sodaß

$$\begin{aligned} s = l_0, \ldots, l_L &= r \\ \forall 0 \leq i \leq L-1 : \ a_{l_i, l_{i+1}} &\neq 0 \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} |v_{l_L}| = |v_r| &\leq \frac{1}{|a_{rr}|} \sum_{k=1, k\neq r}^{n} |a_{rk}||v_k| \\ &\leq \frac{\| v \|_\infty}{|a_{rr}|} \sum_{k=1, k\neq r}^{n} |a_{rk}| \\ &\overset{Vor}{<} \| v \|_\infty \end{aligned}$$

und für $j = 1, \ldots, L$

$$\begin{aligned} |v_{l_{L-j}}| &\leq \frac{1}{|a_{l_{L-j}l_{L-j}}|} \sum_{k=1, l_L \neq k \neq l_{L-j}}^{n} |a_{l_{L-j}k}||v_k| + |a_{l_{L-j}l_L}| \underbrace{|v_{l_L}|}_{<\|v\|_\infty} \\ &< \frac{\| v \|_\infty}{|a_{l_{L-j}l_{L-j}}|} \sum_{k=1, l_L \neq k}^{n} |a_{l_{L-j}k}| \\ &\leq \| v \|_\infty \end{aligned}$$

Das ergibt den Widerspruch

$$\| v \|_\infty = |v_s| = |v_{l_0}| < \| v \|_\infty$$

Somit gilt

$$r\left(1 - D^{-1}A\right) < 1$$

■

## Das Verfahren mit der linken unteren Dreiecksmatrix M=L+D

Sei A= L+D+R und L+D umkehrbar.

$$\begin{aligned} (L+D)x^{k+1} &= \underbrace{(L+D-A)}_{=-R} x^k + b \\ x^{k+1} &= -(L+D)^{-1}Rx^k - (L+D)^{-1}b \end{aligned}$$

Die Berechnung geht mit

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= D^{-1}(b - Rx^k - Lx^{k+1}) \\ x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{l=1}^{i-1} a_{il}x_l^{k+1} - \sum_{l=i+1}^{n} a_{il}x_l^k \right) \end{aligned}$$

Im Verfahren mit $M = D$ wurden nur die alten Werte $x^k$ verwendet:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{l=1}^{i-1} a_{il}x_l^k - \sum_{l=i+1}^{n} a_{il}x_l^k \right)$$

**Satz 13.10** *Erfüllt $A$ das starke Zeilensummenkriterium*

$$\max_i \sum_{k=1, k \neq i}^{n} \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} < 1$$

*so hat das Verfahren einen Grenzwert.*

**Beweis.** Sei $\| x \|_\infty = 1$ und

$$q = \max_i \sum_{k \neq i} \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} < 1$$

$i = 1$:

$$\begin{aligned} |y_1| &= \left| -\frac{1}{a_{11}} \sum_{k=2}^{n} a_{1k} x_k \right| \\ &\leq \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}| \underbrace{|x_k|}_{\leq 1} \\ &\leq q \end{aligned}$$

$i - 1 \to i$:

$$\begin{aligned} |y_i| &= \left| -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} y_k \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left( \sum_{k=i+1}^{n} |a_{ik}| \underbrace{|x_k|}_{\leq 1} + \sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \underbrace{|y_k|}_{\leq q \leq 1} \right) \\ &\leq \frac{\sum_{k \neq i} |a_{ik}|}{|a_{ii}|} \leq q \end{aligned}$$

und somit

$$\| -(L+D)^{-1} R \|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \| -(L+D)^{-1} R x \|_\infty \leq q < 1$$

■

**Satz 13.11** *Ist A positiv definit, so hat das Verfahren einen Grenzwert. (Dieser Satz gilt nicht für das Verfahren mit M=D.)*

**Beweis.** Sei $A = L + D + R$ mit $L = R^T$.
Sei c Eigenwert von $-(L+D)^{-1}R$ zum Eigenvektor x mit $\| x \|_2 = 1$, d.h.

$$\begin{aligned} -(L+D)^{-1} R x &= cx \\ -Rx &= c(L+D)x = c(A-R)x \\ -Rx &= cAx - cRx \end{aligned}$$

Sei $y_1, \ldots, y_n$ eine senkrechte Basis mit Länge 1 aus Eigenvektoren von A und $x = \sum_{i=1}^{n} s_i y_i$.

Da A positiv definit ist, gilt

$$\begin{aligned}
a &:= \langle Ax, x\rangle \\
&= \left\langle A\sum_{i=1}^{n} s_i y_i, \sum_{j=1}^{n} s_j y_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} s_i s_j \langle Ay_i, y_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 c_i \\
&\geq c_{\min}(A) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}_{=1} = c_{\min}(A) \\
r &:= \langle Rx, x\rangle = r_1 + ir_2 \in \mathbb{C} \\
d &= \langle Dx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i \overline{x}_i \\
&\geq \min_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot \underbrace{\| x \|_2^2}_{=1} \\
&= \min_{i=1}^{n} a_{ii} \overset{\text{pos.def.}}{>} 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a &= \langle Ax, x\rangle = \left\langle R^T x, x\right\rangle + \langle Dx, x\rangle + \langle Rx, x\rangle \\
&= d + r_1 + ir_2 + r_1 - ir_2 \\
&= d + 2r_1 \\
(a - r_1)^2 &= (d + r_1)^2 = d^2 + 2dr_1 + r_1^2 \\
&= d(a - 2r_1) + 2dr_1 + r_1^2 \\
&= da + r_1^2 \\
&\geq \min_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot c_{min}(A) + r_1^2
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
-r &= -\langle Rx, x\rangle \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} c\langle Ax, x\rangle - c\langle Rx, x\rangle \\
&= c(a - r)
\end{aligned}$$

folgt

$$a - r \neq 0$$

Denn aus $a - r = 0$ folgt $r = 0$ und $a = r = 0$ ein Widerspruch zu $a > 0$. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{-r}{a-r} \\
|c|^2 &= \frac{r\overline{r}}{(a-r)\overline{(a-r)}} \\
&= \frac{r_1^2 + r_2^2}{(a-r_1)^2 + r_2^2} \\
&\leq \frac{r_1^2 + r_2^2}{c_{min}(A) \cdot \min_{i=1}^n a_{ii} + r_1^2 + r_2^2} \\
&< 1
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$r\left(-(L+D)^{-1}R\right) < 1$$

■

# 14. Nullstellen von nichtlinearen Gleichungen

Sei $f \in C[a,b]$ mit $f(a)f(b) < 0$. Dann hat f eine Nullstelle in (a,b).
Wir betrachten Verfahren, um eine Nullstelle von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zu finden.

## 1.) Das Intervallschachtelungsverfahren

Beginne im 0-ten Schritt mit

$$\begin{aligned} a_0 &:= a \\ b_0 &:= b \\ x_0 &:= \frac{a_0 + b_0}{2} \end{aligned}$$

Im n-ten Schritt:

$$x_n := \frac{a_n + b_n}{2}$$

Für $f(a_n)f(x_n) = 0$ setze $b_n = x_n$ und breche das Verfahren ab.
Für $f(a_n)f(x_n) < 0$ setze

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= a_n \\ b_{n+1} &:= x_n \end{aligned}$$

Für $f(a_n)f(x_n) > 0$ setze

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= x_n \\ b_{n+1} &:= b_n \end{aligned}$$

**Satz 14.1** *Für diese Folge gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \\ f(x^*) &= 0 \\ |x_n - x^*| &\leq 2^{-(n+1)}|b-a| \end{aligned}$$

**Beweis. a)** Da $(a_n)_n$ monoton wachsend und $(b_n)_n$ monoton fallend sind und

$$\begin{aligned} a_n &\leq b \\ b_n &\geq a \end{aligned}$$

haben beide Folgen einen Grenzwert A und B. Wegen

$$\begin{aligned} a_n &\leq x_n \leq b_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n &\leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \\ 0 &\leq b_n - a_n = 2^{-n}(b-a) \\ 0 &\leq \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}(b-a) = 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

**b)** Da f stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
f(\lim_{n\to\infty} a_n) &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \\
f(\lim_{n\to\infty} b_n) &= \lim_{n\to\infty} f(b_n) \\
0 \le f(x^*)^2 &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)f(b_n)}_{\le 0} \le 0 \\
f(x^*) &= 0
\end{aligned}$$

**c)** Wegen

$$a_n \le x_n, x^* \le b_n$$

folgt

$$\begin{aligned}
|x_n - x^*| &\le \frac{1}{2}|b_n - a_n| \\
&\le \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)
\end{aligned}$$

■

**Bemerkung 14.2** *a) Man benötigt etwa 3 Schritte für ein Dezimalstelle Genauigkeit*
*b) Das Verfahren ist robust.*
*c) Der Aufwand pro Schritt ist eine Auswertung von f*

**Beweis.** a)

$$2^3 = 8 \approx 10$$

■

## 2.) Das Tangentenverfahren

Ist f differenzierbar und ist $x_k$ schon nahe an einer Nullstelle $x^*$, so gilt nach der Definition der Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned}
0 &= f(x^*) \\
&= f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + O(|x^* - x_k|^2) \\
&\approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)
\end{aligned}$$

Deshalb definiert man als Verfahren

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

Man wählt also die Nullstelle der Tangente bei $x_k$ als nächste Näherung $x_{k+1}$.

**Satz 14.3** *Sei $f \in C^2(a,b)$ und $x^*$ eine Nullstelle von f. Gilt*

$$\begin{aligned} m := \min_{a \le x \le b} |f'(x)| &> 0 \\ \frac{r \cdot \parallel f''(x) \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} &< 1 \end{aligned}$$

*für ein $r > 0$ mit $B(x^*, r) \subset [a,b]$, so hat das Verfahren*

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

*für jeden Startwert $x_0 \in B(x^*, r)$ einen Grenzwert und es gilt*

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &\le \frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_{k-1} - x^*| \\ &\le \frac{2m}{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}} \left( \frac{\parallel f''(x) \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} r \right)^{2^k} \\ |x_k - x^*| &\le \frac{1}{m} |f(x_k)| \\ &\le \frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_k - x_{k-1}|^2 \end{aligned}$$

*Die Nullstelle in $B(x^*, r)$ ist deshalb eindeutig.*

**Beweis. a)** Mit der Definition der Differenzierbarkeit

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + R(y, x)$$

und

$$\begin{aligned} u &:= x + s(y - x) \\ du &= (y - x)ds \\ y - u &= y - x - s(y - x) = (1 - s)(y - x) \end{aligned}$$

gilt

$$
\begin{aligned}
R(y,x) &= \int_x^y f''(u)(y-u)du \\
&= (y-x)^2 \int_0^1 f''(x+s(y-x))(1-s)ds
\end{aligned}
$$

Das ergibt für $y, x \in B(x^*, r)$

$$
\begin{aligned}
|R(y,x)| &\leq |y-x|^2 \parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]} \int_0^1 (1-s)ds \\
&= \frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2} |y-x|^2
\end{aligned}
$$

**b) Die Folge $(x_k)_k$ bleibt in $B(x^*, r)$:** Sei $x \in B(x^*, r)$.

$$
\begin{aligned}
|x_{k+1} - x^*| &= \left| (x_k - x^*) - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right| \\
&= \frac{|f(x_k) - (x^* - x_k) f'(x_k)|}{|f'(x_k)|} \\
&\overset{f(x^*)=0}{\leq} \frac{|R(x^*, x_k)|}{m} \\
&\leq \underbrace{\frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_k - x^*|}_{<1} \underbrace{|x_k - x^*|}_{<r} < r
\end{aligned}
$$

**c)** Das ergibt

$$
\frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_k - x^*| \leq \left( \frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_{k-1} - x^*| \right)^2
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_k - x^*| &\leq \left( \frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_0 - x^*| \right)^{2^k} \\
|x_k - x^*| &\leq \frac{2m}{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}} \left( \frac{\parallel f'' \parallel_{\infty,[a,b]}\ r}{2m} \right)^{2^k}
\end{aligned}
$$

**d)** Mit

$$
\begin{aligned}
f(x_k) &= \underbrace{f(x_{k-1}) + (x_k - x_{k-1}) f'(x_{k-1})}_{=0,\ \text{nach Wahl von } x_k} + R(x_k, x_{k-1}) \\
&= R(x_k, x_{k-1}) \\
f'(s) &= \frac{f(x_k) - f(x^*)}{x_k - x^*}
\end{aligned}
$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
|x_k - x^*| &= \left|\frac{x_k - x^*}{f(x_k) - f(x^*)}\right| |f(x_k) - f(x^*)| \\
&\leq \frac{|f(x_k) - f(x^*)|}{m} \\
&= \frac{|f(x_k)|}{m} \\
&= \frac{|R(x_k, x_{k-1})|}{m} \\
&\overset{a)}{\leq} \frac{\| f'' \|_{\infty,[a,b]}}{2m} |x_k - x_{k-1}|^2
\end{aligned}
$$

■

## 3.) Das Sekantenverfahren

Der Nachteil des Tangentenverfahrens ist die Auswertung von $f'(x_k)$.
Man ersetzt sie durch einen Bruch

$$
f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}
$$

Das ergibt das folgende Verfahren

$$
x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}
$$

Man wählt also die Nullstelle der Sekante als nächsten Wert $x_{k+1}$.

**Satz 14.4** *Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $0 \leq a_0, a_1 < 1$ und $a_{i+1} \leq a_i a_{i-1}$. Aus*

$$
\begin{aligned}
q &:= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\
K &:= \max(a_0, \sqrt[5]{a_1}) < 1
\end{aligned}
$$

*folgt*

$$
a_i \leq K^{q^i}
$$

**Beweis.**

$$
\begin{aligned}
q^2 - q - 1 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2\left(1+\sqrt{5}\right) - 4\right) \\
&= 0 \\
q^2 &= q + 1
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
a_0 &\leq \max(a_0, \sqrt[q]{a_1}) = K = K^{q^0} \\
a_1 &\leq \max(a_0^q, a_1) = K^{q^1} \\
a_{i+1} &\leq a_i a_{i-1} \leq K^{q^i} K^{q^{i-1}} \\
&= K^{q^i + q^{i-1}} = K^{q^{i-1}(q+1)} \\
&= K^{q^{i-1}q^2} = K^{q^{i+1}}
\end{aligned}
$$

■

**Satz 14.5** *Sei $f \in C^2(a,b)$ und $x^*$ eine Nullstelle von f. Gilt*

$$
\begin{aligned}
m &:= \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)| > 0 \\
K &:= \sqrt[5]{\frac{r \cdot \parallel f''(x) \parallel_{\infty,[a,b]}}{2m}} < 1
\end{aligned}
$$

*für ein $r > 0$ mit $B(x^*, r) \subset [a,b]$, so hat das Verfahren für beliebige unterschiedliche Startwerte $x_0, x_1 \in B(x^*, r)$ einen Grenzwert*

$$
|x_k - x^*| \leq \frac{2m}{\parallel f''(x) \parallel_{\infty,[a,b]}} K^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}
$$

**Beweis.** Mit den dividierten Differenzen des nächsten Kapitels folgt

$$
\begin{aligned}
& x_{i+1} - x^* \\
\stackrel{Def}{=} \quad & x_i - x^* - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \\
= \quad & (x_i - x^*) \left( 1 - \frac{f(x_i) - \overbrace{f(x^*)}^{=0}}{x_i - x^*} \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \right) \\
\stackrel{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(s_1)}{=} \quad & \frac{x_i - x^*}{f'(s_1)} \left( \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f(x_i) - f(x^*)}{x_i - x^*} \right) \\
= \quad & \frac{x_i - x^*}{f'(s_1)} (f[x_{i-1}, x_i] - f[x_i, x^*]) \\
= \quad & \frac{(x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*)}{f'(s_1)} f[x_{i-1}, x_i, x^*] \\
= \quad & \frac{(x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*)}{2 f'(s_1)} f''(s_2)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& \frac{\| f''(x) \|_{\infty,[a,b]}}{2m}|x_{i+1} - x^*| \\
\leq \quad & \frac{\| f''(x) \|_{\infty,[a,b]}}{2m}|x_i - x^*| \frac{\| f''(x) \|_{\infty,[a,b]}}{2m}|x_{i-1} - x^*|
\end{aligned}
$$

Für $r < \frac{2m}{\| f''(x) \|_{\infty,[a,b]}}$ und $x_0, x_1 \in B(x^*, r)$ gilt

$$
\begin{aligned}
a_0 &:= \frac{\| f''(x) \|_{\infty,[a,b]}}{2m}|x_0 - x^*| < 1 \\
a_1 &:= \frac{\| f''(x) \|_{\infty,[a,b]}}{2m}|x_1 - x^*| < 1 \\
a_{i+1} &\leq a_i a_{i-1}
\end{aligned}
$$

und mit

$$
\begin{aligned}
q &:= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
K &:= \max(a_0, \sqrt[5]{a_1}) < 1
\end{aligned}
$$

folgt

$$
a_i \leq K^{q^i}
$$

■

# 15. Anpassung mit Polynomen

**Satz 15.1** *a) Die Polynome vom Grad* $n$

$$P_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

*sind ein Vektorraum.*
*b) Ein Polynom* $0 \neq p \in P_n$ *mit* $a_n \neq 0$ *hat genau* $n$ *Nullstellen und es gibt ein eindeutiges* $a_n \in \mathbb{R}$ *mit*

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

*c) Ein Polynom* $p_n \in P_n$ *mit* $n+1$ *Nullstellen ist das Nullpolynom.*
*d)* $\dim P_n = n + 1$

**Beweis.** a) Seien $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in P_n$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$c \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (ca_i + b_i) x^i \in P_n$$

b) Über $\mathbb{C}$ zerfällt das Polynom, d.h. es gibt $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

c) Seien $x_0, \ldots, x_n$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $p_n \in P_n$. Nach b) gilt

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

und somit

$$\begin{aligned} 0 &\overset{Vor}{=} p(x_0) = a_n \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)}_{\neq 0} \\ a_n &= 0 \\ p_n &\equiv 0 \end{aligned}$$

d) $1, x, \ldots, x^n$ sind ein Erzeugendensystem. Sei

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \equiv 0$$

Dann hat $\sum_{i=0}^n a_i x^i \geq n+1$ Nullstellen und ist das Nullpolynom.
Somit gilt

$$a_0 = \ldots = a_n = 0$$

und $1, x, \ldots, x^n$ sind linear unabhängig. ■

**Satz 15.2** *Zu gegebenen Daten $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ mit paarweise verschiedenen $x_i$ suchen wir ein Polynom p mit minimalem Grad n, sodaß*

$$p(x_i) = y_i \textit{ für } 0 \leq i \leq n$$

*Mit einer Basis $g_0, \ldots, g_n$ von $P_n$ ist das gleichwertig zur Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \ldots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_n) & \ldots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

**Beweis.** Für

$$p = \sum_{k=0}^n b_k g_k$$

gilt

$$\begin{aligned} Ab = y \quad & \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^n g_k(x_i) b_k = y_i \text{ für } 0 \leq i \leq n \\ & \Longleftrightarrow \quad \left( \sum_{k=0}^n b_k g_k \right)(x_i) = y_i \text{ für } 0 \leq i \leq n \\ & \Longleftrightarrow \quad p(x_i) = y_i \text{ für } 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

■

**Satz 15.3** *Sind die $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden, so ist $p_n \in P_n$ eindeutig.*

**Beweis. Die Matrix A ist eins zu eins:** Sei

$$\sum_{k=0}^n b_k g_k(x_i) = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq n$$

p hat damit die n+1 Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$ und somit gilt

$$\begin{aligned} p & \equiv 0 \\ a_i & = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Da $A \in M(n+1 \times n+1, \mathbb{C})$ eins zu eins ist, ist A umkehrbar.
Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit aus

$$b = A^{-1}y$$

■

**Satz 15.4** *Das Polynom ändert sich nicht bei Umnummerierung der Daten.*

**Beweis.** Bei Umnummerierung der Daten werden nur die Zeilen des linearen Gleichungssystems vertauscht.
Das ändert nichts an der Lösung ■

## 1.) A ist die Einheitsmatrix

$Ab = y$ ist am einfachsten zu lösen für $A = 1_n$. Dazu benötigen wir eine Basis von $P_n$ mit

$$\begin{aligned} g_k(x_k) &= 1 \\ g_k(x_j) &= 0 \text{ für } j \neq k \end{aligned}$$

**Satz 15.5** *Die Polynome*

$$L_k^n(x) := \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

*sind eine Basis von $P_n$ mit*

$$\begin{aligned} L_k^n(x_k) &= 1 \\ L_k^n(x_j) &= 0 \textit{ für } j \neq k \end{aligned}$$

**Beweis. Konstruktion der Polynome:** Mit dem Ansatz

$$L_k^n(x) = c \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)$$

erzwingt man

$$L_k^n(x_i) = 0 \text{ für } i \neq k$$

Mit

$$1 \stackrel{!}{=} L_k^n(x_k) = c \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)$$

ergibt sich

$$c = \frac{1}{\prod_{i=0, i\neq k}^{n}(x_k - x_i)}$$

**Nachrechnen der Eigenschaften:** Es gilt

$$L_k^n(x_k) \quad := \quad \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \underbrace{\frac{x_k - x_i}{x_k - x_i}}_{=1} = 1$$

$$L_k^n(x_j) \quad := \quad \frac{\overbrace{x_j - x_j}^{=0}}{x_j - x_i} \prod_{i=0, j\neq i\neq k}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} = 0 \text{ für } j \neq k$$

$L_0, \ldots, L_n$ **sind linear unabhängig:** Für $j = 0, \ldots, n$ gilt

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k^n(x_j) = a_j$$

d.h.

$$a_j = 0 \text{ für } 0 \leq j \leq n$$

Die $n+1$ linear unabhängigen Polynome $L_0^n, \ldots, L_n^n$ bilden eine Basis von $P_n$. ■

**Satz 15.6** *Das Polynom zu* $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ *ist*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

**Beweis.** Wegen

$$\sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \in P_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} = y_j \text{ für } 0 \leq j \leq n$$

ist es das eindeutige Polynom zu $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. ■

**Bemerkung 15.7** *Das Polynom läßt sich mit dieser Basis einfach angeben.*
*Der Nachteil ist, dass sich die Basispolynome ändern, wenn weitere* $x_k$ *hinzugenommen werden.*

## 2.) A ist eine linke untere Dreiecksmatrix

A ist eine linke untere Dreiecksmatrix $\iff$

$$g_k(x_i) = 0 \text{ für } i < k$$

**Satz 15.8** *Mit der Basis von $P_n$*

$$\begin{aligned} N_0^n(x) &= 1 \\ N_k^n(x) &:= \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) \textit{ für } 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

*gilt*

$$N_k^n(x_i) = 0 \textit{ für } k > i$$

**Beweis.** $N_0^n, \ldots, N_n^n$ **sind linear unabhängig:** Sei

$$\sum_{k=0}^{n} a_k N_k^n \equiv 0$$

Setze der Reihe nach die Stützstellen ein.
$i = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{Vor}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k N_k^n(x_0) = a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1}(x_0 - x_j)}_{=0} \\ &= a_0 \end{aligned}$$

$i - 1 \to i$ : Aus

$$\begin{aligned} 0 &\overset{Vor}{=} \sum_{k=0}^{i-1} \underbrace{a_k}_{=0} N_k(x_i) + a_i N_i(x_i) + \sum_{k=i+1}^{n} a_k \underbrace{N_k(x_i)}_{=0} \\ &= a_i \prod_{j=0}^{i-1} \underbrace{(x_i - x_j)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

folgt

$$a_i = 0$$

Damit sind die n+1 Polynome eine Basis von $P_n$. ■

Für

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k^n(x)$$

suchen wir ein Schema zur Berechnung der $a_k$.

**Satz 15.9** *Sei $p_{i,\dots,k}$ das eindeutige Polynom zu $(x_i, y_i), \dots, (x_k, y_k)$. Mit*

$$p_{ii}(x) \equiv y_i$$

*gilt*

$$p_{i,\dots,k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,\dots,k}(x) + (x_k - x)p_{i,\dots,k-1}(x)}{x_k - x_i}$$

**Beweis. Zeige:** Die rechte Seite ist $\in P_{k-i}$ und für $i \leq j \leq k$ nimmt sie in $x_j$ den Wert $y_j$ an.
$k - i = 1$: D.h. $k = i + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{(x - x_i)p_{i+1,i+1}(x) + (x_k - x)p_{ii}(x)}{x_k - x_i} &= \frac{y_{i+1}(x - x_i) + y_i(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} \in P_1 \\
\frac{y_{i+1}\overbrace{(x_i - x_i)}^{=0} + y_i(x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_i} &= y_i \\
\frac{y_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + y_i\overbrace{(x_{i+1} - x_{i+1})}^{=0}}{x_{i+1} - x_i} &= y_{i+1}
\end{aligned}$$

$k - i - 1 \to k - i$: Da

$$\begin{aligned}
p_{i+1,\dots,k}(x) &\in P_{k-i-1} \\
p_{i,\dots,k-1}(x) &\in P_{k-i-1}
\end{aligned}$$

gilt

$$\frac{(x - x_i)p_{i+1,\dots,k}(x) + (x_k - x)p_{i,\dots,k-1}(x)}{x_k - x_i} \in P_{k-i}$$

Für $i < j < k$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\overbrace{(x_i - x_i)}^{=0}p_{i+1,\dots,k}(x_i) + (x_k - x_i)\overbrace{p_{i,\dots,k-1}(x_i)}^{=y_i}}{x_k - x_i} &= \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i}y_i = y_i \\
\frac{(x_j - x_i)\overbrace{p_{i+1,\dots,k}(x_j)}^{=y_j} + (x_k - x_j)\overbrace{p_{i,\dots,k-1}(x_j)}^{=y_j}}{x_k - x_i} &= \frac{x_j - x_i + x_k - x_j}{x_k - x_i}y_j \\
&= y_j \\
\frac{(x_k - x_i)\overbrace{p_{i+1,\dots,k}(x_k)}^{=y_k} + \overbrace{(x_k - x_k)}^{=0}p_{i,\dots,k-1}(x_k)}{x_k - x_i} &= \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i}y_k = y_k
\end{aligned}$$

Damit ist die rechte Seite das eindeutige Polynom zu $(x_i, y_i), \dots, (x_k, y_k)$ und somit gleich $p_{i,\dots,k}$ ■

**Definition 15.10** *Der eindeutige höchste Koeffizient des Polynoms zu den Daten*

$$(x_i, f(x_i)), \dots, (x_{i+k}, f(x_{i+k}))$$

*heißt **k-te dividierte Differenz**.*

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] := a_k$$

**Satz 15.11** *Sei $p_{i,\dots,i+k}$ das Polynom zu $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+k}, y_{i+k})$.*
*a) $f[x_i, \dots, x_{i+k}]$ verändert sich nicht bei Vertauschen der Daten.*
*b) Es gilt*

$$p_{i,\dots,i+k+1}(x) = p_{i,\dots,i+k}(x) + f[x_i, \dots, x_{i+k+1}](x - x_i) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i+k})$$

*c) Es gilt*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= \sum_{j=0}^{n} f[x_0, \dots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \end{aligned}$$

**Beweis.** a) Da sich das Polynom bei Vertauschung der Daten nicht ändert, ändert sich auch nicht der eindeutige höchste Koeffizient $a_k$.
b) Wegen

$$\begin{aligned} &p_{i,\dots,i+k+1} - p_{i,\dots,i+k} \in P_{k+1} \\ &p_{i,\dots,i+k+1}(x_j) - p_{i,\dots,i+k}(x_j) = y_j - y_j = 0 \text{ für } i \leq j \leq i + k \end{aligned}$$

hat $p_{i,\dots,i+k+1} - p_{i,\dots,i+k}$ die Nullstellen $x_i, \dots, x_{i+k}$ und es gilt

$$\begin{aligned} p_{i,\dots,i+k+1}(x) - p_{i,\dots,i+k}(x) &= a_{k+1}(x - x_i) \ldots (x - x_{i+k}) \\ p_{i,\dots,i+k+1}(x) &= p_{i,\dots,i+k}(x) + a_{k+1}(x - x_i) \ldots (x - x_{i+k}) \end{aligned}$$

Das ergibt den höchsten Koeffizienten

$$f[x_i, \dots, x_{i+k+1}] = a_{k+1}$$

c) Mit

$$\begin{aligned} p_{0,\dots,n} &= p_0 + (p_{0,1} - p_0) + \ldots + (p_{0,\dots,n} - p_{0,\dots,n-1}) \\ p_{0,\dots,k} - p_{0,\dots,k-1} &\overset{b)}{=} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}) \text{ für } 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

gilt

$$p_{0,\dots,n}(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \ldots + f[x_0,\dots,x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$$

■

**Satz 15.12** *a) Sei $f \in P_k$ und $f_j := f(x_j)$ für $i \le j \le i+k$ mit paarweise verschiedenen $x_i,\dots,x_{i+k}$. Dann gilt*

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] = konstant$$

*d.h. es hängt nicht von den $x_i,\dots,x_{i+k}$ ab.*
*b) Ist $f \in P_{k-1}$, so gilt*

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] \equiv 0$$

**Beweis.** a) Das Polynom $p_{i,\dots,i+k}$ zu $(x_i, f(x_i)),\dots,(x_{i+k}, f(x_{i+k}))$ stimmt nach dem Eindeutigkeitssatz mit $f \in P_k$ überein.
Der höchste Koeffizient von $p_{i,\dots,i+k}$ ist damit der höchste Koeffizient von f

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] = a_k$$

b) Da $f \in P_{k-1}$, gilt

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] = a_k = 0$$

■

**Satz 15.13** *Die dividierten Differenzen lassen sich mit folgendem Schema berechnen*

$$\begin{aligned} f[x_j] &= f(x_j) \text{ für } i \le j \le i+k \\ f[x_i,\dots,x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}] - f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i} \end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned} f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}] &= \text{höchster Koeffizient von } p_{i+1,\dots,i+k} \\ f[x_i,\dots,x_{i+k-1}] &= \text{höchster Koeffizient von } p_{i,\dots,i+k-1} \end{aligned}$$

ergibt sich der höchste Koeffizient von

$$\frac{(x-x_i)p_{i+1,\dots,i+k}(x) - (x-x_{i+k})p_{i,\dots,i+k-1}(x)}{x_{i+k}-x_i}$$

zu

$$\frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}] - f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

Wegen

$$p_{i,\dots i+k}(x) = \frac{(x-x_i)p_{i+1,\dots,i+k}(x) - (x-x_{i+k})p_{i,\dots,i+k-1}(x)}{x_{i+k}-x_i}$$

folgt

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}] - f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

■

**Satz 15.14** *Sei $p_n \in P_n$ das Polynom mit*

$$p_n(x_j) = f(x_j) \text{ für } 0 \leq j \leq n$$

*und $x_j$ paarweise verschieden. Dann gilt*

$$f(x) - p(x) = f[x_0,\dots,x_n,x]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

**Beweis.** Für $x = x_j$ für ein $0 \leq j \leq n$ sind beide Seiten Null.
Sei $x_{n+1} \neq x_j$ für $0 \leq j \leq n$.
Das Polynom $p_{n+1}$ zu $(x_0, f(x_0)),\dots,(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ ist

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0,\dots,x_n,x_{n+1}]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\overset{Vor}{=} p_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= p_n(x_{n+1}) + f[x_0,\dots,x_n,x_{n+1}]\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1}-x_j) \end{aligned}$$

und

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = f[x_0,\dots,x_n,x_{n+1}]\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1}-x_j)$$

■

**Satz 15.15** *Seien $x_0,\dots,x_{n+1}$ paarweise verschieden,*

$$I = \left[\min_{0\leq j\leq n} x_j, \max_{0\leq j\leq n} x_j\right]$$

*und $f \in C^{n+1}(I)$. Dann existiert ein $s \in I$ mit*

$$f[x_0,\dots,x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}$$

**Beweis.** Sei $p_{n+1} \in P_{n+1}$ das Polynom zu $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_{n+1}, f(x_{n+1}))$. Dann hat

$$\begin{aligned} r(x) &:= f(x) - p_{n+1}(x) \\ &= f(x) - \sum_{j=0}^{n+1} f[x_0, \ldots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \end{aligned}$$

n+2 Nullstellen $x_0, \ldots, x_{n+1}$.
Somit hat $r^{(n+1)}$ eine Nullstelle $s \in I$. Wegen

$$\begin{aligned} r^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) - (n+1)! f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \\ r^{(n+1)}(s) &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}$$

■

**Satz 15.16** *Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden in [a,b] und $f \in C^{n+1}[a,b]$ und $p \in P_n$ zu $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Dann gilt*
*a)* $\forall x \in [a,b]\ \exists s \in [a,b]$ :

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

*b)*

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{s \in [a,b]} |f^{(n+1)}(s)|$$

**Beweis.** $x = x_j$: für $0 \leq j \leq n$ sind beide Seiten Null
$x \neq x_j$:

$$\begin{aligned} f(x) - p(x) &= f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &\leq \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \max_{s \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(s)|}{(n+1)!} \\ &\leq (b-a)^{n+1} \max_{s \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(s)|}{(n+1)!} \end{aligned}$$

■

**Das Schema zum Berechnen von p(x)**

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & \dots & f[x_0,\dots,x_n] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1,x_2] & \dots & \\
\vdots & & & & \\
\vdots & & f[x_{n-1},x_n] & & \\
x_n & f[x_n] & & &
\end{array}$$

Das sind

$$n + (n-1) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Divisionen und n(n+1) Subtraktionen

**Beispiel 15.17** *a) Das Polynom zu (3,1),(1,-3), (5,2) ist*

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1)$$

*b) Das Polynom zu (3,1),(1,-3), (5,2), (6,4) ist*

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

**Beweis.** a) Mit dem Schema erhält man

$$\begin{array}{llll}
3 & 1 & \frac{-3-1}{1-3} = 2 & \frac{\frac{5}{4}-2}{5-3} = -\frac{3}{8} \\
1 & -3 & \frac{2-(-3)}{5-1} = \frac{5}{4} & \\
5 & 2 & &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lllll}
3 & 1 & \frac{-3-1}{1-3} = 2 & \frac{\frac{5}{4}-2}{5-3} = -\frac{3}{8} & \frac{3/20-(-3)/8}{6-3} = \frac{6+15}{3\cdot 40} = \frac{7}{40} \\
1 & -3 & \frac{2-(-3)}{5-1} = \frac{5}{4} & \frac{3}{20} & \\
5 & 2 & 2 & & \\
6 & 4 & & &
\end{array}$$

■

# 16. Anpassung mit Polynomen

Setzt man nicht die Funktionswerte sondern auch die Werte der Ableitungen an Stützstellen voraus, erhält man erneut ein eindeutiges Polynom.

Seien die Daten

$$\begin{gathered}(x_0, f_0^{(0)}, \ldots, f_0^{(m_1-1)}) \\ \vdots \\ (x_k, f_k^{(0)}, \ldots, f_k^{(m_k-1)})\end{gathered}$$

gegeben. Gesucht ist ein $p \in P_n$ mit

$$p^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)} \text{ für } 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq m_i$$

Man schreibt die Stützstellen in der Häufigkeit auf, in der die Ableitungen des Polynoms an der Stützstelle verwendet werden

$$x_0 = \ldots = x_0 < \ldots < x_m = \ldots = x_m$$

**Satz 16.1** *Die Nullstellen von $p_n \in P_n$ seien $x_0 < \ldots < x_k$ mit Vielfachheit $m_i$ und es gelte $\sum_{i=0}^{k} m_i \geq n+1$. Dann ist $p_n$ das Nullpolynom.*

**Beweis.** Das Polynom zerfällt über $\mathbb{C}$ und hat $\sum_{i=0}^{k} m_i \geq n+1$ Nullstellen. Damit gilt

$$p \equiv 0$$

■

**Satz 16.2** *Zu $x_0 < \ldots < x_k$ mit Vielfachheit $0 \leq j \leq m_i - 1$ für $0 \leq i \leq k$ und $\sum_{i=0}^{k} m_i = n+1$ gibt es ein eindeutiges $p \in P_n$ mit*

$$p^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \textit{ für } 0 \leq i \leq k \textit{ und } 0 \leq j \leq m_i - 1$$

**Beweis.** Wählt man eine Basis $g_0, \ldots, g_n$ von $P_n$, d.h. $p = \sum_{l=0}^{n} b_l g_l$ so ist das Problem gleichwertig zu dem folgenden linearen Gleichungssystem.

$$
\begin{aligned}
& p^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \text{ für } 0 \le i \le k, 0 \le j \le m_i - 1 \\
\iff \quad & \left( \sum_{l=0}^{n} b_l g_l \right)^{(j)} (x_i) = y_i^{(j)} \text{ für } 0 \le i \le k, 0 \le j \le m_i - 1 \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} g_0(x_0) & \dots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0^{m_0-1}(x_0) & \dots & g_n^{m_0-1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_k) & \dots & g_n(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0^{m_k-1}(x_k) & \dots & g_n^{m_k-1}(x_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(m_0-1)} \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_k^{(m_k-1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

**Eindeutigkeit:** Seien $P_1, P_2$ solche Polynome. Für

$$Q(x) := P_1(x) - P_2(x)$$

gilt

$$Q^{(j)}(x_i) = 0 \text{ für } 0 \le j \le m_i - 1$$

Somit ist jedes $x_i$ $m_i$-fache Nullstelle und Q hat n+1 nach Vielfachheit gezählte Nullstellen.
Damit ist Q das Nullpolynom, d.h.

$$
\begin{aligned}
Q &\equiv 0 \\
P_1 &\equiv P_2
\end{aligned}
$$

**Existenz:** Das lineare Gleichungssystem Ab=y hat n+1 Gleichungen und n+1 Koeffizienten.
Wegen der Eindeutigkeit ist A eins zu eins.
Somit ist A umkehrbar und es folgt die Existenz der Lösung wegen

$$b = A^{-1} y$$

■
Wegen

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} f[x_j, x_j + \varepsilon] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_j + \varepsilon) - f(x_j)}{\varepsilon} \\
&= f'(x_j)
\end{aligned}
$$

ist die Definition

$$f[x_j, x_j] := f'(x_j)$$

sinnvoll. Das gilt allgemeiner.

**Satz 16.3** *Sei $f \in C^n(\mathbb{R})$ und $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & f[x_0, \ldots, x_n] \\ = \; & \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})t_n) dt_n \ldots dt_1 \end{aligned}$$

**Beweis.** $n = 0:$

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$n - 1 \to n$: Wegen

$$(x_{n-1} - x_{n-2})t_{n-1} + (x_n - x_{n-1})t_{n-1} = (x_n - x_{n-2})t_{n-1}$$

gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})t_n) dt_n \\ = \; & \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \ldots + (x_{n-2} - x_{n-3})t_{n-2} + (x_n - x_{n-2})t_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \\ & - \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \ldots + (x_{n-2} - x_{n-3})t_{n-2} + (x_{n-1} - x_{n-2})t_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \end{aligned}$$

und

$$\int_0^1 \ldots \int_0^{t_{n-2}} \Bigg( \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \ldots + (x_{n-2} - x_{n-3})t_{n-2} + (x_n - x_{n-2})t_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$- \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \ldots + (x_{n-2} - x_{n-3})t_{n-2} + (x_{n-1} - x_{n-2})t_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \Bigg) dt_{n-1} \ldots dt_1$$

$$\begin{aligned} \overset{\text{Fall } n-1}{=} \; & \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} \\ = \; & f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

■

**Satz 16.4** *Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{x_n \to x} \int_a^b f(x_n, t) dt = \int_a^b \lim_{x_n \to x} f(x_n, t) dt$$

**Beweis.** f ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]\times[a, b]$ und somit gilt für $|x_n-x| < \delta$

$$|f(x_n, t) - f(x, t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Für

$$\lim_{x_n \to x} f(x_n, t) = f(x, t)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b (f(x_n, t) - f(x, t))dt \right| \\ \leq & \int_a^b |f(x_n, t) - f(x, t)|dt \\ \leq & (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Satz 16.5** *Sei $f \in C^n(\mathbb{R})$*
*a) $f[x_0, \ldots, x_n]$ ist stetig bzgl. $x_j$ für $0 \leq j \leq n$.*
*b) Für gleiche Knoten gilt*

$$f[\underbrace{x_j, \ldots, x_j}_{k+1-mal}] = \frac{f^{(k)}(x_j)}{k!}$$

*mit $k \in \mathbb{N}_0$.*

**Bemerkung 16.6** *Damit ist $f[x_0, \ldots, x_n]$ für alle Wahlen von Stützstellen definiert, ggf. als Grenzwert*

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} \lim_{x_j \to x} f^{(n)}(x_0+(x_1-x_0)t_1+\ldots+(x_n-x_{n-1})t_n)dt_n \ldots dt_1$$

**Beweis. a)** Da

$$f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})t_n)$$

auf [a,b] stetig ist in $x_0, \ldots, x_n$, gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{x_j \to x} f[x_0, \ldots, x_n] \\ = & \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} \lim_{x_j \to x} f^{(n)}(x_0 + \ldots + (x_n - x_{n-1})t_n)dt_n \ldots dt_1 \end{aligned}$$

**b)** Behauptung

$$\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dots dt_2 = \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!}$$

$n = 1$:

$$\int_0^{t_1} dt_2 = 1 = \frac{t_1^0}{0!}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dots dt_2 \quad &\overset{Vor}{=} \quad \int_0^{t_1} \frac{t_2^{n-2}}{(n-2)!} dt_2 \\ &= \quad \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Das ergibt für $x_0 = \dots = x_n$

$$\begin{aligned} & f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{=n+1-mal}] \\ = \quad & \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(x_0 + (x_0 - x_0)t_1 + \dots + (x_0 - x_0)t_n) dt_n \dots dt_1 \\ = \quad & f^{(n)}(x_0) \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dots dt_1 \\ = \quad & f^{(n)}(x_0) \int_0^1 \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!} dt_1 \\ = \quad & f^{(n)}(x_0) \left. \frac{t_1^n}{n!} \right|_0^1 \\ = \quad & \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \end{aligned}$$

■

**Satz 16.7** *Die Lösung in $P_n$ ist*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \left( f[x_0, \dots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \right)$$

**Beweis.** Für verschiedene Stützstellen gilt

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, \dots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

Da $f[x_0, \dots, x_k]$ und $\prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k)$ stetig in $x_0, \dots, x_k$ sind, gilt die Formel im Grenzwert auch für mehrfache Nullstellen. ■

**Satz 16.8** *Sei*

$$I := \left[\min_{i=0}^{n} x_i, \max_{i=0}^{n} x_i\right]$$

*Dann gilt:* $\forall x \in I\ \exists s \in I$ :

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

**Beweis.** Wegen der Stetigkeit der dividierten Differenzen gilt es auch für mehrfache Stützstellen. ∎

**Satz 16.9** *Für* $p \in P_n$ *gilt*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-d)^k \frac{p^{(k)}(d)}{k!}$$

**Beweis.** Die Stützstelle $x_0 = d$ hat die Vielfachheit $m_0 = n+1$. Wegen

$$\sum_{k=j-1}^{n} (d-d)^{k-j} \frac{k!}{(k-j)!} \frac{p^{(k)}(d)}{k!} = p^{(j)}(d)$$

sind die Polynome gleich. ∎

**Beispiel 16.10** *Berechne das* $p \in P_2$ *mit*

$$\begin{aligned} p(x_0) &= c_{00} \\ p'(x_0) &= c_{0,1} \\ p(x_1) &= c_{1,0} \end{aligned}$$

*Das Schema*

$$\begin{array}{llll} x_0 & c_{0,0} & f[x_0,x_0] = c_{0,1} & f[x_0,x_0,x_1] = \dfrac{f[x_0,x_1] - f[x_0,x_0]}{x_1 - x_0} \\ x_0 & c_{0,1} & f[x_0,x_1] = \dfrac{c_{1,0} - c_{0,0}}{x_1 - x_0} & \\ x_1 & c_{1,0} & & \end{array}$$

*ergibt*

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 \\ &= c_{0,0} + c_{0,1}(x-x_0) + \left(\frac{c_{1,0} - c_{0,0}}{(x_1-x_0)^2} - \frac{c_{0,1}}{x_1 - x_0}\right)(x-x_0)^2 \end{aligned}$$

# 17. Schnelle Fourier Transformation

Sei

$$q = \exp \frac{2\pi i}{n}$$

Zu den Daten

$$(q^j, y_j) \text{ mit } j = 0, \ldots, n-1$$

gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k x^k \in P_{n-1}$$

mit

$$y_j = p(q^j) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k q^{jk} \text{ für } 0 \leq j \leq n-1$$

Das Problem läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{y}_0(q^0)^0 + \hat{y}_1(q^0)^1 + \ldots + \hat{y}_{n-1}(q^0)^{n-1} \\ \hat{y}_0(q^1)^0 + \hat{y}_1(q^1)^1 + \ldots + \hat{y}_{n-1}(q^1)^{n-1} \\ \vdots \\ \hat{y}_0(q^{n-1})^0 + \hat{y}_1(q^{n-1})^1 + \ldots + \hat{y}_{n-1}(q^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q^{0\cdot 0} & q^{0\cdot 1} & \ldots & q^{0\cdot(n-1)} \\ q^{1\cdot 0} & q^{1\cdot 1} & \ldots & q^{1\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots & \\ q^{(n-1)\cdot 0} & q^{(n-1)\cdot 1} & \ldots & q^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{y}_{n-1} \end{pmatrix} \\
y &= W\hat{y}
\end{aligned}$$

mit

$$w_{jk} = q^{jk} \text{ für } 0 \leq j, k \leq n-1$$

**Satz 17.1** *Es gilt*

$$\begin{aligned}
W &= W^T \\
W\overline{W}^T &= nI_n \\
\hat{y} &= \frac{1}{n}\overline{W}^y \\
\hat{y}_k &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \overline{q}^{jk} y_j
\end{aligned}$$

**Beweis.**

$$w_{jk} = q^{jk} = w_{kj}$$

Wegen

$$\overline{q^{lj}} = \overline{\exp \frac{2\pi i \cdot lj}{n}} = \exp \frac{-2\pi i \cdot lj}{n} = \overline{q}^{lj} = q^{-lj}$$

gilt für $0 \leq k, l \leq n$

$$\begin{aligned}
\left(W\overline{W}^T\right)_{kl} &= \sum_{j=0}^{n-1} q^{kj} q^{-lj} = \sum_{j=0}^{n-1} q^{(k-l)j} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1 - q^{(k-l)(n-1+1)}}{1 - q^{k-l}} & \text{für } q^{k-l} \neq 1 \\ n & \text{für } q^{k-l} = 1 \end{cases} \\
&\overset{q^n=1}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ n & \text{für } k = l \end{cases}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
W\overline{W} &= n1_n \\
W^{-1} &= \frac{1}{n}\overline{W} \\
\hat{y} &= \frac{1}{n}\overline{W}y \\
\hat{y}_k &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} q^{-jk} y_j
\end{aligned}$$

■

**Definition 17.2**

$$\hat{y}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp \frac{-2\pi ijk}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{q}^{jk}$$

*heißt* ***diskrete Fouriertransformation der Länge n****.*
*Aus den Daten bestimmt man die Koeffizienten des Polynoms.*

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k \exp \frac{2\pi ijk}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k q^{jk}$$

*heißt* ***inverse diskrete Fouriertransformation der Länge n****.*
*Man berechnet den Wert des Polynoms an den Stützstellen.*

**Satz 17.3** *Sei $n = 2m = 2^p$. Mit*

$$P_n = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_1 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$D_m = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \overline{q} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{q}^{m-1} \end{pmatrix}$$

*gilt*

$$W_n = \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ I_m & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_m & 0 \\ 0 & W_m \end{pmatrix} P_n$$

*und die Fouriertransformation ist*

$$\hat{y} = \frac{1}{n} W_n y$$

**Beweis.** Für $q = \exp \frac{2\pi i}{n}$ gilt

$$\begin{aligned} q^{2m} &= q^n = 1 \\ q^m &= q^{n/2} = -1 \end{aligned}$$

Zerlege die Summe in gerade und ungerade Indizes 2j und 2j+1

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{q}^{jk} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{q}^2)^{jk} y_{2j} + \overline{q}^k \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{q}^2)^{jk} y_{2j+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( g_k + \overline{q}^k u_k \right) \end{aligned}$$

Wegen $q^2 = \exp \frac{-2\pi i}{n/2}$ sind $g_k$ und $u_k$ Fouriertransformationen der Länge $\frac{n}{2}$. Zu den Stützstellen $q^0, q^2, q^4, \ldots, q^{2m-2}$ berechnet man

$g_k$ mit den Werten $y_0, y_2, \ldots, y_{2m-2}$ für $0 \leq k \leq m-1$
$u_k$ mit den Werten $y_1, y_3, \ldots, y_{2m-1}$ für $0 \leq k \leq m-1$

Wegen

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{k+m} &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{q}^{j(k+m)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{q}^2)^{j(k+m)} y_{2j} + \overline{q}^{k+m}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{q}^2)^{j(k+m)} y_{2j+1} \\
&\overset{q^{2m}=1,\overline{q}^m=-1}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{q}^2)^{jk} y_{2j} - \overline{q}^{k}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{q}^2)^{jk} y_{2j+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(g_k - \overline{q}^k u_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(g_k + \overline{q}^{k+m} u_k\right)
\end{aligned}$$

ergeben sich die $\hat{y}_k$ aus den $g_k$ und $u_k$ in einem Rechenschritt.
Die Multiplikationen mit $\frac{1}{2}$ können entfallen, wenn man am Ende durch $n = 2^p$ dividiert. ■

**Beispiel 17.4** *Mit* $\hat{y}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \overline{q}^{jk} y_j$ *gilt*
***n=1:***

$$\hat{y}_0 = \frac{1}{1}\sum_{j=0}^{0} \exp\frac{-2\pi i \cdot 0}{1} y_j = y_0$$

***n=2:*** *Wegen* $q = \exp\frac{2\pi i}{2} = -1$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\hat{y}_0 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1} (-1)^{-0\cdot j} y_j = \frac{y_0 + y_1}{2} \\
\hat{y}_1 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1} (-1)^{-1\cdot j} y_j = \frac{y_0 - y_1}{2}
\end{aligned}$$

*Das Verfahren ergibt mit m=1*

$$\begin{aligned}
g_0 &= y_0 \\
u_0 &= y_1 \\
\hat{y}_0 &= \frac{1}{2}\left(g_0 + \overline{q}^0 u_0\right) = \frac{y_0 + y_1}{2} \\
\hat{y}_1 &= \hat{y}_{0+1} = \frac{1}{2}\left(g_0 - \overline{q}^0 u_0\right) = \frac{y_0 - y_1}{2}
\end{aligned}$$

***n=4:*** *Mit* $q = \exp(\frac{2\pi i}{4}) = i$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\hat{y}_0 &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}(-i)^{j\cdot 0}y_j = \frac{y_0+y_1+y_2+y_3}{4} \\
\hat{y}_1 &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}(-i)^{j\cdot 1}y_j = \frac{y_0-iy_1+y_2-iy_3}{4} \\
\hat{y}_2 &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}\underbrace{(-i)^{j\cdot 2}}_{=(-1)^j}y_j = \frac{y_0-y_1+y_2-y_3}{4} \\
\hat{y}_3 &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}\underbrace{(-i)^{j\cdot 3}}_{=i^j}y_j = \frac{y_0+iy_1-y_2-iy_3}{4}
\end{aligned}$$

*Das Verfahren lautet: Zu den Stützstellen* $q^0 = 1, q^2 = -1$ *berechne*

$$\begin{aligned}
&g_k \text{ bzgl. } y_0, y_2 \\
&u_k \text{ bzgl. } y_1, y_3
\end{aligned}$$

*wie im Fall n=2 für k=0,1. Das ergibt*

$$\begin{aligned}
g_0 &= \frac{y_0+y_2}{2} \\
g_1 &= \frac{y_0-y_2}{2} \\
u_0 &= \frac{y_1+y_3}{2} \\
u_1 &= \frac{y_1-y_3}{2}
\end{aligned}$$

*Somit*

$$\begin{aligned}
\hat{y}_0 &= \frac{g_0+(-i)^0u_0}{2} = \frac{y_0+y_1+y_2+y_3}{4} \\
\hat{y}_1 &= \frac{g_1+(-i)^1u_1}{2} = \frac{y_0-y_2-i(y_1-y_3)}{4} \\
\hat{y}_2 &= \frac{g_0+(-i)^2u_0}{2} = \frac{y_0+y_2-(y_1+y_3)}{4} \\
\hat{y}_3 &= \frac{g_1+(-i)^3u_1}{2} = \frac{y_0-y_2+i(y_1-y_3)}{4}
\end{aligned}$$

**Satz 17.5** *Die Fouriertransformation der Länge* $n = 2^p$ *kann durch* $\frac{1}{2}n\log_2 n$ *komplexe Multiplikationen* $M_p$ *und* $n\log_2 n$ *komplexe Additionen* $A_p$ *berech-*

*net werden.*

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{1}{2}p2^p = \frac{n}{2}\log_2 n \\ A_p &= p2^p = n\log_2 n \end{aligned}$$

**Beweis.** Es gilt für $n = 2^1$

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 \\ A_1 &= 2 = 1 \cdot 2^1 \end{aligned}$$

$p \to p+1$: Wenn man die Berechnung von $q^k$ vernachlässigt, gilt

$$\begin{aligned} M_{p+1} &= 2M_p + n = 2\frac{1}{2}p2^p + 2^p \\ &= (p+1)2^p = \frac{1}{2}(p+1)2^{p+1} \\ A_{p+1} &= 2A_p + 2n = 2p2^p + 2^{p+1} \\ &= 2(p+1)2^{p+1} \end{aligned}$$

■

**Satz 17.6** *Sei*

$$T_m = \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \middle| a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

*Gesucht ist ein $T \in T_m$ mit*

$$T(t_j) = y_j \text{ für } t_j = \frac{2\pi j}{n} \text{ und } j = 0, \ldots, n-1$$

*Für $n = 2m+1$ ist die Aufgabe eindeutig lösbar durch*

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

*Für $n = 2m$ ist die Aufgabe eindeutig lösbar (für $b_m = 0$) durch*

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \frac{a_m}{2}\cos mt$$

**Beweis.** 1.) Mit

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos\frac{2\pi jk}{n}$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \sin\frac{2\pi jk}{n}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\hat{y}_k &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp\frac{-2\pi jk}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \left(\cos\frac{-2\pi jk}{n} + i\sin\frac{-2\pi jk}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}(a_k - ib_k)
\end{aligned}$$

2.) Wegen

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi(n-k)j}{n} &= \cos\left(2\pi j - \frac{2\pi kj}{n}\right) = \cos\frac{2\pi kj}{n} \\
\sin\frac{2\pi(n-k)j}{n} &= \sin\left(2\pi j - \frac{2\pi kj}{n}\right) = -\sin\frac{2\pi kj}{n}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos\frac{2\pi kj}{n} \\
&= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos\frac{2\pi(n-k)j}{n} \\
&= a_{n-k}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \sin\frac{2\pi kj}{n} \\
&= -\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \sin\frac{2\pi(n-k)j}{n} \\
&= -b_{n-k}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\hat{y}_{n-k} = \frac{1}{2}(a_{n-k} - ib_{n-k}) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

Für $n = 2m+1$ gilt

$$
\begin{aligned}
& p(x_j) \\
= \quad & y_j = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k \exp \frac{2\pi ijk}{n} \\
= \quad & \hat{y}_0 + \sum_{k=1}^{m} \hat{y}_k \exp \frac{2\pi ijk}{n} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \hat{y}_k \exp \frac{2\pi ijk}{n} \\
\overset{\text{Umnummerieren}}{=} \quad & \hat{y}_0 + \sum_{k=1}^{m} \hat{y}_k \exp \frac{2\pi ijk}{n} + \sum_{k=1}^{m} \hat{y}_{n-k} \exp \frac{2\pi ij(n-k)}{n} \\
\overset{\text{Einsetzen}}{=} \quad & \hat{y}_0 + \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{a_k - ib_k}{2} \exp \frac{2\pi ijk}{n} \right. \\
& \left. + \frac{a_k + ib_k}{2} \exp \frac{-2\pi ijk}{n} \underbrace{\exp \frac{2\pi ijn}{n}}_{=1} \right) \\
\overset{\text{Einsetzen}}{=} \quad & \hat{y}_0 + \sum_{k=1}^{m} \left( a_k \frac{\exp \frac{2\pi ijk}{n} + \exp \frac{-2\pi ijk}{n}}{2} \right. \\
& \left. + b_k \frac{\exp \frac{2\pi ijk}{n} - \exp \frac{-2\pi ijk}{n}}{2i} \right) \\
= \quad & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left( a_k \cos \frac{2\pi ijk}{n} + b_k \sin \frac{2\pi ijk}{n} \right)
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\sin \frac{2\pi jm}{n} \overset{n=2m}{=} \sin \frac{2\pi jm}{2m} = \sin(\pi j) = 0$$

gilt für $n = 2m$

$$p(x_j) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \left( a_k \cos \frac{2\pi ijk}{n} + b_k \sin \frac{2\pi ijk}{n} \right) + \frac{a_m}{2} \cos \frac{2\pi ijm}{n}$$

■

# 18. Numerische Integration I

Für $f \in C^k[a,b]$ und $w \in L^1(a,b)$ und Stützstellen $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ soll das Integral

$$I(f) := \int_a^b w(x) f(x) dx$$

durch eine Summe

$$I_n(f) := \sum_{j=0}^{n} f(x_j) w_j$$

genähert werden.
(Da $f \in C^k[a,b]$ beschränkt ist, ist das Integral definiert.)

**Definition 18.1** *Die Formel $I_n(f)$ heißt **exakt** $\Longleftrightarrow$*

$$\forall p \in P_n : \; I_n(p) = I(p)$$

*Alle Funktionen wird man nicht exakt integrieren können. Deshalb sucht man eine Formel, die zumindest die Polynome exakt integriert.*

**Satz 18.2** *Sei $w \in L^1(a,b)$ gegeben mit $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$. Zur Basis*

$$L_j^n(x) = \prod_{i=0, i \ne j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \text{ für } 0 \le j \le n$$

*von $P_n$ gibt es genau ein lineares $I : P_n \to \mathbb{R}$, das exakt auf $P_n$ ist. Dabei gilt*

$$w_j = \int_a^b w(x) L_j^n(x) dx$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
& I_n \text{ ist exakt} \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall p \in P_n : I_n(p) = I(p) \\
\overset{I_n \text{ linear}, L_j^n \text{ Basis}}{\Longleftrightarrow} \quad & \forall 0 \le j \le n : I_n(L_j^n) = I(L_j^n) \\
\overset{L_j^n(x_k) = \delta_{jk}}{\Longleftrightarrow} \quad & \int_a^b w(x) L_j^n(x) dx \overset{Def}{=} I(L_j^n) \overset{Vor}{=} I_n(L_j^n) \\
& \overset{Def}{=} \sum_{k=0}^{n} w_k \underbrace{L_j^n(x_k)}_{=\delta_{jk}} = w_j
\end{aligned}$$

■

**Satz 18.3** *Ist $p$ das Polynom zu $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, so gilt*

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{j=0}^{n} L_j^n(x) f(x_j) \\ I_n(f) &= I(p_n) \end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen

$$\sum_{j=0}^{n} \underbrace{L_j^n(x_i)}_{=\delta_{ij}} f(x_j) = f(x_i) \text{ für } 0 \leq i \leq n$$

ist es das eindeutige Polynom zu $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

$$\begin{aligned} I_n(f) &\overset{Def}{=} \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b w(x) L_j^n(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) \underbrace{\sum_{j=0}^{n} L_j^n(x) f(x_j)}_{=p_n(x)} dx \\ &= \int_a^b w(x) p_n(x) dx \\ &\overset{\text{exakt}}{=} I(p_n) \end{aligned}$$

■

## Stützstellen mit gleichem Abstand und w=1

**Definition 18.4** *Sei $I_n$ eine Integrationsformel mit $w \equiv 1$. Setze*

$$R_n(f) := I_n(f) - I(f)$$

**Satz 18.5** *Sei $x_0 = a$ und $x_1 = b$.*

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \\ |R_1(f)| &\leq \frac{\| f'' \|_\infty}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

**Beweis.** Es gilt $x_0 = a$ und $x_1 = b$ und

$$\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b 1\frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx \\
&= \frac{1}{a-b}\int_{a-b}^0 udu = \frac{1}{a-b}\frac{-(a-b)^2}{2} = \frac{b-a}{2} \\
w_1 &= \int_a^b 1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)dx \\
&= \frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2-a(b-a)) = \frac{b-a}{2}
\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x-a}{b-a} \\
dy &= \frac{dx}{b-a} \\
\int_0^1 y(1-y)dy &= \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
|R_1(f)| &= |I(p_n) - I(f)| = \left|\int_a^b (f-p_n)dx\right| \\
&\overset{\text{früher}}{\leq} \left|\int_a^b \frac{f''(s_x)}{2!}\prod_{k=0}^n (x-x_k)dx\right| \\
&\leq \frac{\| f'' \|_\infty}{2!}\int_a^b (x-a)(b-x)dx \\
&= \frac{\| f'' \|_\infty}{2}\int_0^1 y(b-a)(b-y(b-a)-a)(b-a)dx \\
&= \frac{\| f'' \|_\infty}{2}(b-a)^3\int_0^1 y(1-y)dx \\
&= \frac{\| f'' \|_\infty}{12}(b-a)^3
\end{aligned}$$

■

Wegen negativer $w_j$ für größere n integriert man über Teilintervalle und summiert auf.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx \text{ für } a = a_0 < \ldots < a_N = b$$

Diese Formeln heißen zusammengesetzte Integrationsformeln.

**Satz 18.6** *Für die zusammengesetzte Formel*

$$T_h(f) \quad = \quad \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{l=1}^{N-1} f(a+lh) + f(b)\right)$$

*gilt*

$$|R_h(f)| \quad \leq \quad \frac{\| f^{(2)} \|_\infty}{12}(b-a)h^2$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} |R_h(f)| &= \sum_{k=0}^{n-1}\left| h\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\| f'' \|_\infty}{12} h^3 \\ &= \frac{\| f'' \|_\infty}{12}(b-a)h^2 \end{aligned}$$

■

Wir benötigen eine Fehlerdarstellung des zusammengesetzten Verfahrens.

**Definition 18.7** *Durch die Vorschrift*

$$\begin{aligned} B_0(t) &= 1 \\ \frac{d}{dt}B_k(t) &= B_{k-1}(t) \text{ für } k \geq 1 \\ \int_0^1 B_k(t)dt &= 0 \text{ für } k \geq 1 \end{aligned}$$

*erhält man Polynome auf [0,1]. Setze noch*

$$B_k := k! \cdot B_k(0)$$

**Satz 18.8** *Es gilt*

$$\begin{array}{llcll} a) & B_k(0) & = & B_k(1) & \text{für } k \geq 2 \\ b) & B_k(t) & = & (-1)^k B_k(1-t) & \text{für } k \geq 0 \\ c) & B_{2k+1}(0) & = & B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = B_{2k+1}(1) = 0 & \text{für } k \geq 1 \end{array}$$

**Beweis.** a)

$$B_k(1) - B_k(0) = \int_0^1 B_k'(t)dt = \int_0^1 B_{k-1}(t)dt \overset{k-1\geq 1}{=} 0$$

b) Auch $(-1)^k B_k(1-t)$ erfüllt die Rekursionsvorschrift

$$\begin{aligned} (-1)^0 B_0(1-t) &= 1 \\ \frac{d}{dt}(-1)^k B_k(1-t) &= (-1)^k(-1)B_k'(1-t) \\ &= (-1)^{k-1}B_{k-1}(1-t) \text{ für } k \geq 1 \end{aligned}$$

Mit $s = 1-t$ und $ds = -dt$ gilt für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-1)^k B_k(1-t)dt &= (-1)^k \int_1^0 (-1)B_k(s)ds \\ &= (-1)^k \underbrace{\int_0^1 B_k(t)dt}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) Wegen

$$\begin{aligned} B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) &\overset{b)}{=} (-1)^{2k+1}B_{2k+1}\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ &= -B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

gilt

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Mit a) und b) ergibt sich

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(0) &\overset{a)}{=} B_{2k+1}(1) \\ B_{2k+1}(0) &\overset{b)}{=} (-1)^{2k+1}B_{2k+1}(1-0) = -B_{2k+1}(1) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(1) &= 0 \\ B_{2k+1}(0) &= 0 \end{aligned}$$

■

Mit den $B_k(t)$ läßt sich die Integrationsformel auf [0,1] anders darstellen.

**Satz 18.9** *Für $g \in C^{2m}[0,1]$ gilt*

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)dt &= \frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g(0) - \sum_{k=1}^{m} B_{2k}(0)\left(g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right)\\ &\quad + \int_0^1 B_{2m}(t)g^{(2m)}(t)dt\end{aligned}$$

**Beweis.** $m = 1$: Wegen $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)dt &= \int_0^1 \underbrace{B_0(t)}_{=1} g(t)dt\\ &= \underbrace{B_1(t)}_{=t-\frac{1}{2}} g(t)|_0^1 - \int_0^1 B_1(t)g'(t)dt\\ &= \frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g(0) - B_2(t)g'(t)|_0^1 + \int_0^1 B_2(t)g''(t)dt\\ &\overset{B_2(0)=B_2(1)}{=} \frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g(0)\\ &\quad - \sum_{k=1}^{1} B_{2k}(0)\left(g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right)\\ &\quad + \int_0^1 B_{2m}(t)g^{(2m)}(t)dt\end{aligned}$$

$m \to m+1$: Wegen

$$\begin{aligned}&\int_0^1 B_{2m}(t)g^{(2m)}(t)dt\\ = \;& \underbrace{B_{2m+1}(t)}_{=0} g^{(2m)}(t)|_0^1 - \int_0^1 B_{2m+1}(t)g^{(2m+1)}(t)dt\\ = \;& -B_{2m+2}(t)g^{(2m+1)}(t)|_0^1 + \int_0^1 B_{2m+2}(t)g^{2m+2}(t)dt\\ \overset{B_{2m+2}(0)=B_{2m+2}(1)}{=} \;& -B_{2m+2}(0)\left(g^{(2m+1)}(1) - g^{(2m+1)}(0)\right)\\ & + \int_0^1 B_{2m+2}(t)g^{2m+2}(t)dt\end{aligned}$$

ergibt Einsetzen die Behauptung für m+1

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 g(t)dt \\
= \quad & \frac{1}{2}g(1) - \frac{1}{2}g(0) - \sum_{k=1}^{m} B_{2k}(0)\left(g^{(2k-1)}(1) - g^{(2k-1)}(0)\right) \\
& -B_{2(m+1)}(0)\left(g^{(2(m+1)-1)}(1) - g^{(2(m+1)-1)}(0)\right) \\
& + \int_0^1 B_{2m+2}(t) g^{2m+2}(t)dt
\end{aligned}
$$

■

Aus der Integrationsformel auf $[0,1]$ erhalten wir eine Integrationsformel für $[x_{j-1}, x_j]$.

**Satz 18.10** *Sei* $f \in C^{2m}(a,b)$ *und*

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{b-a}{n} \\
x_j &= a + jh \text{ für } 1 \leq j \leq n
\end{aligned}
$$

*Für*

$$g_j : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto hf(x_{j-1} + th)$$

*gilt*

$$
\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx &= \int_0^1 g_j(t)dt \\
g_j(1) &= hf(x_j) = g_{j+1}(0) \\
g_j^{(2k-1)}(t) &= h^{2k} f^{(2k-1)}(x_{j-1} + th) \\
g_j^{(2k-1)}(1) &= g_{j+1}^{(2k-1)}(0) = h^{2k} f^{(2k-1)}(x_j)
\end{aligned}
$$

**Beweis. a)** Mit

$$
\begin{aligned}
x &= x_{j-1} + th \\
dx &= hdt
\end{aligned}
$$

erhält man

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 g_j(t)dt &\overset{Def}{=} \int_0^1 hf(x_{j-1} + th)dt \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx
\end{aligned}
$$

**b)**

$$\begin{aligned} g_j(1) &= hf(x_{j-1}+h) = hf(x_j) \\ g_{j+1}(0) &= hf(x_j) \end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned} g_j^{(2k-1)}(t) &= h\frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}} f(x_{j-1}+th) \\ &= hh^{2k-1} f^{(2k-1)}(x_{j-1}+th) \end{aligned}$$

**d)**

$$\begin{aligned} g_j^{(2k-1)}(1) &\overset{c)}{=} h^{2k} f^{(2k-1)}(x_j) \\ g_{j+1}^{(2k-1)}(0) &\overset{c)}{=} h^{2k} f^{(2k-1)}(x_j) \end{aligned}$$

■
Wir integrieren auf den Teilintervallen $[x_j, x_{j+1}]$ für $0 \le j \le n-1$ und summieren auf.

**Satz 18.11** *a) Sei $f \in C^{2m}(a,b)$ und*

$$\begin{aligned} h &:= \frac{b-a}{n} \\ \forall 1 \le j \le n: \; x_j &= a + jh \end{aligned}$$

*Dann gilt*

$$T_h(f) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} h^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left( f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) + J \cdot h^{2m}$$

*mit*

$$\begin{aligned} T_h(f) &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) + f(x_{j-1})) \\ |J| &\le (b-a) \parallel B_{2m} \parallel_\infty \parallel f^{2m} \parallel_\infty \end{aligned}$$

*b) Ist f (b-a)-periodisch, so gilt* $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{j=0}^{n} f(a+jh) + J \cdot h^{2m}$$

**Beweis. a)**

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b f(x)dx \\
= \quad & \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \overset{a)}{=} \sum_{j=1}^n \int_0^1 g_j(t)dt \\
= \quad & \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} g_j(1) + \frac{1}{2} g_j(0) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \underbrace{B_{2k}(0)}_{=B_{2k}/(2k)!} \left( g_j^{(2k-1)}(1) - \underbrace{g_j^{(2k-1)}(0)}_{=g_{j-1}^{(2k-1)}(1)} \right) \\
& + \sum_{j=1}^n \int_0^1 B_{2m}(t) g_j^{(2m)}(t)dt \\
\overset{b)}{=} \quad & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n (f(x_j) + f(x_{j-1})) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left( \underbrace{\sum_{j=1}^n (g_j^{(2k-1)}(1) - g_{j-1}^{(2k-1)}(1))}_{=g_n^{(2k-1)}(1) - g_0^{(2k-1)}(1))} \right) \\
& + \sum_{j=1}^n \int_0^1 B_{2m}(t) h^{2m+1} f^{(2m)}(x_{j-1} + th)dt \\
\overset{Def}{=} \quad & T_n(f) - \sum_{k=1}^m h^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(\underbrace{x_n}_{=b}) - f^{(2k-1)}(\underbrace{x_0}_{=a})) \\
& + h^{2m} \underbrace{h \sum_{j=1}^n \int_0^1 B_{2m}(t) f^{(2m)}(x_{j-1} - th)dt}_{=J}
\end{aligned}
$$

Und für den 3. Term gilt

$$
\begin{aligned}
|J| \quad & \leq \quad h \sum_{j=1}^m \| B_{2m} \|_\infty \| f^{(2m)} \|_\infty \\
& \overset{nh=b-a}{\leq} \quad (b-a) \| B_{2m} \|_\infty \| f^{(2m)} \|_\infty = const
\end{aligned}
$$

**b)** Wegen

$$f^{2k-1}(b) - f^{2k-1}(a) = 0$$

fällt der 2. Term weg. ■

Wir berechnen das Integral für verschiedene Schrittweiten

$$h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}, \ldots$$

mit der Integrationsformel und konstruieren aus diesen Werten eine Formel hoher Genauigkeit.

**Satz 18.12** *Für*

$$\begin{aligned}
h &:= \frac{b-a}{n} \\
T_1(h) &= h\frac{f(a)+f(b)}{2} + h\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh) \\
T_{k+1}(h) &= \frac{2^{2k}T_k\left(\frac{h}{2}\right) - T_k(h)}{2^{2k}-1} \\
&= T_k\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{T_k\left(\frac{h}{2}\right) - T_k(h)}{2^{2k}-1}
\end{aligned}$$

*gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = T_m(h) + O(h^{2m+2})$$

**Beweis.** $k = 1$:

$$T_h(f) = \int_a^b f(x)dx + O(h^2)$$

$k \to k+1$ : Subtrahiert man

$$\begin{aligned}
T_k(h) &= \int_a^b f(x)dx + c_k h^{2k} + \ldots + c_m h^{2m} + O(h^{2m}) \\
2^{2k}T_k\left(\frac{h}{2}\right) &= 2^{2k}\int_a^b f(x)dx + 2^{2k}c_k 2^{-2k}h^{2k} + \ldots \\
&\quad +2^{2k}c_m 2^{-2m}h^{2m} + O(h^{2m})
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
& 2^{2k}T_k\left(\frac{h}{2}\right) - T_k(h) \\
= \; & (2^{2k}-1)\int_a^b f(x)dx + c_{k+1}(2^{-2}-1)h^{2k+2} + \ldots \\
& +c_m(2^{2k-2m}-1)h^{2m} + O(h^{2m})
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx \\
= \quad & \frac{2^{2k}T_k\left(\frac{h}{2}\right)-T_k(h)}{2^{2k}-1} - c_{k+1}\frac{2^{-2}-1}{2^{2k}-1}h^{2k+2} - \ldots \\
& -c_m\frac{2^{2k-2m}-1}{2^{2k}-1}h^{2m} + O(h^{2m}) \\
= \quad & T_{k+1}(h) - c'_{k+1}h^{2k+2} - \ldots - c'_m h^{2m} + O(h^{2m})
\end{aligned}$$

■

## Das Rechenschema ist

$$\begin{array}{lllll}
h & T_1(h) & & & \\
\frac{h}{2} & T_1\left(\frac{h}{2}\right) & T_2(h) & & \\
\frac{h}{4} & T_1\left(\frac{h}{4}\right) & T_2\left(\frac{h}{2}\right) & T_3(h) & \\
\frac{h}{8} & T_1\left(\frac{h}{8}\right) & T_2\left(\frac{h}{4}\right) & T_3\left(\frac{h}{2}\right) & T_4(h)
\end{array}$$

Für kleines h und große k sind $T_k\left(\frac{h}{2}\right)$ und $T_k(h)$ gute Näherungen von $\int_a^b f(x)dx$ und

$$T_k\left(\frac{h}{2}\right) - T_k(h)$$

hat einen großen Fehler. Es lohnt sich nicht über k=6 hinauszugehen.

# 19. Numerische Integration II

Sei w stetig auf $(a, b)$ mit

$$\forall x \in (a, b): \; w(x) > 0$$

Für

$$\int_a^b w(x) f(x) dx$$

suchen wir eine Integrationsformel

$$\sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$$

Bisher hatten wir $p \in P_n$ exakt integriert. Durch **geschickte Wahl der Stützstellen** wollen wir $p \in P_{2n-1}$ exakt integrieren, denn das sind $2n$ Bedingungen für $2n$ Parameter.

$$\forall p \in P_{2n-1}: \; I_n(f) = I(f)$$

**Satz 19.1** *Es gibt keine Formel $I_n$, die in $P_{2n}$ exakt ist.*

**Beweis.** Annahme: $I_n$ ist exakt in $P_{2n}$. Für

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_j)^2 \in P_{2n}$$

gilt dann

$$0 < \int_a^b w(x) p(x) dx \overset{\text{exakt}}{=} \sum_{j=1}^{n} A_j \underbrace{f(x_j)}_{=0} = 0$$

ein Widerspruch. ■

**Satz 19.2**

$$\langle p, q \rangle := \int_a^b w(x) p(x) q(x) dx$$

*ist ein Skalarprodukt.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
\langle a_1p_1 + a_2p_2, q\rangle &= \int (a_1p_1 + a_2p_2)qwdx \\
&= a_1 \int p_1qwdx + a_2 \int wp_2qdx \\
&= a_1 \langle p_1, q\rangle + a_2 \langle p_2, q\rangle \\
\langle p, q\rangle = \int pqwdx &= \int qpwdx = \langle q, p\rangle \\
\langle p, p\rangle = \int wppdx &= 0 \Rightarrow p \equiv 0
\end{aligned}$$

■

**Satz 19.3** *Zu $w$ konstruiert man eine senkrechte Basis mit Länge 1 von Polynomen durch*

$$\begin{aligned}
q_0 &\equiv 1 \in P_0 \\
\forall 0 \leq j \leq n-1:\ q_{j+1} &= x^{j+1} - \sum_{i=0}^{j} \frac{\left\langle x^{j+1}, p_i\right\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} p_i \in P_{j+1} \\
\forall 0 \leq j \leq n:\ p_j &= \frac{q_j}{\sqrt{\langle q_j, q_j\rangle}}
\end{aligned}$$

**Beweis.** $j = 0$:

$$\langle p_0, p_0\rangle = \frac{\langle 1, 1\rangle}{\sqrt{\langle 1, 1\rangle}^2} = 1$$

$j \to j+1$: Für $0 \leq k \leq j$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}, p_k\rangle &= \left\langle x^{j+1}, p_k\right\rangle - \langle p_k, p_k\rangle \frac{\left\langle x^{j+1}, p_k\right\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle} \\
&= 0 \\
\langle p_{j+1}, p_k\rangle &= \frac{\langle q_{j+1}, p_k\rangle}{\sqrt{\langle q_{j+1}, q_{j+1}\rangle}} \\
&= 0 \\
\langle p_{j+1}, p_{j+1}\rangle &= \frac{\langle q_{j+1}, q_{j+1}\rangle}{\sqrt{\langle q_{j+1}, q_{j+1}\rangle}^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

**Satz 19.4** *Die Nullstellen $x_1, \ldots, x_m$ von $p_m$ sind reell, einfach und liegen in (a,b)*

**Beweis.** Seien

$$a < x_1 < \ldots < x_k < b$$

die Nullstellen von $p_m$ in (a,b), in denen $p_m$ sein Vorzeichen wechselt, d.h. ungerader Vielfachheit und

$$q(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - x_j) \in P_k$$

Hat $p_m$ keine reellen Nullstellen ungerader Vielfachheit in (a,b), so setze

$$q(x) = 1$$

Annahme: $k < m$. Da $p_m(x)q(x)$ auf (a,b) sein Vorzeichen nicht wechselt, gilt

$$\begin{aligned}
\int w \cdot \underbrace{(\pm p_m q)}_{\geq 0} dx &= \langle p_m, q\rangle \\
&\overset{q \in P_k}{\equiv} 0 \\
p_m q &\equiv 0
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu

$$p \neq 0 \neq q$$

Somit gilt $k = m$. ■

**Satz 19.5** *Sind die $x_j$ die Nullstellen von $p_n$ und*

$$A_j = \int_a^b w(x) \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)^2 dx$$

*so erhält man eine Integrationsformel die auf $P_{2n-1}$ exakt ist.*

**Beweis.**

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b w \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} dx f(x_j)$$

ist exakt in $P_{n-1}$, da rechts das Interpolationspolynom integriert wird. Wegen

$$\forall p \in P_{2n-1}\ \exists q, r \in P_{n-1} :\ p = qp_n + r$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\int_a^b wp\,dx &= \underbrace{\int_a^b wqp_n\,dx}_{=0,\text{ da senkrecht}} + \underbrace{\int_a^b wr\,dx}_{=I_n(r)} \\
&\stackrel{P_{n-1}\text{ exakt}}{=} I_n(r) \\
&= I_n(r) + \underbrace{I_n(qp_n)}_{=0,\text{ da} p_n(x_i)=0} \\
&= I_n(p)
\end{aligned}
$$

d.h. $I_n$ ist exakt in $P_{2n-1}$. Für

$$
w_j = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}
$$

gilt $w_j^2 \in P_{2n-2}$ und

$$
\begin{aligned}
\int_a^b ww_j^2\,dx &= I_n(w_j^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k w_j^2(x_k) \\
&= A_j
\end{aligned}
$$

■

# 20. Numerische Differentiation

Sei $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ und $m \leq n$. Suche eine Näherung für

$$f^{(m)}(0)$$

die mit den Funktionsauswertungen $f(-kh), \ldots, f(kh)$ berechnet wird.

**Satz 20.1** *Es gibt $a_i$ mit*

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{h^m} \sum_{i=-k}^{k} a_i f(ih) + O(h^{n+1-m})$$

*Der Genauigkeitsverlust der Differentiation ist klein für $n+1 >> m$.*

**Beweis. a)** Die Reihenentwicklung von f ergibt

$$f(ih) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) \frac{(ih)^j}{j!} + O(h^{n+1})$$

Wählt man die $a_i$ geschickt, bleibt in der folgenden Linearkombination nur der m-Term stehen

$$\begin{aligned} \sum_{i=-k}^{k} a_i f(ih) &= \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) \frac{h^j}{j!} \cdot \sum_{i=-k}^{k} i^j a_i + O(h^{n+1}) \\ \sum_{i=-k}^{k} a_i f(ih) &= \frac{1}{m!} h^m f^{(m)}(0) + O(h^{n+1}) \end{aligned}$$

und man erhält die obige Formel.
**b)** Es muss gelten

$$\forall 0 \leq j \leq n : \sum_{i=-k}^{k} i^j a_i = \begin{cases} 1 & \text{für } j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ -k & \ldots & k \\ \vdots & & \vdots \\ (-k)^n & \ldots & k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-k} \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow \text{ m-te Stelle} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $2k+1 = n+1$ hat es eine eindeutige Lösung. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -k & \dots & k \\ \vdots & & \vdots \\ (-k)^n & \dots & k^n \end{pmatrix}$$

Addiere in der Determinante in jeder Zeile k mal die Zeile darüber.

$$\det A$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2k-1 & 2k \\ 0 & -k+1 & 2(-k+2) & \cdots & (2k-1)(k-1) & 2k^2 \\ \vdots \\ 0 & (-k+1)^{n-1} & 2(-k+2)^{n-1} & \cdots & (2k-1)(k-1)^{n-1} & 2k^n \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der 1. Spalte und Ausklammern der Spaltenfaktoren ergibt

$$\det A = (2k)! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -k+1 & -k+2 & \cdots & k-1 & k \\ \vdots \\ (-k+1)^{n-1} & (-k+2)^{n-1} & \cdots & (k-1)^{n-1} & k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ziehe von jeder Zeile k-mal die Zeile darüber ab.

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2k+1 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots \\ (-k+1)^{n-2}(-2k+1) & \cdots & (k-1)^{n-2}(-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der letzten Spalte und und Ausklammern der Spaltenfaktoren ergibt

$$\det A = (2k)!(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}(2k-1)! \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k+1 & \cdots & k-1 \\ \vdots \\ (-k+1)^{n-2} & \cdots & (k-1)^{n-2} \end{pmatrix}$$

Das ist dieselbe Form wie oben. Induktion ergibt

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} (2k)! \neq 0$$

Damit ist die Matrix umkehrbar. ■

**Beispiel 20.2** *a) Für* $f \in C^3$ *gilt*

$$f'(0) \quad = \quad \frac{f(h) - f(-h)}{2h} + O(h^2)$$

*b) Für* $f \in C^4$ *gilt*

$$f''(0) \quad = \quad \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} + O(h^2)$$

**Beweis.** a) Für $m = 1, n = 2, k = 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$a_{-1} = -0.5, a_0 = 0, a_1 = 0,5$$

b) Für $m = 2, n = 3, k = 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$a_{-1} = 0.5, a_0 = -1, a_1 = 0,5$$

■

# 21. B-Splines

B-Splines haben einen Träger minimaler Länge und können numerisch stabil mit einer Rekursionsformel berechnet werden.

**Definition 21.1** *Sei $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ monoton steigend. Für alle $j \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ definiere*

$$\begin{aligned}
B_{j1}(t) &:= 1_{[t_j,t_{j+1})}(t) \\
w_{jk}(t) &:= \begin{cases} \dfrac{t-t_j}{t_{j+k-1}-t_j} & \textit{für } t_j < t_{j+k-1} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \\
B_{jk} &:= w_{jk}B_{j,k-1} + (1-w_{j+1,k})B_{j+1,k-1}
\end{aligned}$$

**Satz 21.2** *a) $B_{jk}$ ist rechtsstetig.*
*b) Es gilt*

$$(1-w_{j+1,k})(t) = \begin{cases} \dfrac{t_{j+k}-t}{t_{j+k}-t_{j+1}} & \textit{für } t_{j+1} < t_{j+k} \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

**Beweis.** a) Da $B_{j,1}(t)$ rechtsstetig und $w_{jk}(t)$ stetig ist.
b) Für $t_{j+1} < t_{j+k}$ gilt

$$\begin{aligned}
1 - \frac{t-t_{j+1}}{t_{j+k}-t_{j+1}} &= \frac{t_{j+k}-t_{j+1}-(t-t_{j+1})}{t_{j+k}-t_{j+1}} \\
&= \frac{t_{j+k}-t}{t_{j+k}-t_{j+1}}
\end{aligned}$$

■

**Satz 21.3**

$$B_{jk} = \sum_{i=j}^{j+k-1} p_{ik}B_{i1} \textit{ mit } p_{ik} \in P_{k-1}$$

*Insbesondere ist $B_{j,k}$ stückweise polynomial.*

**Beweis.** $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
B_{j2}(t) &= \underbrace{w_{j2}}_{\in P_1} 1_{[t_j,t_{j+1})}(t) + \underbrace{(1-w_{j+1,2})}_{\in P_1} 1_{[t_{j+1},t_{j+2})}(t) \\
&= \sum_{i=j}^{j+1} p_{i2}B_{i,1}
\end{aligned}$$

$k-1 \to k:$

$$\begin{aligned} B_{jk}(t) &= w_{j,k} B_{j,k-1} + (1-w_{j+1,k}) B_{j+1,k-1} \\ &= \underbrace{w_{jk}}_{\in P_1} \sum_{i=j}^{j+k-2} \underbrace{q_{i,k-1}}_{\in P_{k-2}} B_{i,1} + \underbrace{(1-w_{j+1,k})}_{\in P_1} \sum_{i=j+1}^{j+k-1} \underbrace{r_{i,k-1}}_{\in P_{k-2}} B_{i,1} \\ &= \sum_{i=j}^{j+k-1} p_{ik} B_{i,1} \end{aligned}$$

■

**Satz 21.4** *Für $t_j = t_{j+k}$ gilt*

$$B_{j,k} \equiv 0$$

**Beweis.** $k = 1$:

$$1_{[t_j, t_{j+1})}(t_j) = 0 \text{ für } t_j = t_{j+1}$$

$k-1 \to k$: Wegen $t_j = t_{j+1}$ gilt $t_j = t_{j+k-1}$ und $t_{j+1} = t_{j+k}$

$$\begin{aligned} B_{jk} &= w_{jk} \underbrace{B_{j,k-1}}_{\equiv 0} + (1-w_{j+1,k}) \underbrace{B_{j+1,k-1}}_{\equiv 0} \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

■

**Satz 21.5** *Für $t_j < t_{j+k}$ und $t_j < t_{j+k-1}$ gilt*

$$\begin{aligned} B_{j,k}(t) &> 0 \qquad \text{für } t \in (t_j, t_{j+k}) \\ B_{j,k}(t) &= 0 \qquad \text{sonst} \end{aligned}$$

*Für $t_j < t_{j+k}$ und $t_j = t_{j+k-1}$ gilt*

$$\begin{aligned} B_{j,k}(t) &> 0 \qquad \text{für } t \in [t_j, t_{j+k}) \\ B_{j,k}(t) &= 0 \qquad \text{sonst} \end{aligned}$$

**Beweis. 1.)** Es gilt

$$B_{jk}(t) = 0 \text{ für } t \notin [t_j, t_{j+k})$$

$k = 1:$

$$B_{j1}(t) = 1_{[t_j, t_{j+1})}(t) = 0 \text{ für } t \notin [t_j, t_{j+1})$$

$k-1 \to k:$ Wegen

$$\begin{aligned} B_{j,k-1}(t) &= 0 \text{ für } t \notin [t_j, t_{j+k-1}) \\ B_{j+1,k-1}(t) &= 0 \text{ für } t \notin [t_{j+1}, t_{j+k}) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
B_{jk}(t) &= w_{jk} \underbrace{B_{j,k-1}(t)}_{=0 \text{ für } t\notin[t_j,t_{j+k-1})} +(1-w_{j+1,k}) \underbrace{B_{j+1,k-1}(t)}_{=0 \text{ für } t\notin[t_{j+1},t_{j+k})} \\
&= 0 \text{ für } t \notin [t_j, t_{j+k})
\end{aligned}$$

**2.)** Sei $t_j < t_{j+k}$. Dann gilt

$$\begin{array}{llcl}
a) & B_{jk}(t) & \geq & 0 \\
b) & B_{jk}(t) & > & 0 \text{ für } t \in (t_j, t_{j+k})
\end{array}$$

**a)** $k = 1$:

$$B_{j,1} = 1_{[t_j,t_{j+1})} \quad \geq \quad 0$$

$k-1 \to k$ : Wegen

$$\begin{aligned}
w_{jk} &\geq 0 \text{ für } t \geq t_j \\
B_{j,k-1} &= 0 \text{ für } t \notin [t_j, t_{j+k-1}) \\
(1-w_{j+1,k}) &> 0 \text{ für } t < t_{j+k} \\
B_{j+1,k-1} &= 0 \text{ für } t \notin [t_{k+1}, t_{j+k})
\end{aligned}$$

gilt für alle t

$$\begin{aligned}
w_{j,k}B_{j,k-1} &\geq 0 \\
(1-w_{j+1,k})B_{j+1,k-1} &\geq 0 \\
B_{j,k}(t) &= w_{j,k}B_{j,k-1} + (1-w_{j+1,k})B_{j+1,k-1} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

**b)** $k = 1$ :

$$B_{j,1} = 1_{[t_j,t_{j+1})} \quad > \quad 0 \text{ für } t \in (t_j, t_{j+1})$$

$k-1 \to k$ : Wegen

$$\begin{aligned}
w_{jk} &> 0 \text{ für } t \in (t_j, t_{j+k-1}) \text{ und } t_j < t_{j+k-1} \\
(1-w_{j+1,k}) &> 0 \text{ für } t \in (t_{j+1}, t_{j+k})
\end{aligned}$$

und da für $t_j < t_{j+1}$ gilt $t_j < t_{j+k-1}$, folgt

$$\begin{aligned}
w_{j,k}B_{j,k-1} &> 0 \text{ für } t \in (t_j, t_{j+k-1}) \text{ und } t_j < t_{j+k-1} \\
(1-w_{j+1,k})B_{j+1,k-1} &> 0 \text{ für } t \in (t_{j+1}, t_{j+k})
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
B_{j,k}(t) &= \underbrace{w_{j,k}B_{j,k-1}}_{>0} + \underbrace{(1-w_{j+1,k})B_{j+1,k-1}}_{\geq 0} \\
&> 0 \text{ für } t \in (t_j, t_{j+k-1}) \\
B_{j,k}(t) &= \underbrace{w_{j,k}B_{j,k-1}}_{\geq 0} + \underbrace{(1-w_{j+1,k})B_{j+1,k-1}}_{>0} \\
&> 0 \text{ für } t \in (t_{j+1}, t_{j+k})
\end{aligned}$$

**3.)** Für $t_j < t_{j+k-1}$ gilt

$$B_{jk}(t_j) = 0$$

$k = 2 : t_j < t_{j+1}$

$$\begin{aligned}
B_{j,2}(t_j) &= \underbrace{\frac{t_j - t_j}{t_{j+1} - t_j}}_{=0,\text{ da } t_j < t_{j+k-1}} 1_{[t_j, t_{j+1})}(t_j) + (1 - w_{j+1,k})(t_j)\, \underbrace{1_{[t_{j+1}, t_{j+2})}(t_j)}_{=0,\text{ da } t_j < t_{j+1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$k - 1 \to k : t_j < t_{j+k-1}$. Wegen

$$B_{j+1,k-1}(t_j) = 0 \begin{cases} \text{für } t_j = t_{j+1} \text{ nach Voraussetzung für } k-1 \\ \text{für } t_j < t_{j+1} \text{ da } t_j \notin [t_{j+1}, t_{j+k}) \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned}
B_{j,k}(t_j) &= \underbrace{\frac{t_j - t_j}{t_{j+k-1} - t_j}}_{=0,\text{ da } t_j < t_{j+k-1}} B_{j,k-1}(t_j) + (1 - w_{j+1,k})(t_j)\, \underbrace{B_{j+1,k-1}(t_j)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

**4.)** Sei $t_j = t_{j+k-1} < t_{j+k}$. Dann gilt

$$B_{jk}(t_j) = 1$$

$k = 1 : t_j = t_j < t_{j+1}$

$$B_{j1}(t_j) = 1_{[t_j, t_{j+1})}(t_j) = 1$$

$k = 2 : t_j = t_{j+1} < t_{j+2}$

$$\begin{aligned}
B_{j2}(t_j) &= \frac{t_j - t_j}{t_{j+1} - t_j} \underbrace{1_{[t_j, t_{j+1})}(t_j)}_{=0} + \underbrace{1_{[t_{j+1}, t_{j+2})}(t_j)}_{=1,\text{ da } t_j = t_{j+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$k-1 \to k: t_j = \ldots = t_{j+k-1} < t_{j+k}$

$$\begin{aligned} B_{jk}(t_j) &= \underbrace{\frac{t_j - t_j}{t_{j+k-1} - t_j}}_{=0} B_{j,k-1}(t_j) + \underbrace{\frac{t_{j+k} - \overbrace{t_j}^{=t_{j+1}}}{t_{j+k} - t_{j+1}}}_{\text{da } t_{j+1} < t_{j+k}} \underbrace{B_{j+1,k}(t_j)}_{=1,\text{ da } t_{j+1} = \ldots = t_{j+k-1} < t_{j+k}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

**Definition 21.6** *Sei*

$$\lim_{j \to \pm\infty} t_j = \pm\infty$$
$$\forall j \in \mathbb{Z}: \ t_j < t_{j+k}$$

*Für festes $k \geq 2$ fest definiert man den Vektorraum der* ***Splines*** *durch*

$$S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}} = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{j,k} B_{j,k}(t) : c_{j,k} \in \mathbb{R} \right\}$$

**Beweis.** Für $t_j = t_{j+k}$ gilt $B_{j,k} = 0$ und der Term tritt nicht auf in der Summe. Wegen

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{j,k} B_{j,k}(t) + a \sum_{j\in\mathbb{Z}} d_{j,k} B_{j,k}(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (c_{j,k} + a d_{j,k}) B_{j,k}(t)$$

ist $S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}$ ein Vektorraum. ■

**Satz 21.7** *a) Die Summe ist an jedem Punkt endlich.*
*b)*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{jk} B_{j,k} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (c_{jk} w_{jk} + c_{j-1,k}(1 - w_{jk})) B_{j,k-1}$$

**Beweis.** a) Für $t \in [t_{j_0}, t_{j_0+1}]$ sind höchstens

$$B_{j_0-k+1}(t), \ldots, B_{j_0}(t)$$

ungleich Null.
b) Sei $(c_{j,k})_{j\in\mathbb{Z}}$ mit $c_{j,k} \in \mathbb{R}$. Wegen

$$B_{jk} = w_{jk} B_{j,k-1} + (1 - w_{j+1,k}) B_{j+1,k-1}$$

gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{j,k}B_{j,k} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (c_{j,k}w_{jk}B_{j,k-1} + c_{j,k}(1-w_{j+1,k})B_{j+1,k-1}) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (c_{j,k}w_{jk} + c_{j-1,k}(1-w_{jk}))B_{j,k-1}\end{aligned}$$

■

**Satz 21.8** *Sei $u \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $k \geq 1$ gilt*

$$(t-u)^{k-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{jk}(u)B_{jk}(t)$$

*mit*

$$\begin{aligned} g_{j1}(u) &:= 1 \\ g_{jk}(u) &:= (t_{j+1}-u)\cdots(t_{j+k-1}-u)\end{aligned}$$

**Beweis.** Für $t_j < t_{j+k-1}$ gilt

$$\begin{aligned} & g_{j-1,k}(u)(1-w_{jk}(t)) + g_{j,k}(u)w_{jk}(t) \\ = \;& (t_j-u)\dots(t_{j+k-2}-u)\frac{t_{j+k-1}-t}{t_{j+k-1}-t_j} \\ & +(t_{j+1}-u)\dots(t_{j+k-1}-u)\frac{t-t_j}{t_{j+k-1}-t_j} \\ = \;& g_{j,k-1}(u)\frac{(t_j-u)(t_{j+k-1}-t)+(t_{j+k-1}-u)(t-t_j)}{t_{j+k-1}-t_j} \\ = \;& g_{j,k-1}(u)\frac{-t_jt-ut_{j+k-1}+t_{j+k-1}t+ut_j}{t_{j+k-1}-t_j} \\ = \;& g_{j,k-1}(u)(t-u)\end{aligned}$$

Für $t_j = t_{j+k-1}$ gilt

$$\begin{aligned} & (g_{j-1,k}(u)(1-w_{jk}) + g_{j,k}(u)w_{jk})\underbrace{B_{j,k-1}(t)}_{\equiv 0} \\ = \;& g_{j,k-1}(u)(t-u)\underbrace{B_{j,k-1}(t)}_{\equiv 0}\end{aligned}$$

Das ergibt $k=1$:

$$\begin{aligned}(t-u)^0 = 1 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 1_{[t_j,t_{j+1})}(t) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \underbrace{g_{j1}(u)}_{=1} 1_{[t_j,t_{j+1})}(t)\end{aligned}$$

$k-1 \to k$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{jk}(u)B_{jk}(t) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{j,k}(u)\left(w_{j,k}B_{j,k-1}(t) + (1-w_{j+1,k}(t))B_{j+1,k-1}\right) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (g_{j,k}(u)w_{j,k} + (1-w_{j,k}(t))g_{j-1,k})B_{j,k-1} \\
&= (t-u)\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{j,k-1}(u)B_{j,k-1}(t) \\
&= (t-u)(t-u)^{k-2} \\
&= (t-u)^{k-1}
\end{aligned}$$

■

Die Polynome vom Grad $k-1$ sind in den Splines vom Grad $k$ enthalten.

**Satz 21.9** *a)*

$$\frac{(t-u)^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} B_{jk}(t)$$

*b) Für* $p \in P_{k-1}$ *gilt*

$$p(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} \left(\frac{d}{du}\right)^{k-i} p(u) \right) B_{jk}(t)$$

*d.h.*

$$P_{k-1}(t) \subset S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}$$

**Beweis. a)** Ableiten von

$$(t-u)^{k-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{jk}(u)B_{jk}(t)$$

ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{jk}(u)B_{jk}(t) &= \left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} (t-u)^{k-1} \\
&= (k-1)\dots(k-i+1)(t-u)^{k-i} \\
&= \frac{(k-1)!}{(k-i)!}(t-u)^{k-i}
\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{(t-u)^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} B_{jk}(t)$$

**b)** Wegen

$$\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(t-u)^i}{i!} p^{(i)}(u) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{(t-u)^{k-i}}{(k-i)!} p^{(k-i)}(u) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{(-\frac{d}{du})^{i-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} \left(\frac{d}{du}\right)^{k-i} p(u) \right) B_{jk}(t)
\end{aligned}$$

■

**Satz 21.10 (Zerlegung der Eins)**

$$\begin{aligned}
&a) \qquad \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{k-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} = 1 \\
&b) \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} B_{jk} = 1
\end{aligned}$$

**Beweis.** a)

$$\begin{aligned}
\frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{k-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} &= \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{k-1} \left((-u)^{k-1} + bu^{k-2} + \ldots\right) g_{jk}(u)}{(k-1)!} \\
&= \frac{(k-1)!}{(k-1)!} = 1
\end{aligned}$$

b) Für $p \equiv 1$ gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} \left(\frac{d}{du}\right)^{k-i} p(u) \\
=\ & \underbrace{\frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{k-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!}}_{=1} \left(\frac{d}{du}\right)^{0} 1 \\
=\ & 1
\end{aligned}$$

■

# 22. Rechtsstetige stückweise polynomiale Funktionen

**Definition 22.1** *Die* ***Vielfachheit des Knotens*** $t_j$ *ist*

$$\#t_j := \#\{k : t_k = t_j\}$$

**Satz 22.2** *Sei* $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} (t-t_i)^{k-1} 1_{[t_i,\infty)}(t) &= \sum_{j \geq i} g_{jk}(t_i) B_{jk}(t) \\ \forall 1 \leq m \leq \#t_i : \ (t-t_i)^{k-m} 1_{[t_i,\infty)}(t) &= \sum_{j \geq i} g_{j,k-m+1}(t_i) B_{j,k-m+1}(t) \end{aligned}$$

**Beweis. 1.) Sei** $t < t_i$**.** Wegen

$$\text{Träger}(B_{j,k-m+1}) \subset [t_j, t_{j+k-m+1})$$

gilt

$$\forall j \geq i : \ B_{jk}(t) = 0$$

und beide Seiten sind Null.
**2.) Sei** $t_i < t$**.** Da für $k \geq 1$ gilt

$$(t-u)^{k-1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{j,k}(u) B_{j,k}(t)$$

gilt für $k - m \geq 0$

$$(t-t_i)^{k-m} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{j,k-m+1}(t_i) B_{j,k-m+1}(t)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \text{Träger}(B_{j,k-m+1}) &\subset [t_j, t_{j+k-m+1}) \\ \text{Träger}(B_{i-k+m-1,k-m+1}) &\subset [t_{i-k+m-1}, t_i) \end{aligned}$$

tragen nur die $B_{j,k-m+1}$ mit $j \geq i - k + m$ zur Summe bei, d.h.

$$\begin{aligned} & (t-t_i)^{k-m} 1_{[t_i,\infty)}(t) \\ = \ & (t-t_i)^{k-m} \\ = \ & \sum_{j \geq i-k+m} g_{j,k-m+1}(t_i) B_{j,k-m+1}(t) \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} g_{j,k}(u) &= (t_{j+1}-u)\dots(t_{j+k-1}-u) \\ g_{j,k-m+1}(t_i) &= (t_{j+1}-t_i)\dots(t_{j+k-m}-t_i) \end{aligned}$$

gilt $\forall 0 \le r \le k-m-1:$

$$g_{i-k+m+r,k-m+1}(t_i) = (t_{i-k+m+r+1}-t_i)\dots(t_{i+r}-t_i)$$

und für $0 \le r \le k-m-1$ wird einer der Faktoren Null

$$g_{i-k+m,k-m+1}(t_i) = \dots = g_{i-1,k-m+1}(t_i) = 0$$

Damit ändert sich die Summe nicht, wenn man sie erst bei $i$ beginnen läßt.

$$\sum_{j\ge i-k+m-1} g_{j,k-m+1}(t_i)B_{j,k-m+1}(t) = \sum_{j\ge i} g_{j,k-m+1}(t_i)B_{j,k-m+1}(t)$$

**3.) Sei** $t = t_i$**.** Mit 2.), da beide Seiten rechtsstetig sind. ■

**Satz 22.3**

$$\begin{aligned} & SP_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}} \\ = \; & \left\{p \in Lin\left(P_{k-1} \cup \{(t-t_j)^i 1_{[t_j,\infty)}(t)\}\right) : 0 \le i < k \right. \\ & \left. p \textit{ ist genau } k-\#t_j-1\textit{-mal stetig differenzierbar in } t_j\right\} \\ = \; & Lin\left(P_{k-1} \cup \{(t-t_j)^{k-m} 1_{[t_j,\infty)}(t) : 1 \le m \le \#t_j\right) \end{aligned}$$

**Beweis.** Sei $s$ rechtsstetig vom Grad $< k$ mit nur einem Knoten $t_j$, an dem s genau $k-\#t_j-1$-mal stetig differenzierbar ist.

$$s(t) = \underbrace{p(t)}_{\in P_{k-1}} + \sum_{m=0}^{k-1} c_m (t-t_j)^m 1_{[t_j,\infty)}(t)$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1_{[t_j,\infty)}(t) & \quad \text{ist nicht stetig} \\ (t-t_j)^m 1_{[t_j,\infty)}(t) & \quad \text{ist stetig für } m \ge 1 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & \text{s ist genau } k-\#t_j-1 \text{ mal stetig differenzierbar} \\ \iff \; & \forall 0 \le r \le k-\#t_j-1 : \left(\frac{d}{dt}\right)^r (t-t_j)^m \ne \text{ konstant} \ne 0 \\ \iff \; & c_m = 0 \text{ für } m \le k-\#t_j-1 \\ \iff \; & s(t) = p(t) + \sum_{m=1}^{\#t_j} c_m (t-t_j)^{k-m} 1_{[t_j,\infty)}(t) \end{aligned}$$

■

**Satz 22.4** *Die $B_{i,k}$ sind linear unabhängig und es gilt*

$$SP_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}} = S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}$$

**Beweis.** Sei $(a,b)$ beliebig. Wegen

$$\begin{array}{rcl} P_{k-1} & \subset & S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}} \\ (t-t_i)^{k-m}1_{[t_i,\infty)}(t) & \in & S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}} \end{array}$$

gilt

$$SP_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}} \subset S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}$$

Da $\dim P_{k-1} = k$ und da es für jedes $t_j$ genau $\#t_j$ Koeffizienten $c_m \neq 0$ gibt und da die Funktionen linear unabhängig sind, gilt

$$\dim SP_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}|_{(a,b)} := k + \sum_{a<t_j<b} \#t_j$$

Betrachte die B-Splines, die in (a,b) ungleich Null sind. Wegen

$$\text{Träger}(B_{jk}) \subset [t_j, t_{j+k})$$

gilt

$$\begin{array}{rl} & (a,b) \cap \text{Träger}(B_{jk}) \neq \emptyset \\ \Longleftrightarrow & a < t_j < b \text{ oder } t_j \leq a < t_{j+k} < b \end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}|_{(a,b)} & = & Lin\{B_{jk} : \text{Träger}(B_{jk}) \cap (a,b) \neq \emptyset\} \\ & = & Lin\left(\{B_{jk} : a < t_j < b\} \cup \{B_{jk} : t_j \leq a < t_{j+k} < b\}\right) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \dim S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}|_{(a,b)} & = & k + \sum_{a<t_j<b} \#t_j \\ & = & \dim SP_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}|_{(a,b)} \end{array}$$

Wegen

$$SP_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}|_{(a,b)} \quad \subset \quad S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}|_{(a,b)}$$

müssen die $B_{j,k}$ linear unabhängig sein.
Da (a,b) beliebig ist, gilt die Behauptung für $\mathbb{R}$. ■

**Bemerkung 22.5** *Durch die Vielfachheit der Nullstellen läßt sich die Glattheit des Splines verringern.*

**Satz 22.6** *Die Darstellung*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i B_{i,k}$$

*ist eindeutig.*

**Beweis.** Sei

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i B_{i,k} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i B_{i,k}$$

und $(a, b)$ beliebig und

$$J = \{j \in \mathbb{Z} : a < t_j < b \text{ oder } t_j \leq a < t_{j+k} < b\}$$

Da $(B_{i,k})_{i \in J}$ linear unabhängig ist, gilt

$$\sum_{i \in J} c_i B_{i,k} = \sum_{i \in J} d_i B_{i,k} \Rightarrow \forall i \in J : c_i = d_i$$

Da $(a, b)$ beliebig war, gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i B_{i,k} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i B_{i,k} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z} : c_i = d_i$$

■

# 23. Die Berechnung der Ableitung

**Satz 23.1** *Sei $s \in S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}$ und $\forall j : t_j < t_{j+k-1}$. Dann gilt für die intervallweise berechnete Ableitung von $s$*

$$s' \in S_{k-1}$$

**Beweis.** Wegen $t_j < t_{j+k-1}$ gilt

$$\forall j : \#t_j \leq k-1$$

und

$$s \in C^{\#t_j-k-1} \subset C^0$$

d.h. s ist in allen $t_j$ stetig und es treten neben Polynomen nur Terme

$$(t-t_j)^m 1_{[t_j,\infty)}(t) \text{ für } k > m \geq 1$$

auf. Damit treten in $s'$ neben Polynomen nur Terme

$$(t-t_j)^m 1_{[t_j,\infty)}(t) \text{ für } k-1 > m \geq 0$$

auf, d.h.

$$s \in S_{k-1,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}$$

Für $\#t_j = k-1$ hat $s'$ einen Sprung in $t_j$. ∎

**Satz 23.2** *Sei $t_j < t_{j+k-1}$ für alle $j$. Sei $s := \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{j,k} B_{jk} \in S_{k,(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}}$ ein Spline. Dann gilt für die Ableitung*

$$s' = \sum_j a_{j,k} B_{j,k-1}$$

*mit*

$$a_{j,k-1} = \frac{k-1}{t_{j+k-1}-t_j}(c_{jk} - c_{j-1,k})$$

**Beweis.** Zwischen den Stützstellen ist $s|_{(t_i,t_{i+1})} = p$ ein Polynom. Wegen

$$\begin{aligned}
(g_{j,k} - g_{j-1,k})(u) &= (t_{j+1}-u)\dots(t_{j+k-1}-u) - (t_j-u)\dots(t_{j+k-2}-u) \\
&= (t_{j+k-1}-u-t_j+u)\,(t_{j+1}-u)\dots(t_{j+k-2}-u) \\
&= (t_{j+k-1}-t_j) g_{j,k-1}(u) \\
&\in P_{k-2}(u)
\end{aligned}$$

und

$$c_{j,k}(p) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{jk}(u)}{(k-1)!} \left(\frac{d}{du}\right)^{k-i} p(u)$$

$$a_{j,k-1}(p') = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{j,k-1}(u)}{(k-2)!} \left(\frac{d}{du}\right)^{k-i} p(u)$$

gilt

$$\begin{aligned} & (c_{jk} - c_{j-1,k})(p) \\ = \quad & \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} (g_{j,k} - g_{j-1,k})(u)}{(k-1)!} \left(\frac{d}{du}\right)^{k-i} p(u) \\ \overset{\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} g_{j,k-1}(u) \equiv 0}{=} \quad & \frac{t_{j+k-1} - t_j}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left(-\frac{d}{du}\right)^{i-1} g_{j,k-1}(u)}{(k-2)!} \left(\frac{d}{du}\right)^{k-i} p(u) \\ = \quad & \frac{t_{j+k-1} - t_j}{k-1} a_{j,k-1}(p') \end{aligned}$$

■

**Satz 23.3** *Für $t_j < t_{j+k-1}$ gilt*

$$B'_{jk} = (k-1) \left( \frac{B_{j,k-1}}{t_{j+k-1} - t_j} - \frac{B_{j+1,k-1}}{t_{j+k} - t_{j+1}} \right)$$

**Beweis.** Mit $c_{j,k} = \delta_{jj_0}$ gilt

$$B_{j_0,k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{j,k} B_{jk}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} B'_{j_0,k} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} c'_{j,k} B_{j,k-1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (k-1) \frac{c_{j,k} - c_{j-1,k}}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1} \\ &= (k-1) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_{j,j_0}}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1} - (k-1) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_{j-1,j_0}}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1} \\ &= (k-1) \frac{B_{j_0,k}}{t_{j_0+k-1} - t_{j_0}} - (k-1) \frac{B_{j_0+1,k-1}}{t_{j_0+k-1} - t_{j_0}} \end{aligned}$$

■

# 24. Auswertung von Splines

**Satz 24.1** *Sei $t \in [t_i, t_{i+1})$ und*

$$\begin{aligned} a_j^{(0)} &:= a_j \text{ für } i-k+1 \leq j \leq i \\ a_j^{(q+1)} &:= a_{j-1}^{(q)}(1 - w_{j,k-q}) + a_j^{(q)} w_{j,k-q} \\ &\quad \text{für } i-k+q+2 \leq j \leq i \text{ und } 0 \leq q \leq k-2 \end{aligned}$$

*Dann gilt*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j B_{jk}(t) = a_i^{(k-1)}$$

**Beweis.** $\forall 2 \leq r \leq k$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j,r} B_{j,r} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j,r}(w_{j,r} B_{j,r-1}) + (1 - w_{j+1,r}) B_{j+1,r-1} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a_{j-1,r}(1 - w_{j,r}) + a_{j,r} w_{j,r}) B_{j,r-1} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j,r-1} B_{j,r-1} \end{aligned}$$

Im k-ten Schritt erhält man

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j B_{j,k} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j,1} B_{j,1} = a_{j,1}$$

Oder

$$\begin{aligned} & \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j B_{j,k} \\ = & \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a_{j-1}(1 - w_{jk}) + a_j w_{jk}) B_{j,k-1} \\ = & \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j^{(1)} B_{j,k-1} \\ = & \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a_{j-1}^{(1)}(1 - w_{jk-1}) + a_j^{(1)} w_{jk-1}) B_{j,k-2} \\ = & \ldots = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j^{(k-1)} B_{j,1} \end{aligned}$$

∎

Wegen

$$0 \leq w_{j,k-q}(t) \leq 1$$

ist die Berechnung numerisch stabil.

# 25. Anpassung mit B-Splines

Seien $t_0, \ldots, t_n$ fest und

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n-k} a_i B_{i,k}(t)$$

Zu $x_0 < \ldots < x_{n-k}$ seien die Werte $y_0, \ldots, y_{n-k}$ gegeben. Suche nun $a_i$ sodaß

$$\forall j = 0, \ldots, n-k: \; s(x_j) = y_j$$

Als lineares Gleichungssystem ist das

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s(x_0) \\ \vdots \\ s(x_{n-k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{0,k}(x_0) & \cdots & B_{n-k,k}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{0,k}(x_{n-k}) & \cdots & B_{n-k,k}(x_{n-k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Satz 25.1** *Das Problem ist eindeutig lösbar, wenn*

$$\forall i = 0, \ldots, n-k: \; t_i < x_i < t_{i+k}$$

**Beweis. a) k=1:** Für $t_i < x < t_{i+1} = t_{i+k}$ gilt

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=0}^{n-k} a_i B_{i,1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} a_i 1_{[t_i, t_{i+1})}(x) = a_i \end{aligned}$$

Setze deshalb

$$a_i := y_i \text{ für } i = 0, \ldots, n-k$$

**b) k=2, n=2:** Wegen $n - k = 0$ gibt es nur $x_0$ und es gilt

$$s(x) = \sum_{i=0}^{0} a_i B_{i,2}(x) = a_0 B_{0,2}(x)$$

Setze

$$a_0 := y_0$$

**n=3:** Wegen $n-k=1$ gibt es $x_0, x_1$ und es gilt

$$s(x)=\sum_{i=0}^{1} a_i B_{i,2}(x)=a_0 B_{0,2}(x)+a_1 B_{1,2}(x)$$

d.h.

$$\begin{aligned}
y_0 &= s(x_0)=a_0B_{0,2}(x_0)+a_1B_{1,2}(x_0)\\
y_1 &= s(x_1)=a_0B_{0,2}(x_1)+a_1B_{1,2}(x_1)\\
\binom{y_0}{y_1} &= \left(\begin{array}{cc} B_{0,2}(x_0) & B_{1,2}(x_0)\\ B_{0,2}(x_1) & B_{1,2}(x_1)\end{array}\right)\binom{a_0}{a_1}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
B_{0,2}(x) &= w_{02}B_{0,1}+(1-w_{1,2})B_{11}\\
&= \frac{x-t_0}{t_1-t_0}1_{(t_0,\infty)}(t_1)1_{[t_0,t_1)}(x)\\
&\quad+\left(1-\frac{x-t_1}{t_2-t_1}1_{(t_1,\infty)}(t_2)\right)1_{[t_1,t_2)}(x)\\
B_{1,2}(x) &= w_{12}B_{1,1}+(1-w_{2,2})B_{21}\\
&= \frac{x-t_1}{t_2-t_1}1_{(t_1,\infty)}(t_2)1_{[t_1,t_2)}(x)\\
&\quad+\left(1-\frac{x-t_2}{t_3-t_2}1_{(t_2,\infty)}(t_3)\right)1_{[t_2,t_3)}(x)
\end{aligned}$$

Für $x_0\in(t_0,t_1)$ gilt $t_0<x_0<t_1<x_1<t_3$ und somit

$$\begin{aligned}
B_{0,2}(x_0) &= \frac{x_0-t_0}{t_1-t_0}>0\\
B_{1,2}(x_0) &= 0\\
B_{1,2}(x_1) &> 0
\end{aligned}$$

d.h. die Matrix

$$\left(\begin{array}{cc} \underbrace{\frac{x-t_0}{t_1-t_0}}_{>0} & 0\\ B_{0,2}(x_1) & \underbrace{B_{1,2}(x_1)}_{>0}\end{array}\right)$$

ist umkehrbar und die Lösung eindeutig.
Für $x_0 \in [t_1, t_2), x_1 \in (t_1, t_2)$ gilt $t_0 \leq t_1 \leq x_0 < x_1 < t_2$ und somit

$$\begin{aligned}
B_{0,2}(x_0) &= 1 - \frac{x_0 - t_1}{t_2 - t_1} \\
B_{1,2}(x_0) &= \frac{x_0 - t_1}{t_2 - t_1} \\
B_{0,2}(x_1) &= 1 - \frac{x_1 - t_1}{t_2 - t_1} \\
B_{1,2}(x_1) &= \frac{x_1 - t_1}{t_2 - t_1}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} B_{0,2}(x_0) & B_{1,2}(x_0) \\ B_{0,2}(x_1) & B_{1,2}(x_1) \end{pmatrix} \\
= & \left(1 - \frac{x_0 - t_1}{t_2 - t_1}\right) \frac{x_1 - t_1}{t_2 - t_1} - \left(1 - \frac{x_1 - t_1}{t_2 - t_1}\right) \frac{x_0 - t_1}{t_2 - t_1} \\
= & \frac{x_1 - t_1 - (x_0 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x_1 - x_0}{t_2 - t_1} > 0
\end{aligned}$$

ist die Matrix umkehrbar und die Lösung somit eindeutig.
Für $x_0 \in [t_1, t_2), x_1 \in [t_2, t_3)$ gilt $t_0 \leq t_1 \leq x_0 < t_2 \leq x_1 < t_3$ und somit

$$\begin{aligned}
B_{0,2}(x_0) &= 1 - \frac{x_0 - t_1}{t_2 - t_1} > 0 \\
B_{1,2}(x_0) &= \frac{x_0 - t_1}{t_2 - t_1} \\
B_{0,2}(x_1) &= 0 \\
B_{1,2}(x_1) &= 1 - \frac{x_1 - t_2}{t_3 - t_2}
\end{aligned}$$

Damit ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \underbrace{B_{0,2}(x_0)}_{>0} & B_{1,2}(x_0) \\ 0 & \underbrace{B_{1,2}(x_1)}_{>0} \end{pmatrix}$$

umkehrbar und die Lösung eindeutig.
**k=2, n→ n+1** Wegen $t_j < x_j < t_{j+2}$ und

$$\begin{aligned}
\{x : B_{j-1,2}(x) \neq 0\} &\subset [t_{j-1}, t_{j+1}) \\
\{x : B_{j,2}(x) \neq 0\} &\subset [t_j, t_{j+2}) \\
\{x : B_{j+1,2}(x) \neq 0\} &\subset [t_{j+1}, t_{j+3})
\end{aligned}$$

hat B die Form

$$\begin{pmatrix} B_{0,2}(x_0) & B_{1,2}(x_0) & 0 & & \\ B_{0,2}(x_1) & B_{1,2}(x_1) & B_{2,2}(x_1) & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & B_{n-k-1,2}(x_{n-k-1}) & B_{n-k,2}(x_{n-k-1}) \\ 0 & & & B_{n-k-1,2}(x_{n-k}) & B_{n-k,2}(x_{n-k}) \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \text{Für } x_j \geq t_{j+1}: &\ B_{j-1,2}(x_j) = 0 \\ \text{Für } x_j < t_{j+1}: &\ B_{j+1,2}(x_j) = 0 \end{aligned}$$

sind nur 2 Elemente in jeder Zeile ungleich Null und bei Berechnung der Determinante zerfällt die Matrix.
Man erhält das Produkt von zwei kleineren Determinanten.
Nach Voraussetzung für n ist das Problem für diese eindeutig lösbar.
**k→ k+1, n=k:** Es gibt nur $x_0$.

$$y_0 = s(x_0) = \sum_{i=0}^{0} a_i B_{i,k}(x_0) = a_0 \underbrace{B_{0,k}(x_0)}_{\neq 0}$$

Setze deshalb

$$a_0 := \frac{y_0}{B_{0,k}(x_0)}$$

**n→ n+1: 1. Fall** Sei $B_{j+1,k}(x_j) = 0$.
Dann sind auch alle Elemente rechts und oberhalb davon gleich Null: Wegen

$$\begin{aligned} \text{Träger}(B_{j+1,k}) &\subset [t_{j+1}, t_{j+1+k}) \\ t_j < x_j &< t_{j+k} \end{aligned}$$

gilt

$$x_j \in (t_j, t_{j+1}]$$

und

$$\begin{aligned} \text{Träger}(B_{j+1,k}) &\subset [t_{j+1}, t_{j+k-1}) \\ B_{j+1,k}(x_{j-r}) = 0 & \quad \text{, da } x_{j-r} < x_j \text{ für } r > 0 \\ B_{j+r,k}(x_j) = 0 & \quad \text{, da Träger}(B_{j+r,k}) \subset [t_{j+r}, t_{j+r+k}) \text{ für } r > 0 \end{aligned}$$

**2. Fall:** Sei $B_{j-1,k}(x_j) = 0$. Dann sind auch alle Elemente links und unterhalb davon gleich Null:Da

$$\begin{aligned} \text{Träger}(B_{j-1,k}) &\subset [t_{j-1}, t_{j-1+k}) \\ t_j < x_j &< t_{j+k} \end{aligned}$$

gilt

$$x_j \in (t_{j-k+1}, t_{j+k}]$$

und

$$\begin{aligned} B_{j-1,k}(x_{j+r}) = 0 & \quad \text{, da } x_{j+r} > x_j \text{ für } r > 0 \\ B_{j-r,k}(x_j) = 0 & \quad \text{, da Träger}(B_{j-r,k}) \subset [t_{j-r}, t_{j-r+k}) \end{aligned}$$

In beiden Fällen zerfällt die Matrix bei Berechnung der Determinante.
Man erhält das Produkt von zwei kleineren Determinanten.
Nach Voraussetzung für n ist das Problem für diese eindeutig lösbar.
**3. Fall:** Sei

$$\forall j = 0, \ldots, n-k: \; t_{j+1} < x_j < t_{j+k-1}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \forall j : \#t_j & \leq k-2 \\ s \in C^{k-\#t_j-1} & \subset C^1 \end{aligned}$$

Zeige: B ist eins zu eins und deshalb umkehrbar. Sei

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq i \leq n-k: \sum_{j=0}^{n-k} a_j B_{j,k}(x_i) &= 0 \\ \begin{pmatrix} B_{0,k}(x_0) & \cdots & B_{n-k,k}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{0,k}(x_{n-k}) & \cdots & B_{n-k,k}(x_{n-k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Da $s \in C^1$ ist es links- und rechtsstetig in $t_0, t_n$ und hat somit die $n-k+3$ Nullstellen

$$t_0, t_n, x_0, \ldots, x_{n-k}$$

Zu den $n-k+3$ Nullstellen von $s$ gibt es $n-k+2$ Nullstellen von $s'$

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} & \in (t_0, x_1) \\ x_j^{(1)} & \in (x_{j-1}, x_j) \\ x_{n-k+1}^{(1)} & \in (x_{n-k}, t_n) \end{aligned}$$

Wegen $t_{j+1} < x_j < t_{j+k-1}$ gilt

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} \in (t_0, t_{k-1}) & \subset \text{Träger}(B_{0,k-1}) \\ x_j^{(1)} \in (t_j, t_{j+k-1}) & \subset \text{Träger}(B_{j,k-1}) \\ x_{n-k+1}^{(1)} \in (t_{n-k+1}, t_n) & \subset \text{Träger}(B_{n-k+1,k-1}) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung für den Fall $k-1$ löst $s'$ das Problem eindeutig zu den Werten

$$y_0 = \ldots = y_{n-k+1} = 0$$

d.h.

$$\begin{aligned} s' &= 0 \\ s &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

■

# Teil II. Wahrscheinlichkeitstheorie auf abzählbaren Räumen

## 26. Zufallsexperimente

**Definition 26.1** *a) Sei $W \neq \emptyset$ abzählbar und*

$$p : W \to [0,1], w \mapsto p(w)$$

*mit*

$$\sum_{w \in W} p(w) = 1$$

*Dann heißt $(W, p)$* ***Zufallsexperiment.***
*b) Die Mengen $(A_i)_{i \in I}$ in $W$ heißen* ***schnittleer*** $\iff$

$$\forall i, j \in I : \;\; A_i \cap A_j = \emptyset$$

*c) Sind die $A_i$ schnittleer, so führen wir eine neue Schreibweise für die abzählbare Vereinigung ein*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

**Beispiel 26.2** *1.) Die* ***Gleichverteilung*** *auf $W = \{1, \dots, n\}$ entspricht dem Werfen eine Würfels. Sie gibt jedem Punkt dieselbe Wahrscheinlichkeit.*

$$p : \{1, \dots, n\} \to [0,1], w \mapsto \frac{1}{n}$$

*2.) $B(1, q)$ für $q \in [0,1]$ entspricht einem Münzwurf mit verbogener Münze. Mit Wahrscheinlichkeit q fällt Kopf mit Wahrscheinlichkeit 1-q fällt Zahl.*

$$p : \{0,1\} \to [0,1], w \mapsto \begin{cases} q & \text{für } w = 1 \\ 1-q & \text{für } w = 0 \end{cases}$$

*3.) $B(n, q)$ für $q \in [0,1]$ sagt beim n-maligen unabhängigen Werfen einer verbogenen Münze, mit welcher Häufigkeit i-mal Kopf fällt.*

$$p : \{0, 1, \dots, n\} \to [0,1], i \mapsto \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$$

*4.) Die **geometrische Verteilung** entspricht dem Warten auf einen Erfolg bei unabhängigen Münzwürfen: i-1 mal fällt Zahl und beim i-ten Mal Kopf.*

$$p : \mathbb{N} \to [0,1], i \mapsto (1-q)^{i-1}q$$

*5.) Die **Poissonverteilung** für $a > 0$ beschreibt Warteschlangen*

$$p : \mathbb{N}_0 \to [0,1], i \mapsto \frac{a^i}{i!}e^{-a}$$

*6.) Sei $W$ abzählbar und $a \in W$. Die **Einpunktverteilung** gibt dem Punkt $a$ die ganze Wahrscheinlichkeit*

$$\delta_a : W \to [0,1], w \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } a = w \\ 0 & \text{für } a \neq w \end{cases}$$

**Beweis.** Alle obigen Mengen sind abzählbar.

1.) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

2.) $$\sum_{i=0}^{1} p(w) = q + (1-q) = 1$$

3.) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} = (q + (1-q))^n = 1$$

4.) $$\sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^{i-1}q = q\sum_{i=0}^{\infty}(1-q)^i = q\frac{1}{1-(1-q)} = 1$$

5.) $$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^i}{i!} = e^{-a}e^{a} = 1$$

6.) $$\underbrace{p(a)}_{=1} + \sum_{w \in W \setminus a} \underbrace{p(w)}_{=0} = 1$$

■

Wir wollen schon jetzt Maße einführen, mit denen wir später nur noch rechnen werden.

**Definition 26.3** *a) Sei*

$$Pot(W) = \{A : \ A \subset W\}$$

*die Menge der Teilmengen von W, z.B.*

$$Pot(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

*b) Sei $W \neq \emptyset$ abzählbar.*

$$P : Pot(W) \to [0,1], A \mapsto P[A]$$

*heißt* ***Wahrscheinlichkeitsmaß*** $\iff$

$$\begin{array}{ll} 1.) & P[\emptyset] = 0 \\ 2.) & P\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] \\ 3.) & P[W] = 1 \end{array}$$

Man kann bei Zufallsexperimenten auf abzählbarem W gleichwertig mit Wahrscheinlichkeitsmaßen P oder Einzelwahrscheinlichkeiten p rechnen. Das ist bei Maßen mit Dichten später nicht mehr der Fall.

**Satz 26.4** *a) Ist $(W, p)$ ein Zufallsexperiment, so ist*

$$P : Pot(W) \to [0,1], A \mapsto \sum_{w \in A} p(w)$$

*ein Wahrscheinlichkeitsmaß.*
*b) Sei W abzählbar und $P : Pot(W) \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann existiert genau ein Zufallsexperiment $(W, p)$ sodaß P das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß ist.*

**Beweis. a)** 1.) Da kein w in der leeren Menge ist, gilt

$$P[\emptyset] = \sum_{w \in \emptyset} p(w) = 0$$

2.) Da alle Einträge unter der Summe positiv sind, ist die Summationsreihenfolge egal

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right] &\overset{Def}{=} \sum_{w \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n} p(w) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w \in A_n} p(w) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] \end{aligned}$$

3.) $P[W] = \sum_{w \in W} p(w) = 1$
**b)** Wegen

$$P[\{w\}] = \sum_{w \in \{w\}} p(w) = p(w)$$

muss

$$p : W \to [0,1], w \mapsto P[\{w\}]$$

gewählt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
p(w) &\overset{Def}{=} P[\{w\}] \overset{Vor}{\in} [0,1] \\
\sum_{w \in W} p(w) &\overset{Def}{=} \sum_{w \in W} P[\{w\}] \\
&\overset{\text{W abzählbar}}{=} P\left[\sum_{w \in W} \{w\}\right] \\
&= P[W] = 1
\end{aligned}$$

■

Die Gleichverteilung scheint natürlich. Aber auf $\mathbb{N}$ kann es sie nicht geben:

**Satz 26.5** *Auf einem abzählbar unendlichen $W$ gibt es keine Gleichverteilung.*

**Beweis.** Für alle $w \in W$ soll gelten: $p(w) = a$.
Für $a > 0$ gilt

$$P[W] = \sum_{w \in W} p(w) = \sum_{w \in W} a = \infty$$

im Widerspruch zu $P[W] = 1$.
Für $a = 0$ gilt

$$P[W] = \sum_{w \in W} p(w) = \sum_{w \in W} 0 = 0$$

im Widerspruch zu $P[W] = 1$. ■

## Beschreibung von Ereignissen

**Beispiel 26.6** *Bei einem Würfelwurf erscheint mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ eine 5 oder eine 6.*

$$\begin{aligned}
W &= \{1, \ldots, 6\} \\
\forall 1 \leq i \leq 6 : \ p(i) &= \frac{1}{6} \\
A &= \{5, 6\} \\
P[A] &= \sum_{w \in A} p(w) = p(5) + p(6) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**Satz 26.7** *Seien $A, B, A_n \subset W$ für $n \in \mathbb{N}$ mögliche Ereignisse. Man möchte nun beschreiben:*

| | | |
|---|---|---|
| 1.) | *A tritt nicht ein:* | $w \in A^C$ |
| 2.) | *Tritt A ein so tritt B ein:* | $A \subset B$ |
| 3.) | *(mindestens) eines der Ereignisse $A_n$ tritt ein:* | $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ |
| 4.) | *genau eines der Ereignisse $A_n$ tritt ein:* | $w \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ |
| 5.) | *alle Ereignisse $A_n$ treten ein:* | $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ |
| 6.) | *unendlich viele Ereignisse treten ein:* | $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ |
| 7.) | *fast alle Ereignisse treten ein:* | $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$ |

**Beweis.** 1.) Wegen $w \in W$ gilt: Aus $w \notin A$ folgt $w \in A^C$.
2.) (Aus $w \in A$ folgt $w \in B$) $\iff A \subset B$
3.)

$$\begin{aligned}
& \text{mindestens ein Ereignis tritt ein} \\
\iff & \text{es gibt ein } A_n \text{, das eintritt} \\
\iff & \text{es gibt ein } A_n \text{, sodaß } w \in A_n \\
\iff & w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

4.)

$$\begin{aligned}
& \text{genau ein Ereignis } A_n \text{ tritt ein} \\
\iff & \text{es gibt genau ein } A_n \text{, sodaß } w \in A_n \\
\iff & w \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

5.)

$$\begin{aligned}
& \text{alle Ereignisse treten ein} \\
\iff & \text{für alle n gilt: } w \in A_n \\
\iff & w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

6.)

$$\begin{aligned}
& \text{unendlich viele Ereignisse treten ein} \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{egal wie groß m ist, gibt es ein } n \geq m \text{ sodaß } A_n \text{ eintritt} \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{für alle m gilt: es gibt ein } n \geq m \text{ mit } w \in A_n \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{für alle m gilt: } w \in \bigcup_{n \geq m} A_n \\
\Longleftrightarrow\quad & \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} A_n
\end{aligned}$$

7.)

$$\begin{aligned}
& \text{fast alle Ereignisse treten ein} \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{es gibt ein m, sodaß alle } A_n \text{ mit } n \geq m \text{ eintreten} \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{es gibt ein m, sodaß für alle } n \geq m \text{ gilt } w \in A_n \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{es gibt ein m, sodaß: } w \in \bigcap_{n \geq m} A_n \\
\Longleftrightarrow\quad & w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} A_n
\end{aligned}$$

■

## Rechenregeln für Ereignisse

**Bemerkung 26.8** *Sei $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann gilt*
*a)* $P[A + B] = P[A] + P[B]$
*b)* $P[A^C] = 1 - P[A]$
*c) Aus $A \subset B$ folgt $P[A] \leq P[B]$*
*d)*

$$P\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right] \leq \sum_{j=1}^{\infty} P[A_j]$$

**Beweis. a)** Mit

$$\begin{aligned}
A_1 &= A \\
A_2 &= B \\
A_n &= \emptyset \text{ für } n \geq 3
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] \\ &= P[A] + P[B] + \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{P[\emptyset]}_{=0} \\ &= P[A] + P[B] \end{aligned}$$

**b)** folgt aus

$$P[A] + P[A^C] = P[A + A^C] = P[W] = 1$$

**c)**

$$\begin{aligned} P[B] &= P[A + B \cap A^C] \\ &= P[A] + P[B \cap A^C] \\ &\geq P[A] \end{aligned}$$

**d)**

$$\begin{aligned} P\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right] &= P\left[A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \cap A_{j-1}^C \cap \ldots \cap A_1^C\right] \\ &= P[A_1] + \sum_{j=2}^{\infty} P\left[A_j \cap A_{j-1}^C \cap \ldots \cap A_1^C\right] \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} P[A_j] \end{aligned}$$

■

# 27. Unabhängigkeit

**Definition 27.1** *Sei $I$ eine beliebige Indexmenge und $A_i \subset W$ für $i \in I$.*
*a) Die $A_i$ heißen* ***paarweise unabhängig unter P*** $\iff$

$$\forall i, j \in I: \quad P[A_i \cap A_j] = P[A_i]P[A_j]$$

*b) Die $A_i$ heißen* ***unabhängig unter P*** $\iff$

$$\forall J \subset I, |J| < \infty: \ P\left[\bigcap_{i \in J} A_i\right] = \prod_{i \in J} P[A_i]$$

**Satz 27.2** *Seien $(A_i)_{i \in I}$ unabhängig und $J \subset I$.*
*Dann ist $(A_i)_{i \in J}$ unabhängig.*

**Beweis.** Sei $K \subset J$ endlich. Da $(A_i)_{i \in I}$ unabhängig sind und $K \subset I$, gilt

$$P\left[\bigcap_{i \in K} A_i\right] = \prod_{i \in K} P[A_i]$$

und $(A_i)_{i \in J}$ ist unabhängig. ∎

**Satz 27.3** *$(A_i)_{i \in I}$ sind unabhängig* $\iff$
*für alle endlichen schnittleeren Teilmengen $J, K \subset I$ gilt:*

$$P\left[\bigcap_{j \in J} A_j^C \cap \bigcap_{k \in K} A_k\right] = \prod_{j \in J} P[A_j^C] \prod_{k \in K} P[A_k]$$

*wobei wir setzen*

$$\begin{aligned} \bigcap_{j \in \emptyset} A_j &= W \\ \prod_{j \in \emptyset} P[A_j] &= 1 \end{aligned}$$

**Beweis.** "$\Leftarrow$": Setze $J = \emptyset$.
"$\Rightarrow$": Induktion nach $|J|$. Für $|J| = 0$ gilt

$$P\left[\bigcap_{k \in K} A_k\right] = \prod_{k \in K} P[A_k]$$

$n \to n+1:$

$$
\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{j\in J} A_j^C \cap \bigcap_{k\in K} A_k\right] \\
= \quad & P\left[\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} A_j^C \cap \bigcap_{k\in K} A_k \cap A_{j_0}^C\right] \\
\overset{P[A\cap B]=P[A]-P[A\cap B^C]}{=} \quad & P\left[\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} A_j^C \cap \bigcap_{k\in K} A_k\right] \\
& -P\left[\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} A_j^C \cap \bigcap_{k\in K\cup\{j_0\}} A_k\right] \\
\overset{|J\setminus\{j_0\}|=n}{=} \quad & \prod_{j\in J\setminus\{j_0\}} P\left[A_j^C\right] \prod_{k\in K} P[A_k] \\
& -P[A_{j_0}] \prod_{j\in J\setminus\{j_0\}} P[A_j^C] \prod_{k\in K} P[A_k] \\
\overset{1-P[A_{j_0}]=P[A_{j_0}^C]}{=} \quad & P[A_{j_0}^C] \prod_{j\in J\setminus j_0} P[A_j^C] \prod_{k\in K} P[A_k]
\end{aligned}
$$

■

**Satz 27.4** *Die Unabhängigkeit hängt vom Wahrscheinlichkeitsmaß P ab.*

**Beweis.** Sei $W=\{1,2\}$ und

$$
\begin{aligned}
\forall 1\le i\le 2:\ P[i] &= \frac{1}{2} \\
Q[1] &= 1 \\
Q[2] &= 0
\end{aligned}
$$

Für $A=\{1\}$ und $B=\{1,2\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
P[A\cap B] &= P[A]=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P[A]\cdot P[B] \\
Q[A\cap B] &= Q[A]=1=Q[A]\cdot Q[B]
\end{aligned}
$$

Unter Q sind A, B unabhängig.
Unter P sind A,B abhängig. ■

**Bemerkung 27.5** *a) Für die Unabhängigkeit von $A_1,\ldots,A_n$ reicht es nicht*

$$P[A_1\cap\ldots\cap A_n]=\prod_{i=1}^n P[A_i]$$

*zu fordern.*
*b) Es reicht nicht, paarweise unabhängig zu fordern.*
*c) A ist stets unabhängig, aber A,A nicht notwendig.*
*Unabhängigkeit ist also keine Eigenschaft von Mengen von Ereignissen, denn*

$$\{A\} = \{A, A\}$$

**Beweis. a)** Für

$$\begin{aligned} W &= \{1, 2\} \\ A_1 &= \{1\} \\ A_2 &= \{2\} \\ A_3 &= \emptyset \\ p(1) &= p(2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

gilt

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[\emptyset] = 0 = P[A_1]P[A_2]P[A_3]$$

aber

$$P[A_1 \cap A_2] = P[\emptyset] = 0 \neq \frac{1}{4} = P[A_1]P[A_2]$$

**b)** Für

$$\begin{aligned} W &= \{1, 2, 3, 4\} \\ A_1 &= \{1, 2\} \\ A_2 &= \{2, 3\} \\ A_3 &= \{3, 1\} \\ p(i) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} P[A_1 \cap A_2] &= P[2] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P[A_1] \cdot P[A_2] \\ P[A_1 \cap A_3] &= P[1] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P[A_1] \cdot P[A_3] \\ P[A_2 \cap A_3] &= P[3] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P[A_2] \cdot P[A_3] \end{aligned}$$

aber

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[\emptyset] = 0 \neq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = P[A_1]P[A_2]P[A_3]$$

**c)**

$$\begin{aligned} \text{A,A ist unabhängig} \quad &\iff \quad P[A \cap A] = P[A]P[A] \\ &\iff \quad P[A] = P[A]^2 \\ &\iff \quad P[A] \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

und das ist nicht für jedes Ereignis A erfüllt. ■

# 28. Der Produktraum

Der Produktraum beschreibt das unabhängige Ausführen von n Zufallsexperimenten.

**Satz 28.1** *Seien $W_i$ abzählbar und $(W_1, p_1), \ldots, (W_n, p_n)$ Zufallsexperimente. Durch*

$$W = W_1 \times \ldots \times W_n$$

*und*

$$p : W_1 \times \ldots \times W_n \to [0,1], (w_1, \ldots, w_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} p_i(w_i)$$

*erhält man ein Zufallsexperiment (W,p) und W ist abzählbar.*

**Beweis.** Da $W_1, \ldots, W_n$ abzählbar sind, ist $W_1 \times \ldots \times W_n$ abzählbar. Wegen $p(w_i) \in [0,1]$ gilt

$$p(w) = p_1(w_1) \cdot \ldots \cdot p_n(w_n) \in [0,1]$$

Da alle $p(w) \geq 0$ ist die Reihenfolge der Summierung egal und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} p(w) &= \sum_{w_1 \in W_1} \ldots \sum_{w_n \in W_n} p_1(w_1) \ldots p_n(w_n) \\ &= \underbrace{\sum_{w_1 \in W_1} p_1(w_1)}_{=1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\sum_{w_n \in W_n} p_n(w_n)}_{=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Um die Unabhängigkeit zu testen, müssen die Zufallsexperimente $(W_i, p_i)$ im selben Wahrscheinlichkeitsraum leben.
Dazu transportieren wir $(W_i, p_i)$ als $(W^i, p^i)$ nach $(W, p)$.

**Satz 28.2** *Seien $P_i$ die eindeutigen Maße zu den $p_i$. Für*

$$A^i := W_1 \times \ldots \times W_{i-1} \times A_i \times W_{i+1} \times \ldots \times W_n$$

*gilt*

$$\begin{aligned} (A^i)^C &= W_1 \times \ldots \times W_{i-1} \times A_i^C \times W_{i+1} \times \ldots \times W_n \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^i &= W_1 \times \ldots \times W_{i-1} \times \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,i} \times W_{i+1} \times \ldots \times W_n \end{aligned}$$

*und*

$$P[A^i] = P_i[A_i]$$

**Beweis.** Wegen

$$
\begin{aligned}
w \in (A^i)^C &\iff w_i \notin A_i \\
&\iff w_i \in A_i^C \\
&\iff W_1 \times \ldots \times W_{i-1} \times A_i^C \times W_{i+1} \times \ldots \times W_n
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& w \in \sum_{k=1}^{\infty} A_k^i \\
\iff & \exists! k : w \in A_k^i \\
\iff & \exists! k : w_i \in A_{k,i} \\
\iff & w \in W_1 \times \ldots \times W_{i-1} \times \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,i} \times W_{i+1} \times \ldots \times W_n
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
P[A^i] &\overset{Def}{=} \sum_{(w_1,\ldots,w_n)\in W_1\times\ldots\times A_i\times\ldots\times W_n} p_1(w_1)\ldots p_n(w_n) \\
&= \sum_{w_1\in W_1} p_1(w_1)\ldots \sum_{w_i\in A_i} p_i(w_i)\ldots \sum_{w_n\in W_n} p_n(w_n) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{w_1\in W_1} p_1(w_1)\right)}_{=1}\ldots\left(\sum_{w_i\in A_i} p_i(w_i)\right)\ldots\underbrace{\left(\sum_{w_n\in W_n} p_n(w_n)\right)}_{=1} \\
&= \sum_{w_i\in A_i} p_i(w_i) = P_i[A_i]
\end{aligned}
$$

■

Das Zufallsexperiment $(W_i, p_i)$ lebt nun in W an der i-ten Stelle. Jetzt müssen wir nur noch die Unabhängigkeit zeigen.

**Satz 28.3** *Seien $A_i \subset W_i$ mit $1 \leq i \leq n$.*
*Dann sind $A^1, \ldots, A^n \subset W$ unabhängig bezüglich $P$.*

**Beweis.** Wegen

$$
\begin{aligned}
w \in \bigcap_{i=1}^{n} A^i &\iff w \in A_1 \times \ldots \times A_n \\
&\iff \forall 1 \leq i \leq n : w_i \in A_i
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{i=1}^{n} A^i\right] &= \sum_{w\in A^1\cap\ldots\cap A^n} p_1(w_1)\ldots p_n(w_n) \\
&= \sum_{(w_1,\ldots,w_n)\in A_1\times\ldots\times A_n} p_1(w_1)\ldots p_n(w_n) \\
&= \sum_{w_1\in A_1}\ldots\sum_{w_n\in A_n} p_1(w_1)\ldots p_n(w_n) \\
&= \left(\sum_{w_1\in A_1} p_1(w_1)\right)\ldots\left(\sum_{w_n\in A_n} p_n(w_n)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P_i[A_i] = \prod_{i=1}^{n} P[A^i]
\end{aligned}
$$

Da das für beliebige $A^i$ gilt, gilt es auch für die Komplemente. Somit sind $A^1, \ldots, A^n$ unabhängig. ■

# 29. $X : (W, P) \to \mathbb{R}$

**Definition 29.1** *Für $X, Y : (W, P) \to V$ setze*

$$\begin{aligned}\{X = v\} &:= X^{-1}(v) := \{w \in W : X(w) = v\} \\ \{X \in A\} &:= X^{-1}(A) := \{w \in W : X(w) \in A\} \\ P[X \in A] &:= P[\{w \in W : X(w) \in A\}] \\ P[X \in A, Y \in B] &:= P[\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}]\end{aligned}$$

*Für $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ setze*

$$\{X \leq z\} := \{w \in W : X(w) \leq z\}$$

Die Abbildung $X^{-1}$ hat sehr praktische Eigenschaften:

**Definition 29.2** *Sei $X : W \to V$. Für*

$$X^{-1} : Pot(V) \to Pot(W), A \mapsto X^{-1}(A)$$

*gilt*

1) $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2) $X^{-1}(V) = W$
3) $X^{-1}(B^C) = (X^{-1}(B))^C$
4) $X^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(B_i)$
5) $X^{-1}(\sum_{i \in I} B_i) = \sum_{i \in I} X^{-1}(B_i)$
6) $X^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} X^{-1}(B_i)$
7) *Aus $B_1 \subset B_2$ folgt $X^{-1}(B_1) \subset X^{-1}(B_2)$*

**Beweis.**

1) Wegen $X : W \to V$ ist
$$X(w) \in \emptyset$$
für kein $w \in W$ erfüllt. Somit gilt
$$X^{-1}(\emptyset) = \{w \in W : X(w) \in \emptyset\} = \emptyset$$

2) Da $X : W \to V$ gilt:
$$\forall w \in W : \; X(w) \in V$$
und somit
$$X^{-1}(V) = \{w \in W : X(w) \in V\} = W$$

3)

$$\begin{array}{rcl} w \in X^{-1}(B^C) & \overset{Def}{\Longleftrightarrow} & X(w) \in B^C \\ & \overset{B+B^C=V}{\Longleftrightarrow} & X(w) \notin B \\ & \overset{X(w)\in B \Longleftrightarrow w\in X^{-1}(B)}{\Longleftrightarrow} & w \notin X^{-1}(B) \\ & \overset{X^{-1}(B)+X^{-1}(B)^C=W}{\Longleftrightarrow} & w \in (X^{-1}(B))^C \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{rcl} w \in X^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) & \overset{Def}{\Longleftrightarrow} & X(w) \in \bigcup_{i\in I} B_i \iff \exists i:\ X(w) \in B_i \\ & \overset{Def}{\Longleftrightarrow} & \exists i:\ w \in X^{-1}(B_i) \iff w \in \bigcup_{i\in I} X^{-1}(B_i) \end{array}$$

5) wie 4) mit $\exists!$ statt $\exists$

6) wie 4) mit $\forall$ statt $\exists$

7)

$$\begin{array}{rcl} w \in X^{-1}(B_1) & \overset{Def}{\Rightarrow} & X(w) \in B_1 \subset B_2 \\ & \overset{Def}{\Rightarrow} & w \in X^{-1}(B_2) \end{array}$$

■

**Satz 29.3** *Jede Verarbeitung der Daten $X : (W,P) \to V$ erzeugt durch*

$$P[X^{-1}(\cdot)] : Pot(V) \to [0,1], A \mapsto P[X^{-1}(A)]$$

*ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf V.*

**Beweis.**

$$\begin{array}{rcl} P[X^{-1}(A)] & \geq & 0 \\ P[X^{-1}(\emptyset)] & = & P[\emptyset] = 0 \\ P[X^{-1}(V)] & = & P[W] = 1 \\ P\left[X^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right] & = & P\left[\sum_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[X^{-1}(A_i)] \end{array}$$

■

**Beispiel 29.4** *Sei $P$ die Gleichverteilung auf $W = \{1, \ldots, 6\}$. Für*

$$X : (W, P) \to \{a, b, c, d\}, \quad \begin{array}{l} 1 \mapsto a \\ 2 \mapsto a \\ 3 \mapsto a \\ 4 \mapsto b \\ 5 \mapsto b \\ 6 \mapsto c \end{array}$$

*gilt*

$$\begin{aligned} P[X = a] &= \frac{1}{2} \\ P[X = b] &= \frac{1}{3} \\ P[X = c] &= \frac{1}{6} \\ P[X = d] &= 0 \end{aligned}$$

*und wir erhalten ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P[X^{-1}(\cdot)]$ auf $\{a, b, c, d\}$.*

**Satz 29.5** *Aus $P[X^{-1}(\cdot)] = P[Y^{-1}(\cdot)]$ kann man **nicht** auf $X = Y$ schließen.*

**Beweis.** Sei $W = \{a, b\}$ und $P[a] = P[b] = \frac{1}{2}$. Für

$$X : \{a, b\} \to \{-1, 1\}, \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto -1 \end{cases}$$

$$Y : \{a, b\} \to \{-1, 1\}, \begin{cases} a \mapsto -1 \\ b \mapsto 1 \end{cases}$$

gilt $X = -Y$ und somit $X \neq Y$. Wegen

$$\begin{aligned} P[X = 1] &= P[Y = 1] = \frac{1}{2} \\ P[X = -1] &= P[Y = -1] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

gilt $P[X^{-1}(\cdot)] = P[Y^{-1}(\cdot)]$ ■

**Definition 29.6** *Seien $i \in I$. $X_i : (W, P) \to V_i$ heißen **unabhängig** $\Longleftrightarrow$ Eine der gleichwertigen Bedingungen ist erfüllt:*

*1.) $\forall A_i \subset V_i$ sind $(\{X_i \in A_i\})_{i \in I}$ unabhängig*

*2.) $\forall J \subset I$ endlich $\forall A_i \subset V_i :$ $P\left[\bigcap_{i \in J}\{X_i \in A_i\}\right] = \prod_{i \in J} P[X_i \in A_i]$*

*3.)* $\forall z_i \in V_i$ *sind* $(\{X_i = z_i\})_{i\in I}$ *unabhängig*

*4.)* $\forall J \subset I$ *endlich* $\forall z_i \in V_i :\; P\left[\bigcap_{i\in J}\{X_i = z_i\}\right] = \prod_{i\in J} P[X_i = z_i]$

Da W abzählbar ist, kann man die Unabhängigkeit mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $P[X_i = z_i]$ überprüfen. Das geht bei Maßen mit Dichten nicht mehr.

**Beweis.** 1.) $\iff$ 2.): Definition.
3.) $\iff$ 4.): Definition.
2.) $\Rightarrow$ 4.): Wähle $A_i = \{z_i\}$.
4.) $\Rightarrow$ 2.): Wegen

$$\{X_i \in A_i\} = \sum_{z_i\in A_i} \{X_i = z_i\}$$

gilt für $J \subset I$ endlich

$$\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{i\in J}\{X_i \in A_i\}\right] \\
= \;& P\left[\bigcap_{i\in J}\sum_{z_i\in A_i}\{X_i = z_i\}\right] \\
= \;& \sum_{z_1\in A_1}\cdots\sum_{z_n\in A_n} P\left[\bigcap_{i\in J}\{X_i = z_i\}\right] \\
\overset{4.)}{=} \;& \sum_{z_1\in A_1}\cdots\sum_{z_n\in A_n}\prod_{i\in J} P[X_i = z_i] \\
= \;& \prod_{i\in J} P\left[\sum_{z_i\in A_i}\{X_i = z_i\}\right] \\
= \;& \prod_{i\in J} P[X_i \in A_i]
\end{aligned}$$

■

Das setzt voraus, dass der Raum W so etwas zuläßt. Mit dem Produktraum haben wir einen solchen Raum für endliche viele $(W_i, P_i)$ konstruiert, sodaß sich unabhängige $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ beschreiben lassen.
Unabhängige Daten bleiben bei der Verarbeitung unabhängig:

**Satz 29.7** *Seien* $X_i : (W, P) \to V_i$ *unabhängig und* $f_i : V_i \to U_i$ *beliebig. Dann sind* $f_i \circ X_i$ *unabhängig.*

$$\begin{array}{ccc}
(W,P) & \xrightarrow{f_i\circ X_i} & U_i \\
X_i \searrow & & \nearrow f_i \\
 & V_i &
\end{array}$$

**Beweis.** Seien $u_i \in U_i$ und $J \subset I$ endlich. Wegen

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{i\in J}\{f_i \circ X_i = u_i\}\right] &= P\left[\bigcap_{i\in J}\{X_i \in f^{-1}(u_i)\}\right] \\
&\overset{X_i \text{ unabhängig}}{=} \prod_{i\in J} P\left[\{X_i \in f^{-1}(u_i)\}\right] \\
&= \prod_{i\in J} P[f_i \circ X_i = u_i]
\end{aligned}$$

sind $(f_i \circ X_i)_{i\in I}$ unabhängig. ■

**Satz 29.8** *Seien $X_i : (W,P) \to V_i$ unabhängig und $I = \bigoplus_{k\in K} I_k$ mit $|I_k| < \infty$. Dann sind*

$$(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{I_k}}) : W \to V_{i_1} \times \ldots \times V_{I_k}$$

*unabhängig.*

**Beweis.** Für $K_1 \subset K$ endlich gilt

$$\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{k\in K_1} (X_{i_1}, \ldots, X_{i_{I_k}}) = v_k\right] \\
= \; & P\left[\bigcap_{k\in K_1}\bigcap_{j\in I_k} X_{i_j} = v_{k,i_j}\right] \\
\overset{(X_i)_i \text{unabhängig}}{=} \; & \prod_{k\in K_1}\prod_{j\in I_k} P\left[X_{i_j} = v_{k,i_j}\right] \\
= \; & \prod_{k\in K_1} P\left[(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{I_k}}) = v_k\right]
\end{aligned}$$

■

# 30. Faltung

**Satz 30.1** *Sind* $X, Y : (W, P) \to \mathbb{N}_0$ ***unabhängig****, so gilt*

$$P[X + Y = n] = \sum_{k=0}^{n} P[X = k]P[Y = n - k]$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} P[X + Y = n] &= P\left[\sum_{k=0}^{n} \{X = k\} \cap \{Y = n - k\}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} P[X = k, Y = n - k] \\ &\overset{\text{unabhängig}}{=} \sum_{k=0}^{n} P[X = k]P[Y = n - k] \end{aligned}$$

■

**Satz 30.2** *Seien* $X, Y$ *unabhängig und* $P[X^{-1}(\cdot)] = Poi(c)$, $P[Y^{-1}(\cdot)] = Poi(d)$. *Dann gilt*

$$P[(X + Y)^{-1}(\cdot)] = Poi(c + d)$$

**Beweis.** Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} P[X + Y = n] &= \sum_{k=0}^{n} P[X = k, Y = n - k] \\ &\overset{\text{unabhängig}}{=} \sum_{k=0}^{n} P[X = k]P[Y = n - k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \frac{d^{n-k}}{(n-k)!} e^{-c} e^{-d} \\ &= \frac{e^{-(c+d)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^k d^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(c+d)}}{n!} (c + d)^n \\ &= Poi(c + d)(n) \end{aligned}$$

■

$B(n, p)$ entspricht der Anzahl des Auftretens von Kopf bei n-maligem unabhängigen Werfen einer Münze.

**Satz 30.3** *a) Seien $X, Y$ unabhängig mit $P[X^{-1}(\cdot)] = B(n,p)$ und $P[Y^{-1}(\cdot)] = B(1,p)$. Dann ist*

$$P[(X+Y)^{-1}(\cdot)] = B(n+1,p)$$

*b) Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $P[X_i^{-1}(\cdot)] = B(1,p)$, so ist*

$$P\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1}(\cdot)\right] = B(n,p)$$

*c) Seien $X, Y$ unabhängig mit $P[X^{-1}(\cdot)] = B(n,p)$ und $P[Y^{-1}(\cdot)] = B(m,p)$. Dann gilt*

$$P[(X+Y)^{-1}(\cdot)] = B(n+m,p)$$

**Beweis. a)** Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}
& P[X+Y=k] \\
= \;& P[X=k-1, Y=1] + P[X=k, Y=0] \\
\overset{\text{unabhängig}}{=} \;& P[X=k-1] \cdot P[Y=1] + P[X=k] \cdot P[Y=0] \\
= \;& \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} p + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}(1-p) \\
= \;& \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
= \;& B(n+1,p)(k)
\end{aligned}$$

und für **k=0,n+1**

$$\begin{aligned}
P[X+Y=n+1] &= P[X=n, Y=1] \\
&\overset{\text{unabhängig}}{=} P[X=n] \cdot P[Y=1] \\
&= \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} p \\
&= \binom{n+1}{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+1-(n+1)} \\
&= B(n+1,p)(n+1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P[X+Y=0] &= P[X=0, Y=0] \\
&\overset{\text{unabhängig}}{=} P[X=0] \cdot P[Y=0] \\
&= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0}(1-p) \\
&= \binom{n+1}{0} p^0 (1-p)^{n+1} = B(n+1,p)(0)
\end{aligned}$$

**b)** n=2: Wegen a) gilt

$$P[(X_1 + X_2)^{-1}(\cdot)] = B(2, p)$$

$n \to n+1$: Nach Voraussetzung gilt $P[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{-1}(\cdot)] = B(n, p)$. Da $\sum_{i=1}^{n} X_i$ unabhängig ist von $X_{n+1}$, ist

$$P\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i\right)^{-1}(\cdot)\right] = B(n+1, p)$$

**c)** Wegen

$$\begin{aligned}
&P[X^{-1}(\cdot)] = P\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1}(\cdot)\right]\\
&P[Y^{-1}(\cdot)] = P\left[\left(\sum_{i=n+1}^{m+n} X_i\right)^{-1}(\cdot)\right]\\
&\text{X,Y sind unabhängig}\\
&\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=n+1}^{m+n} X_i \text{ sind unabhängig}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& P[X+Y=k]\\
\overset{\text{unabhängig}}{=}\; & \sum_{j=0}^{k} P[X=j]P[Y=k-j]\\
\overset{Vor}{=}\; & \sum_{j=0}^{k} P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = j\right] P\left[\sum_{i=n+1}^{m+n} X_i = k-j\right]\\
\overset{\text{unabhängig}}{=}\; & P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=n+1}^{m+n} X_i = k\right]\\
\overset{b)}{=}\; & B(n+m, p)(k)
\end{aligned}$$

■

# 31. Ein Grenzwertsatz

Für kleine p und große n läßt sich explizit angeben, wie genau man $B(n,p)$ durch $Poi(c)$ nähern kann. Man wählt dabei c so, daß die Erwartungswerte übereinstimmen:

$$c = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

**Satz 31.1** *Seien $X_1, \ldots, X_n : (W,P) \to \mathbb{R}$ unabhängig mit $P[X_i^{-1}(\cdot)] = B(1,p_i)$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right] - Poi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)[k]\right| \leq 2 \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

**Beweis.** Wir konstruieren einen Wahrscheinlichkeitsraum, sodaß sich $B(1,p_i)$ und $Poi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ möglichst wenig unterscheiden. Sei

$$W_i = \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

mit $P_i$ gemäß

| | $B(1,p_i)$ | $Poi(p_i)$ | $P_i$ |
|---|---|---|---|
| $k=-1$ | $0$ | $0$ | $\exp(-p_i) - 1 + p_i$ |
| $k=0$ | $1-p_i$ | $\exp(-p_i)$ | $1-p_i$ |
| $k=1$ | $p_i$ | $p_i \exp(-p_i)$ | $p_i \exp(-p_i)$ |
| $k \geq 2$ | $0$ | $\frac{1}{k!} p_i^k \exp(-p_i)$ | $\frac{1}{k!} p_i^k \exp(-p_i)$ |

Wegen

$$1 = \exp(-p_i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_i^k}{k!}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-1}^{\infty} P_i(k) &= (\exp(-p_i) - 1 + p_i) + (1 - p_i) + \exp(-p_i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_i^k}{k!} \\
&= \exp(-p_i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_i^k}{k!} = 1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\exp(x) &\geq 1 + x \\
\exp(-x) - 1 - (-x) &\geq 0 \\
P_i[-1] &= \exp(-p_i) - 1 + p_i \geq 0
\end{aligned}$$

Damit ist $(W_i, P_i)$ ein Zufallsexperiment. Wir betrachten den Produktraum $(W, P)$ mit

$$\begin{aligned} W &= W_1 \times \ldots \times W_n \\ P[(w_1, \ldots, w_n)] &= \prod_{i=1}^{n} P_i[w_i] \end{aligned}$$

Seien

$$\begin{aligned} X_i(w) &= 1_{\{-1\}+\mathbb{N}}(w_i) \\ Y_i(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot 1_k(w_i) \end{aligned}$$

Nach der Konstruktion des Produktraumes sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig. Wegen

$$\begin{aligned} P[X_i = 0] &= P_i[0] = 1 - p_i \\ P[X_i = 1] &= P_i[\{-1\} \cup \mathbb{N}] = p_i \end{aligned}$$

gilt $P[X_i^{-1}(\cdot)] = B(1, p_i)$. Sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Nach der Konstruktion des Produktraumes sind $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig. Wegen

$$\begin{aligned} P[Y_i = 0] &= P_i[\{-1, 0\}] = (\exp(-p_i) - 1 + p_i) + (1 - p_i) \\ &= \exp(-p_i) \\ \forall k \in \mathbb{N}: \; P[Y_i = k] &= P_i[k] = \frac{\exp(-p_i)}{k!} p_i^k \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} P[Y_i^{-1}(\cdot)] &= Poi(p_i) \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ P[Y^{-1}(\cdot)] &= Poi\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\right] \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} X_i(-1) &= 1 \neq 0 = Y_i(-1) \\ X_i(0) &= 0 = Y_i(0) \\ X_i(1) &= 1 = Y_i(1) \\ \forall k \geq 2: \; X_i(k) &= 1 \neq k = Y_i(k) \end{aligned}$$

und

$$1 - \exp(-p_i) \overset{\exp(x)\geq 1+x}{\leq} p_i$$

gilt

$$\begin{aligned}
P[X_i = Y_i] &= P[w_i \in \{0,1\}] \\
&= P_i(0) + P_i(1) \\
&= 1 - p_i + \exp(-p_i)p_i \\
P[X_i \neq Y_i] &= 1 - (1 - p_i + \exp(-p_i)p_i) \\
&= p_i(1 - \exp(-p_i)) \\
&\overset{\exp(-x)\geq 1-x}{\leq} p_i^2
\end{aligned}$$

Wegen

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(w) \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i(w)\right) \Rightarrow (\exists i: \ X_i(w) \neq Y_i(w))$$

gilt

$$\begin{aligned}
\{X \neq Y\} &\subset \bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \neq Y_i\} \\
P[X \neq Y] &\leq \sum_{i=1}^{n} P[X_i \neq Y_i] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \left| P[X=k] - Poi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)[k] \right| \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} |P[X=k] - P[Y=k]| \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} |P[X=k, Y=k] + P[X=k, Y\neq k] \\
& -P[Y=k, X=k] - P[Y=k, X\neq k]| \\
\overset{\Delta}{\leq} \; & \sum_{k=0}^{\infty} P[X=k, Y\neq k] + \sum_{k=0}^{\infty} P[X\neq k, Y=k] \\
= \; & 2P[X\neq Y] \\
\leq \; & 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2
\end{aligned}$$

■

**Bemerkung 31.2** *Das ist nur hilfreich, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 0$$

*Deshalb heißt die Poissonverteilung auch* ***Verteilung der seltenen Ereignisse.***

Genügend viele seltene unabhängige $B(1, p_n)$-verteilte Ereignisse ergeben in Summe die Poissonverteilung.

**Satz 31.3** *Für*

$$\lim_{n\to\infty} np_n = c > 0$$

*gilt*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |B(n,p_n)[k] - Poi(c)[k]| \;&\leq\; 2np_n^2 + |\exp(np_n) - \exp(c)| \\
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |B(n,p_n)[k] - Poi(c)[k]| \;&=\; 0
\end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen $\lim_{n\to\infty} np_n = c$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty} np_n = 0 \cdot c = 0\\ \lim_{n\to\infty} np_n^2 &= \left(\lim_{n\to\infty} np_n\right) \lim_{n\to\infty} p_n = c \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Da $x \mapsto x^k$ monoton ist, gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |Poi(np_n)[k] - Poi(c)[k]| &= \sum_{k=0}^{\infty} \pm \left(\frac{(np_n)^k}{k!} - \frac{c^k}{k!}\right)\\ &= \pm\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(np_n)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!}\right)\\ &= \pm(\exp(np_n) - \exp(c))\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty} |B(n,p_n)[k] - Poi(c)[k]|\\ \leq\ &\sum_{k=0}^{\infty} |B(n,p_n)[k] - Poi(np_n)[k]| + \sum_{k=0}^{\infty} |Poi(np_n)[k] - Poi(c)[k]|\\ \leq\ &2\sum_{i=1}^{n} p_n^2 + |\exp(np_n) - \exp(c)|\\ =\ &2np_n^2 + |\exp(np_n) - \exp(c)|\end{aligned}$$

Da exp stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |B(n,p_n)[k] - Poi(c)[k]|\\ &\leq \lim_{n\to\infty} 2np_n^2 + \lim_{n\to\infty} |\exp(np_n) - \exp(c)|\\ &= 0\end{aligned}$$

■

# 32. Erwartungswerte

Wenn man den Elementen aus W keine Zahl zuordnen kann, kann man nicht viel damit berechnen, z.B. bei

$$W = \{\text{rot, schwarz, blau, grün}\}$$

Hat man aber durch $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ jedem Element eine Zahl zugeordnet, kann man Mittelwerte und Abweichungen vom Mittelwert berechnen.
Denn durch $P[X^{-1}(\cdot)]$ weiß man, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zahlen in $\mathbb{R}$ auftreten.

**Definition 32.1** *Sei $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ mit*

$$\sum_{w \in W} |X(w)| P[w] < \infty$$

*Dann heißt*

$$E[X] = \sum_{w \in W} X(w) P[w]$$

*der **Erwartungswert von X unter P**.*

**Bemerkung 32.2** *Da man Teilmengen ohne Anordnung betrachtet, muss der Wert von E[X] unabhängig von der Reihenfolge der Summierung sein. Das ist gegeben, wenn die Beträge summierbar sind. Deshalb fordert man $E[|X|] < \infty$. Wenn man nur $P[X^{-1}(\cdot)]$ kennt, kann man trotzdem den Erwartungswert berechnen:*

**Satz 32.3** *Es gilt*

$$\begin{aligned} E[|X|] &= \sum_{x \in X(W)} |x| P[X^{-1}(x)] = \sum_{x \in \mathbb{R}} |x| P[X^{-1}(x)] \\ E[X] &= \sum_{x \in X(W)} x P[X^{-1}(x)] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P[X^{-1}(x)] \end{aligned}$$

**Beweis.**

$$
\begin{aligned}
E[|X|] &= \sum_{w\in W} |X(w)|P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} \sum_{w:X(w)=x} \underbrace{|X(w)|}_{=|x|} P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} |x| \sum_{w:X(w)=x} P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} |x| P\left[\sum_{w:X(w)=x} \{w\}\right] \\
&= \sum_{x\in X(W)} |x| P[X=x] \\
&= \sum_{x\in X(W)} |x| P[X^{-1}(x)]
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{w\in W} X(w)P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} \sum_{w:X(w)=x} \underbrace{X(w)}_{=x} P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} x \sum_{w:X(w)=x} P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} xP\left[\sum_{w:X(w)=x} \{w\}\right] \\
&= \sum_{x\in X(W)} xP[X=x] \\
&= \sum_{x\in X(W)} xP[X^{-1}(x)]
\end{aligned}
$$

Für $x \notin X(W)$ gilt

$$
\begin{aligned}
X^{-1}(x) &= \emptyset \\
P[X^{-1}(x)] &= P[\emptyset] = 0
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
x \notin X(W) \quad \Rightarrow \quad xP[X=x] = 0
$$

und somit
$$\sum_{x\in\mathbb{R}} xP[X^{-1}(x)] = \sum_{x\in X(W)} xP[X^{-1}(x)]$$
■

**Bemerkung 32.4** *Der Erwartungswert hängt nur von $P[X^{-1}(\cdot)]$ ab und ist insbesondere unabhängig vom Startraum. Oft ist nur ein Maß $Q$ auf $\mathbb{R}$ gegeben, sodaß man einen passenden Raum $(W,P)$ und ein passendes $X : (W,P) \to \mathbb{R}$ mit $P[X^{-1}(\cdot)] = Q[\cdot]$ wählen kann, wie beim Beweis des Grenzwertsatzes im Kapitel 6.*

**Beweis.** Bei
$$E[X] = \sum_{x\in\mathbb{R}} xP[X^{-1}(x)]$$
geht W nicht ein. ■

**Satz 32.5** *Seien $X : (W,P) \to V$ und $f : V \to \mathbb{R}$ gegeben und $E[|f\circ X|] < \infty$*

$$\begin{array}{ccc} W & \stackrel{f\circ X}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ X \searrow & & \nearrow f \\ & V & \end{array}$$

*Dann gilt*

$$\begin{aligned} E[f\circ X] &= \sum_{w\in W} f(X(w))P[w] \\ &= \sum_{t\in\mathbb{R}} tP[f\circ X = t] \\ &= \sum_{x\in V} f(x)P[X = x] \end{aligned}$$

**Beweis.** Dass die erste und zweite Zeile gleich sind, haben wir schon gezeigt.

$$\begin{aligned} \sum_{w\in W} |f(X(w))|P[w] &= \sum_{x\in X(W)} \sum_{w:X(w)=x} \underbrace{|f(X(w))|}_{=|f(x)|} P[w] \\ &= \sum_{x\in X(W)} |f(x)| \sum_{w:X(w)=x} P[w] \\ &= \sum_{x\in X(W)} |f(x)|P[X = x] \\ &= \sum_{x\in V} |f(x)|P[X = x] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in W} f(X(w))P[w] &= \sum_{x\in X(W)} \sum_{w:X(w)=x} \underbrace{f(X(w))}_{=f(x)} P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} f(x) \sum_{w:X(w)=x} P[w] \\
&= \sum_{x\in X(W)} f(x)P[X=x] \\
&= \sum_{x\in V} f(x)P[X=x]
\end{aligned}$$

■

**Satz 32.6** *Der Erwartungswert muss nicht existieren.*

**Beweis.** Für

$$X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, i\mapsto (-1)^i i2^i$$

sei

$$P[i]=\frac{1}{2^i}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
P[\mathbb{N}] &= \sum_{i=1}^{\infty} P[i] = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2-1 = 1
\end{aligned}$$

Wegen

$$E[|X|] = \sum_{i=1}^{\infty} \left|(-1)^i i2^i\right| \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} i = \infty$$

existiert der Erwartungswert von X nicht. ■

**Satz 32.7** *a) Für beschränkte $X:(W,P)\to\mathbb{R}$ existiert der Erwartungswert.*
*b) Seien $X,Y:(W,P)\to\mathbb{R}$ mit $0\le |X|\le |Y|$. Existiert der Erwartungswert von $Y$ so auch der von $X$.*
*c) Gilt $E[|X|^p]<\infty$ für ein $p\ge 1$, dann gilt auch $E[|X|]<\infty$*
*d) $E[X^2]<\infty \iff E[(X+a)^2]<\infty$*
*e) Die $X:(W,P)\to\mathbb{R}$ mit $E[|X|]<\infty$ sind ein Vektorraum.*

**Beweis. a)** Sei $|X|$ durch $M$ beschränkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} E[|X|] &= \sum_{w \in W} \underbrace{|X(w)|}_{\leq M} P[w] \\ &\leq \underbrace{M \sum_{w \in W} P[w]}_{=1} \\ &= M < \infty \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned} E[|X|] &= \sum_{w \in W} |X(w)| P[w] \\ &\leq \sum_{w \in W} |Y(w)| P[w] \\ &= E[|Y|] < \infty \end{aligned}$$

**c)** Mit

$$\begin{array}{ll} |X(w)| \leq 1 & \text{für } X(w) \leq 1 \\ |X(w)| \leq |X(w)|^p & \text{für } |X(w)| \geq 1 \end{array}$$

gilt

$$|X| \leq |X|^p + 1$$

und somit

$$\begin{aligned} E[|X|] &= \sum_{w \in W} |X(w)| P[w] \\ &\leq \sum_{w \in W} |X(w)|^p P[w] + \sum_{w \in W} P[w] \\ &= E[|X|^p] + 1 < \infty \end{aligned}$$

**d)** "$\Rightarrow$": Mit c) gilt $E[|X|] < \infty$. Mit

$$\begin{aligned} (X+a)^2 &= X^2 + 2aX + a^2 \\ &\leq X^2 + 2|a||X| + a^2 \end{aligned}$$

und b) gilt

$$E[(X+a)^2] < \infty$$

"$\Leftarrow$": Mit c) gilt $E[|X+a|] < \infty$. Mit

$$\begin{aligned} X^2 &= (X+a)^2 - 2aX - a^2 \\ &= (X+a)^2 - 2a(X+a) + a^2 \\ &\leq (X+a)^2 + 2|a||X+a| + a^2 \end{aligned}$$

und b) gilt

$$E[X^2] < \infty$$

**e)** Seien $X, Y : (W, P) \to \mathbb{R}$ mit $E[|X|], E[|Y|] < \infty$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E[|X + aY|] &= \sum_{w \in W} |X(w) + aY(w)|P[w] \\ &\leq \sum_{w \in W} |X(w)|P[w] + |a| \sum_{w \in W} |Y(w)|P[w] \\ &= E[|X|] + |a|E[|Y|] < \infty \end{aligned}$$

■

**Satz 32.8** *Sei $a \in \mathbb{R}$ und seien $X, Y, Z : (W, P) \to \mathbb{R}$ mit $E[|X|], E[|Y|]$, $E[|Z|] < \infty$.*
*a) Für die konstante Funktion*

$$X : (W, P) \to \mathbb{R}, w \mapsto c$$

*gilt $E[X] = c$*
*b) $E[aX + Y] = aE[X] + E[Y]$*
*c) Aus $Z \geq 0$ folgt $E[Z] \geq 0$*
*d) Aus $X \geq Y$ folgt $E[X] \geq E[Y]$*

**Beweis. a)** Wegen $|X| \leq |c|$ gilt mit a) : $E[|X|] < \infty$ und

$$E[X] = \sum_{w \in W} X(w)P[w] = c \underbrace{\sum_{w \in W} P[w]}_{=1} = c$$

**b)** $E[|aX + Y|] < \infty$ haben wir schon gezeigt. Damit gilt

$$\begin{aligned} E[aX + Y] &= \sum_{w \in W} (aX(w) + Y(w))P[w] \\ &= a \sum_{w \in W} X(w)P[w] + \sum_{w \in W} Y(w)P[w] \\ &= aE[X] + E[Y] \end{aligned}$$

**c)**

$$E[Z] = \sum_{w \in W} \underbrace{Z(w)}_{\geq 0} \underbrace{P[w]}_{\geq 0} \geq 0$$

**d)**

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X-Y+Y] \\ &\overset{a)}{=} E[\underbrace{X-Y}_{\geq 0}] + E[Y] \\ &\overset{b)}{\geq} E[Y] \end{aligned}$$

■

**Satz 32.9**

$$\begin{array}{lll} a) & \textit{Gleichverteilung auf } \{1,\dots,n\}: & E[X] = \frac{n+1}{2} \\ b) & B(n,p): & E[X] = np \\ c) & Poi(c): & E[X] = c \\ d) & \textit{Geometrische Verteilung}: & E[X] = \frac{1}{p} \end{array}$$

**Beweis.** a)

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xP[X=x] = \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xP[X=x] = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i\frac{n!}{i!(n-i)!} p^i(1-p)^{n-i} \\ &= np\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} p^{i-1}(1-p)^{n-1-i-1} \\ &= np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i(1-p)^{n-1-i} \\ &= np(p+(1-p))^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xP[X=x] = \sum_{i=0}^{\infty} ie^{-c}\frac{c^i}{i!} \\
&= c\sum_{i=1}^{\infty} e^{-c}\frac{c^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= ce^{-c}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c^i}{i!} \\
&= c
\end{aligned}
$$

d) Sei $p > 0$. Wegen $\sum_{i=0}^{\infty} y^i = \frac{1}{1-y}$ für $y \in (0,1)$ darf man $\sum$ und $\frac{d}{dx}$ vertauschen und es gilt

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xP[X=x] = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p \\
&= p\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(1-x)^i\right)_{x=p} = p\frac{d}{dx}\left[-\sum_{i=0}^{\infty}(1-x)^i\right]_{x=p} \\
&= p\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{1-(1-x)}\right)_{x=p} \\
&= p\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x=p} = \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

■

# 33. Varianz

Wir suchen eine gut handhabbare Größe, die aussagt, wie stark $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ von $E[X]$ abweicht.

**Definition 33.1** *Sei $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ mit $E[|X|] < \infty$.*
***a)*** *Die **Varianz von X** ist definiert als*

$$Var[X] := E[\ (X - E[X])^2\ ]$$

***b)*** *Die **Standardabweichung von X** ist*

$$s(X) = \sqrt{VarX}$$

Man hätte auch

$$E[\ (X - EX)^8\ ]$$

betrachten können, aber durch das Quadrat erhält man ein Skalarprodukt, mit dem man gut rechnen kann.

**Satz 33.2** *1.) Es gilt*

$$Var[X] < \infty \iff E[X^2] < \infty$$

*2.) Aus $Var[X] < \infty$ folgt*

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

*3.) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$$

*4.) Seien $X, Y : (W, P) \to \mathbb{R}$ mit $VarX < \infty, VarY < \infty$. Dann gilt*

$$Var[X + Y] < \infty$$

**Beweis.** 1.) Wir haben schon gezeigt

$$E[X^2] < \infty \iff E[(X + a)^2] < \infty$$

2.) Wegen $Var[X] < \infty$ ist $E[X^2] < \infty$ und es gilt

$$\begin{aligned} Var[X] &:= E[(X - EX)^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

3.) Mit

$$\begin{aligned} Var[X] < \infty &\iff E[X^2] < \infty \\ &\iff E[(aX)^2] < \infty \\ &\iff E[(aX+b)^2] < \infty \\ &\iff Var[aX+b] < \infty \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} Var[aX+b] &= E\left[(aX+b)^2\right] - E[aX+b]^2 \\ &= a^2E[X^2] + 2abE[X] + b^2 - (aE[X]+b)^2 \\ &= a^2E[X^2] - a^2E[X]^2 = a^2Var[X] \end{aligned}$$

4.) Wegen $Var[X], Var[Y] < \infty$ gilt

$$E[X^2], E[Y^2] < \infty$$

Wegen

$$\begin{aligned} & 2X^2 + 2Y^2 - (X+Y)^2 \\ = \; & 2X^2 + 2Y^2 - X^2 - 2XY - Y^2 \\ = \; & X^2 - 2XY + Y^2 \\ = \; & (X-Y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} (X+Y)^2 &\leq 2(X^2+Y^2) \\ E[(X+Y)^2] &\leq 2E[X^2] + 2E[Y^2] < \infty \end{aligned}$$

und somit

$$Var[X+Y] < \infty$$

■

**Beispiel 33.3 (Varianzen typischer Verteilungen)**

| | | |
|---|---|---|
| a) | *Gleichverteilung auf* $\{1, \ldots, n\}$ : | $Var[X] = \dfrac{n^2-1}{12}$ |
| b) | $B(n,p)$ | $Var[X] = np(1-p)$ |
| c) | $Poi(c)$ | $Var[X] = c$ |
| d) | *Geometrische Verteilung:* | $Var[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$ |

**Beweis.** a)

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)P[X=x] = \sum_{i=1}^{n} i^2\frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{1}{n} \\
Var[X] &= E[X^2]-E[X]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= (n+1)\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{12} \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)P[X=x] = \sum_{i=1}^{n} i(i-1)\frac{n!}{i!(n-i)!}p^i(1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i-2)!(n-2-(i-2))!}p^i(1-p)^{n-i} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-2-(i-2))!} \\
&\quad p^{i-2}(1-p)^{n-2-(i-2)} \\
&= n(n-1)p^2\underbrace{\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}p^i(1-p)^{n-2-(i-2)}}_{=1} \\
&= n(n-1)p^2 \\
Var[X] &= E[X(X-1)]+E[X]-E[X]^2 \\
&= n^2p^2-np^2+np-(np)^2 \\
&= n(p-p^2) \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)P[X=x] = \sum_{k=0}^{\infty}(k(k-1)+k)e^{-c}\frac{c^k}{k!} \\
&= \left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{(k-1)!}\right)e^{-c} \\
&= c^2e^{-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!} + e^{-c}c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!} \\
&= c^2 + c \\
Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = c^2 + c - c^2 = c
\end{aligned}$$

d) Wegen

$$\begin{aligned}
P[X=k] &= (1-p)^{k-1}p \\
E[X] &= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)P[X=x] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1}p \\
&= p(1-p)\frac{d^2}{dp^2}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k \\
&= p(1-p)\frac{d^2}{dp^2}\frac{1}{p} \\
&= p(1-p)\frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2 \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

■

**Satz 33.4** *Für* $X : (W,P) \to \mathbb{R}$ *gilt:*
*a)* $Var[X] \geq 0$.
*b)* $Var[X] = 0 \iff P[X = E[X]] = 1$

**Beweis.** a)

$$Var[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{(x - E[X])^2}_{\geq 0} P[X = x] \geq 0$$

b) "$\Leftarrow$" :

$$\begin{aligned} Var[X] &= \underbrace{(E[X] - E[X])^2}_{=0} P[X = E[X]] \\ &\quad + \sum_{x \in \mathbb{R} \setminus \{E[X]\}} (x - E[X])^2 \underbrace{P[X = x]}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$": Da $P[X \in \mathbb{R}] = 1$, gilt

$$\exists c \in \mathbb{R} : \; P[X = c] > 0$$

Aus $Var[X] = 0$ folgt

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x - E[X])^2 P[X = x] = 0$$

Nur für $x = E[X]$ wird der linke Faktor Null.
Somit gilt nur für $x = E[X]$

$$\begin{aligned} P[X = E[X]] &> 0 \\ P[X = E[X]] &= 1 \end{aligned}$$

■

**Satz 33.5** *Für* $Var[X], Var[Y] < \infty$ *gilt*

$$Var[X + Y] = VarX + VarY + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$$

**Beweis.** Schon gezeigt: $Var[X + Y] < \infty$. Wegen

$$|XY| \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$$

gilt $E[|XY|] < \infty$ und

$$\begin{aligned} Var[X + Y] &= E[(X + Y)^2] - E[X + Y]^2 \\ &= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] \\ &\quad - E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - E[Y]^2 \\ &= VarX + VarY + 2\,(E[XY] - E[X] \cdot E[Y]) \end{aligned}$$

■

**Satz 33.6** *Im Allgemeinen gilt*

$$Var[X+Y] \neq Var[X] + Var(Y)$$

**Beweis.** Sei $VarX \neq 0$.

$$\begin{aligned} Var[X+X] &= Var[2X] \\ &= 4Var[X] \\ &\neq Var[X] + Var[X] \end{aligned}$$

■

**Satz 33.7** *Sei $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ mit $E[X^2] < \infty$. Dann gilt*

$$\forall a \in \mathbb{R} : \; Var[X] \leq E[\;(X-a)^2\;]$$

*und*

$$Var[X] = E[\;(X-a)^2\;] \iff a = E[X]$$

*d.h. der Erwartungswert $E[X]$ minimiert $E[(X-a)^2]$.*

**Beweis.** Mit

$$\begin{aligned} E[\;(X-a)^2\;] &= E[X^2] - 2aE[X] + a^2 \\ &= Var[X] + E[X]^2 - 2aE[X] + a^2 \\ &= Var[X] + \underbrace{(E[X]-a)^2}_{\geq 0} \\ &\geq Var[X] \end{aligned}$$

gilt

$$(E[X]-a)^2 = Var[X] \iff a = E[X]$$

■

# 34. Kovarianz

**Definition 34.1** *Seien* $X, Y : (W, P) \to \mathbb{R}$ *mit* $E[|X|], E[|Y|], E[|XY|] < \infty$.
*Die* ***Kovarianz von X und Y*** *ist definiert als*

$$Kov(X, Y) = E[\ (X - E[X])(Y - E[Y])\ ]$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned} & (X - E[X])(Y - E[Y]) \\ = \ & XY - XE[Y] - YE[X] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

und wegen $E[|X|], E[|Y|], E[|XY|] < \infty$ gilt

$$E[\ |(X - E[X])(Y - E[Y])|\ ] < \infty$$

■

**Satz 34.2** *1.)* $Kov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
*2.)* $Kov(X, X) = Var(X)$
*3.)* $Kov(X, Y) = Kov(Y, X)$
*4.)* $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : Kov(aX + b, cY + d) = acKov(X, Y)$

**Beweis.** 1.)

$$\begin{aligned} Kov(X, Y) &= E[XY - XE[Y] - YE[X] - E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

2.)

$$Kov(X, X) = E[X \cdot X] - E[X]E[X] = Var(X)$$

3.)

$$\begin{aligned} Kov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[YX] - E[Y]E[X] \\ &= Kov(Y, X) \end{aligned}$$

4.)

$$\begin{aligned} & Kov(aX + b, cY + d) \\ = \ & E[\ (aX + b - E(aX + b))(cY + d - E(cY + d))\ ] \\ = \ & acE[\ (X - EX)(Y - EY)] \\ = \ & acKov(X, Y) \end{aligned}$$

■

**Satz 34.3** *Seien $E[X^2], E[Y^2] < \infty$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} |E[XY]| &\le \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]} < \infty \\ |Kov(X,Y)| &\le \sqrt{VarX}\sqrt{VarY} \end{aligned}$$

*Existieren Var(X), Var(Y), so existiert auch Kov(X,Y).*

**Beweis. a)** Seien $E[X^2], E[Y^2] > 0$.
Wegen $E[X^2], E[Y^2] < \infty$ gilt

$$\begin{aligned} |XY| &\le \frac{X^2+Y^2}{2} \\ E[|XY|] &\le \frac{1}{2}E[X^2] + \frac{1}{2}E[Y^2] < \infty \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 0 &\le E\left[\left(tX \pm \frac{1}{t}Y\right)^2\right] \\ &= t^2E[X^2] \pm 2E[XY] + \frac{1}{t^2}E[Y^2] \\ |E[XY]| &\le t^2E[X^2] + \frac{1}{t^2}E[Y^2] \end{aligned}$$

gilt für $t^2 = \sqrt{\frac{E[Y^2]}{E[X^2]}}$

$$\begin{aligned} |E[XY]| &\le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E[Y^2]}{E[X^2]}}E[X^2] + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E[X^2]}{E[Y^2]}}E[Y^2] \\ &= \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]} \end{aligned}$$

Sei $E[X^2] = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E[X^2] = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}: \ x^2P[X=x] = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}: \ |x|P[X=x] = 0 \\ &\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}: \ |xy|P[X=x, Y=y] = 0 \\ &\iff E[|XY|] = 0 \end{aligned}$$

Analog für $E[Y^2] = 0$.
**b)**

$$\begin{aligned} |Kov(X,Y)|^2 &= E[|\ (X-EX)(Y-EY)\ |]^2 \\ &\le E[(X-EX)^2] \cdot E[(Y-EY)^2] \\ &= Var[X]Var[Y] \end{aligned}$$

Zieht man die Wurzel, folgt die Behauptung. ■

**Satz 34.4** *Seien $X_1, \ldots, X_n : (W, P) \to \mathbb{R}$ mit $E[X_i^2] < \infty$.*
*a)*

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} Kov(X_i, X_j)$$

*b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ mit*

$$\forall i, j: \;\; Kov(X_i, X_j) = 0$$

*Dann gilt*

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

**Beweis.** Wegen

$$E[|X_i||X_j|] \leq \sqrt{E[X_i^2]} \cdot \sqrt{E[X_j^2]} < \infty$$

ist die Kovarianz definiert.
a)

$$\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i])\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j - E[X_j])\right)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E[(X_i - E[X_i]) \cdot (E[X_j - E[X_j])] \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} Kov(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \underbrace{Kov(X_i, X_j)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]
\end{aligned}$$

■

# 35. Korrelationskoeffizienten

**Satz 35.1**
$$\langle X, Y\rangle = \sum_{w\in W} X(w)Y(w)P[w]$$
*ist ein Skalarprodukt.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
\langle X, X\rangle &= \sum_{w\in W} X(w)X(w)P[w] \geq 0\\
\langle a_1X_1 + a_2X_2, Y\rangle &= \sum_{w\in W} (a_1X_1(w) + a_2X_2(w))Y(w)P[w]\\
&= a_1 \sum_{w\in W} X_1(w)Y(w)P[w]\\
&\quad +a_2 \sum_{w\in W} X_2(w)Y(w)P[w]\\
&= a_1 \langle X_1, Y\rangle + a_2 \langle X_2, Y\rangle\\
\langle X, Y\rangle &= \sum_{w\in W} X(w)Y(w)P[w] = \langle Y, X\rangle\\
\langle X, X\rangle = 0 &\iff \forall w \in W:\ X^2(w)P[w] = 0\\
&\iff X(w) = 0 \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

■

**Satz 35.2** *Es gilt*

$$\begin{aligned}
&Kov^2(X, Y) = Var[X]Var[Y]\\
\iff\ &Y - E[Y] = (X - E[X])\frac{Kov(X, Y)}{Var(X)}
\end{aligned}$$

**Beweis.** Sei $Var[X] > 0$ und

$$\begin{aligned}
A &:= X - E[X]\\
B &:= Y - E[Y]\\
c &:= \frac{\langle A, B\rangle}{\langle A, A\rangle}\\
D &:= B - A\frac{\langle A, B\rangle}{\langle A, A\rangle}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
B &= A\frac{\langle A,B\rangle}{\langle A,A\rangle} + \left(B - A\frac{\langle A,B\rangle}{\langle A,A\rangle}\right) \\
&= cA + D \\
\langle A,D\rangle &= \left\langle A, B - A\frac{\langle A,B\rangle}{\langle A,A\rangle}\right\rangle \\
&= \langle A,B\rangle - \frac{\langle A,B\rangle}{\langle A,A\rangle}\langle A,A\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\langle B,B\rangle &= \langle cA+D, cA+D\rangle \\
&= c^2\langle A,A\rangle + 2c\underbrace{\langle A,D\rangle}_{=0} + \langle D,D\rangle \\
\langle A,B\rangle &= \langle A, cA+D\rangle^2 \\
&= \left(c\langle A,A\rangle + \underbrace{\langle A,D\rangle}_{=0}\right)^2 \\
&= c^2\langle A,A\rangle^2
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& (Kov(X,Y))^2 = Var(X)Var(Y) \\
\iff\quad & \langle A,B\rangle^2 = \langle A,A\rangle\langle B,B\rangle \\
\iff\quad & c^2\langle A,A\rangle^2 = \langle A,A\rangle\left(c^2\langle A,A\rangle + \langle D,D\rangle\right) \\
\overset{\langle A,A\rangle\neq 0}{\iff}\quad & \langle D,D\rangle = 0 \\
\iff\quad & D = 0 \\
\iff\quad & B = A\frac{\langle A,B\rangle}{\langle A,A\rangle} \\
\iff\quad & Y - E[Y] = (X - E[X])\frac{Kov(X,Y)}{Var(X)}
\end{aligned}$$

Sei $Var(X) = 0$, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ (x - E[X])P[X = x] = 0$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
Kov(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= \sum_{x,y\in\mathbb{R}} (x-E[X])(y-E[Y])P[X=x,Y=y] \\
&\leq \sum_{x\in X} (x-E[X])P[X=x] \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Wegen

$$\frac{|Kov(X,Y)|}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} \leq 1$$

und

$$\frac{|Kov(X,Y)|}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = 1 \iff X-E[X] \text{ und } Y-E[Y] \text{ sind linear abhängig}$$

kann man die lineare Abhängigkeit versuchen zu beschreiben durch

$$r := \frac{Kov(X,Y)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}} \in [-1,1]$$

Die Kovarianz sagt aber nur etwas über den affin-linearen Zusammenhang zwischen X und Y aus. Trotz quadratischen Zusammenhanges kann die Kovarianz Null werden:

**Beispiel 35.3** *Sei* $X : (W,P) \to \mathbb{R}$ *mit*

$$P[X=-2] = P[X=-1] = P[X=1] = P[X=2] = \frac{1}{4}$$

*und* $Y := X^2$. *Dann gilt*

$$Kov(X,Y) = 0$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1}{4}(-2-1+1+2)=0 \\
Var(X) &= E[X^2]=\frac{1}{4}(4+1+1+4)=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}>0 \\
E[Y] &= E[X^2]=\frac{5}{2}>0 \\
E[Y^2] &= \frac{1}{4}(16+1+1+16)>0 \\
Var(Y) &= E[Y^2]-E[Y]^2=\frac{34}{4}-\frac{25}{4}>0 \\
E[XY] &= \frac{1}{4}(-8-1+1+8)=0 \\
Kov(X,Y) &= E[XY]-E[X]E[Y]=0 \\
r(X,Y) &= 0
\end{aligned}$$

■

# 36. Unabhängige $X : (W, P) \to \mathbb{R}$

**Satz 36.1** *Seien* $X_1, \dots, X_n : (W, P) \to \mathbb{R}$ *unabhängig mit* $E[|X_i|] < \infty$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} E\left[\prod_{i=1}^n |X_i|\right] &< \infty \\ E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] &= \prod_{i=1}^n E[X_i] \end{aligned}$$

**Beweis.** Für

$$\prod_{i=1}^n X_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$$

gilt

$$\begin{aligned} & E\left[\prod_{i=1}^n |X_i|\right] \\ = \quad & \sum_{x \in \mathbb{R}^n} |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n| P[(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)] \\ = \quad & \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} \dots \sum_{x_n \in \mathbb{R}} |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n| \cdot P\left[\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right] \\ \overset{\text{unabhängig}}{=} \quad & \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} \dots \sum_{x_n \in \mathbb{R}} \prod_{i=1}^n |x_i| P[X_i = x_i] \\ = \quad & \prod_{i=1}^n \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} |x_i| P[X_i = x_i] \\ = \quad & \prod_{i=1}^n E[|X_i|] < \infty \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
& E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] \\
= \quad & \sum_{x\in\mathbb{R}^n} x_1\cdot\ldots\cdot x_n P[(X_1,\ldots,X_n)=(x_1,\ldots,x_n)] \\
= \quad & \sum_{x_1\in\mathbb{R}}\ldots\sum_{x_n\in\mathbb{R}} x_1\cdot\ldots\cdot x_n P\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i=x_i\}\right] \\
\overset{\text{unabhängig}}{=} \quad & \sum_{x_1\in\mathbb{R}}\ldots\sum_{x_n\in\mathbb{R}}\prod_{i=1}^{n} x_i P[X_i=x_i] \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n}\sum_{x_1\in\mathbb{R}} x_i P[X_i=x_i] \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} E[X_i]<\infty
\end{aligned}
$$

■

**Satz 36.2** *Seien $X_i : (W,P)\to\mathbb{R}$ für $i\in I$ unabhängig mit $E[|X_i|]<\infty$. Dann gilt*

$$Kov(X_i,X_j)=0$$

**Beweis.**

$$Kov(X_i,X_j)=E[X_i\cdot X_j]-E[X_i]\cdot E[X_j]=0$$

■

**Satz 36.3** *Aus $Kov(X,Y)=0$ folgt nicht, dass X und Y unabhängig sind.*

**Beweis.** Sei X gleichverteilt auf $W=\{-1,0,1\}$. Wegen

$$
\begin{aligned}
E[X] &= -1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0 \\
E[|X|] &= |-1|\cdot\frac{1}{3}+|0|\cdot\frac{1}{3}+|1|\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\
E[X\cdot|X|] &= |-1|(-1)\frac{1}{3}+|0|\cdot 0\cdot\frac{1}{3}+|1|\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=0
\end{aligned}
$$

gilt

$$Kov(|X|,X)=E[X|X|]-E[X]E[|X|]=0$$

Da das Ereignis

$$\{X=1,|X|=0\}$$

unmöglich ist, gilt

$$P[X = 1, |X| = 0] = 0 \neq \frac{1}{9} = P[|X| = 0] \cdot P[X = 1]$$

und $X$ und $|X|$ sind nicht unabhängig ■

# 37. Das schwache Gesetz der großen Zahlen

**Satz 37.1** *Sei* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *monoton wachsend und* $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ *mit*

$$E[f(|X|)] < \infty$$

*Dann gilt für alle* $a > 0$ *mit* $f(a) > 0$*:*

$$P[|X| \geq a] \leq \frac{E[f(|X|)]}{f(a)}$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
& P[|X| \geq a] \\
= & \sum_{x \in \mathbb{R}, |x| \geq a} P[X = x] \\
\leq & \sum_{x \in \mathbb{R}, |x| \geq a} \underbrace{\frac{f(|x|)}{f(a)}}_{\geq 1, \text{ da } f(|x|) \geq f(a)} P[X = x] + \sum_{x \in \mathbb{R}, |x| < a} \underbrace{\frac{f(|x|)}{f(a)}}_{\geq 0} P[X = x] \\
= & \frac{1}{f(a)} \sum_{x \in \mathbb{R}} f(|x|) P[X = x] \\
= & \frac{E[f(|X|)]}{f(a)}
\end{aligned}$$

■

**Satz 37.2** *Sei* $X : (W, P) \to \mathbb{R}$ *mit* $E[X^2] < \infty$*. Dann gilt*

$$\forall a > 0 : \; P\left[|X - EX| \geq a\right] \leq \frac{VarX}{a^2}$$

**Beweis.** Da

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), y \mapsto y^2$$

monoton steigend ist, gilt

$$P[|Y| \geq a] \leq \frac{E[|Y|^2]}{a^2}$$

und somit

$$P[|X - E(X)| \geq a] \leq \frac{E[|X - EX|^2]}{a^2} = \frac{VarX}{a^2}$$

■

**Satz 37.3** *Die Ungleichung kann im Allgemeinen nicht verbessert werden.*

**Beweis.** Sei $a \geq 1$ und $X : (W, P) \to \{-a, 0, a\}$ mit

$$\begin{aligned} P[X = -a] &= P[X = a] = \frac{1}{2a^2} \\ P[X = 0] &= 1 - \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= a\frac{1}{2a^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2a^2}\right) + (-a)\frac{1}{2a^2} = 0 \\ E[X^2] &= a^2\frac{1}{2a^2} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2a^2}\right) + (-a)^2\frac{1}{2a^2} = 1 \\ Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P[|X - EX| \geq a] &= P[|X| \geq a] \\ &= P[X = -a] + P[X = a] \\ &= \frac{1}{a^2} = \frac{Var[X]}{a^2} \end{aligned}$$

■

Oft gibt es viel bessere Abschätzungen. Diese ist gut genug für das schwache Gesetz der großen Zahlen.

**Satz 37.4 (Das schwache Gesetz der großen Zahlen)**
*Seien $X_i : (W, P) \to \mathbb{R}$ sodaß für alle i,j*

$$\begin{aligned} E[X_i] &= c \\ Var[X_i] &= v \\ Kov(X_i, X_j) &= 0 \end{aligned}$$

*Dann gilt für die Folge der Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - c\right| \geq \varepsilon\right] = 0$$

**Beweis.** Wegen

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = c$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - c\right| \geq \varepsilon\right] \\
= \quad & \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right| \geq \varepsilon\right] \\
\leq \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{\varepsilon^2} \\
= \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{n^2\varepsilon^2} \\
\overset{Kov(X_i,X_j)=0}{=} \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{nv}{n^2\varepsilon^2} \\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

■

Ein Experiment wird beliebig oft wiederholt und es gelte

$$\forall i \neq j : Kov(X_i, X_j) = 0$$

Dann ist $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ mit großer Wahrscheinlichkeit in der Nähe von c.
Wegen

$$\forall \varepsilon, \delta > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \ P\left[\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - nc\right| \geq n\varepsilon\right] < \delta$$

ist **nicht** $\sum_{i=1}^{n} X_i$ mit großer Wahrscheinlichkeit in der Nähe von **nc**.

# 38. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

**Definition 38.1** *Sei $W$ abzählbar und $B \subset W$ mit $P[B] > 0$. Dann erhält man durch*

$$P[\cdot|B] : Pot(W) \to [0,1], A \mapsto P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

*ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß auf W.*
*Dieses heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit**.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned} P[W|B] &= \frac{P[W \cap B]}{P[B]} = 1 \\ P[\emptyset|B] &= \frac{P[\emptyset]}{P[B]} = 0 \\ P\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n|B\right] &= \frac{P\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right]}{P[B]} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n \cap B]}{P[B]} = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n|B] \end{aligned}$$

■

**Beispiel 38.2** *Man wirft 2 Würfel und die Augensumme ist 6. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer eine 2 zeigt, ist 40%.*

**Beweis.** Mit

$$\begin{aligned} B &= \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = \text{Die Augensumme ist 6} \\ A &= \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5), \\ &\quad (2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\} \\ &= \text{Einer der Würfel zeigt eine 2} \\ A \cap B &= \{(2,4),(4,2)\} \end{aligned}$$

gilt

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{2/36}{5/36} = 0.4$$

■

**Satz 38.3** *Seien $A, B \subset W$ und $P[B] > 0$.*
*1.) Ist A größer als B, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit Eins:*
*Für $A \supset B$ gilt: $P[A|B] = 1$*
*2.) Aus $B \cap A = \emptyset$ folgt $P[A|B] = 0$*
*3.) $P[A^C|B] = 1 - P[A|B]$*

**Beweis.** 1.)
$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B]}{P[B]} = 1$$
2.)
$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[\emptyset]}{P[B]} = 0$$
3.) Da $P[\cdot|B]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. ■

Ziel: Berechne eine Wahrscheinlichkeit aus bedingten Wahrscheinlichkeiten. Zerlege dazu den Wahrscheinlichkeitsraum in schnittleere Teilmengen. Berechne dort die Wahrscheinlichkeit und füge alles mit Gewichten passend zusammen.

**Satz 38.4** *a) Für $A \subset \sum_{j=1}^{\infty} B_j$ gilt:*
$$P[A] = \sum_{j=1}^{\infty} P[A|B_j]P[B_j]$$
*Dabei setzt man*
$$P[A|B_j]P[B_j] = 0 \text{ für } P[B_j] = 0$$
*b) Für $P[A] > 0$ gilt*
$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} P[A|B_j]P[B_j]}$$

**Beweis.** a) Aus $A = \sum_{j=1}^{\infty} A \cap B_j$ folgt
$$P[A] = \sum_{j=1}^{\infty} P[A \cap B_j] = \sum_{j=1}^{\infty} P[A|B_j]P[B_j]$$

b) Mit a) gilt
$$P[B_i|A] = \frac{P[A \cap B_i]}{P[A]} = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} P[A|B_j]P[B_j]}$$

■
Oft gilt $\sum_{i \in I} B_i = W$.

**Bemerkung 38.5** *In der Praxis sind die $B_j$ nicht notwendig schnittleer, d.h.*

$$\begin{aligned} P[A] &= P\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right] \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} P[A \cap B_i] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P[A|B_j]P[B_j] \end{aligned}$$

*oder A ist nicht ganz in $\sum_{j=1}^{\infty} B_i$ enthalten: $A \not\subset \sum_{j=1}^{\infty} B_j$*

$$\begin{aligned} P[A] &= P\left[A \cap \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right] + \underbrace{P\left[A \cap \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right)^C\right]}_{>0} \\ &> \sum_{j=1}^{\infty} P[A \cap B_j] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P[A|B_j]P[B_j] \end{aligned}$$

Die Formel verführt also dazu, Experimente **falsch zu modellieren**, und somit zu falschen Schlussfolgerungen zu gelangen.

**Beispiel 38.6** *Es gebe ein Symptom bei zwei Krankheiten: $K_1$ oder $K_2$.*
*$K_1$ und $K_2$ treten im Verhältnis 7:93 auf.*
*Wahrscheinlichkeit für das Symptom S bei Krankheit $K_1$: 0.92.*
*Wahrscheinlichkeit für das Symptom S bei Krankheit $K_2$: 0.085.*
*Wenn das Symptom S vorliegt, wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass man $K_1$ hat?*

**Beweis.**

$$\begin{aligned} P[K_1] &= 0.07 \\ P[K_2] &= 0,93 \\ P[S|K_1] &= 0.92 \\ P[S|K_2] &= 0.085 \\ P[S] &= P[S|K_1]P[K_1] + P[S|K_2]P[K_2] \end{aligned}$$

ergibt

$$P[K_1|S] = \frac{P[S|K_1]P[K_1]}{P[S|K_1]P[K_1] + P[S|K_2]P[K_2]} = 0.45$$

Die Annahme $K_1 + K_2 = W$ ist falsch, da man auch beide Krankheiten haben kann ($K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$), oder da eine unbekannte Krankheit oder Einbildung dieses Symptom hervorrufen kann, d.h. $K_1 \cup K_2 \subsetneqq W$. Damit ist die Berechnung von $P[S]$ **falsch.** ■

# Teil III. Wahrscheinlichkeitstheorie

## 39. Erwartungswerte

Sei S abzählbare Algebra auf W.

**Definition 39.1** *Sei $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Ist*

$$\int_W |X(w)| dP < \infty$$

*so heißt*

$$E[X] := \int_W X dP$$

*der **Erwartungswert** von X.*

**Satz 39.2** *a) Für beschränkte $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ existiert der Erwartungswert.*
*b) Seien $X, Y : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $0 \leq |X| \leq |Y|$ und $E[|Y|] < \infty$. Dann gilt $E[|X|] < \infty$.*
*c) Sei $E[|X|^p] < \infty$ für ein $p \geq 1$. Dann gilt $E[|X|] < \infty$*
*d) $E[X^2] < \infty \iff E[(X + a)^2] < \infty$*
*e) Die $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $E[|X|] < \infty$ sind ein Vektorraum.*

**Beweis. a)** Sei $|X| \leq K$.

$$\int_W |X(w)| dP \leq K \int_W dP = 1$$

**b)**

$$\int_W |X(w)| dP \leq \int_W |Y(w)| dP < \infty$$

**c)** Mit

$$\begin{array}{ll} |X(w)| \leq 1 & \text{für } |X(w)| \leq 1 \\ |X(w)| \leq |X(w)|^p & \text{für } |X(w)| \geq 1 \end{array}$$

gilt

$$|X| \leq |X|^p + 1$$

und somit

$$\begin{aligned} E[|X|] &= \int_W |X(w)| dP \leq \int_W |X(w)|^p dP + \int_W dP \\ &= E[|X|^p] + 1 < \infty \end{aligned}$$

**d)** "$\Rightarrow$": Mit c) gilt $E[|X|] < \infty$. Mit

$$\begin{aligned}(X+a)^2 &= X^2 + 2aX + a^2 \\ &\leq X^2 + 2|a||X| + a^2\end{aligned}$$

und b) gilt

$$E[(X+a)^2] < \infty$$

"$\Leftarrow$": Mit c) gilt $E[|X+a|] < \infty$. Mit

$$\begin{aligned}X^2 &= (X+a)^2 - 2aX - a^2 \\ &= (X+a)^2 - 2a(X+a) + a^2 \\ &\leq (X+a)^2 + 2|a||X+a| + a^2\end{aligned}$$

und b) gilt

$$E[X^2] < \infty$$

**e)** Seien $X, Y : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $E[|X|], E[|Y|] < \infty$ und $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}E[|X+aY|] &= \int_W |X+aY| dP \\ &\leq \int_W |X| dP + |a| \int_W |Y| dP \\ &= E[|X|] + |a| E[|Y|] \\ &< \infty\end{aligned}$$

■

**Satz 39.3** *Sei $a \in \mathbb{R}$ und seien $X, Y, Z : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $E[|X|]$, $E[|Y|], E[|Z|] < \infty$.*
*a) Für die konstante Funktion*

$$X : (W, P) \to \mathbb{R}, w \mapsto c$$

*gilt $E[X] = c$*
*b) $E[aX + Y] = aE[X] + E[Y]$*
*c) Aus $Z \geq 0$ folgt $E[Z] \geq 0$*
*d) Aus $X \geq Y$ folgt $E[X] \geq E[Y]$*

**Beweis.** a)

$$\int c dP = c \int dP = c$$

b) Wir haben schon gezeigt, dass $E[|aX+Y|] < \infty$.

$$\begin{aligned} E[aX+Y] &= \int_W (aX(w)+Y(w))dP \\ &= a\int_W X(w)dP + \int_W Y(w)dP \\ &= aE[X]+E[Y] \end{aligned}$$

c)

$$E[Z] = \int_W \underbrace{Z(w)}_{\geq 0} dP \geq 0$$

d)

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X-Y+Y] \\ &\overset{b)}{=} E[\underbrace{X-Y}_{\geq 0}] + E[Y] \\ &\overset{c)}{\geq} E[Y] \end{aligned}$$

■

**Satz 39.4** *Für $X, Y : (W, S, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ gilt*
$E[|X|] = 0 \iff |X| = 0$ *P-fast sicher.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned} E[|X|] = 0 &\iff \int |X|dP = 0 \\ &\iff |X| = 0 \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

■

# 40. Varianz

**Definition 40.1** *Sei $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $E[|X|] < \infty$. Dann ist die* ***Varianz*** *von $X$ definiert als*

$$Var[X] \quad = \quad E[\ (X - E[X])^2\ ] = \int_W (X(w) - E[X])^2 dP$$

*Die* ***Standardabweichung*** *von $X$ ist*

$$s(X) = \sqrt{VarX}$$

**Beweis.** Wegen $E[|X|] < \infty$ ist $Var[X]$ definiert. ■

**Satz 40.2** *1.) Es gilt*

$$Var[X] < \infty \iff E[X^2] < \infty$$

*2.) Aus $Var[X] < \infty$ folgt*

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

*3.) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$$

*4.) Seien $X, Y : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $VarX < \infty, VarY < \infty$. Dann gilt*

$$Var[X + Y] < \infty$$

*5.) $Var[X] \geq 0$.*

**Beweis.** 1.) Wir haben schon gezeigt

$$E[X^2] < \infty \iff E[(X + a)^2] < \infty$$

2.) Wegen $Var[X] < \infty$ ist $E[X^2] < \infty$ und es gilt

$$\begin{aligned} Var[X] &:= E[(X - EX)^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

3.) Mit

$$\begin{aligned} Var[X] < \infty &\iff E[X^2] < \infty \\ &\iff E[(aX)^2] < \infty \\ &\iff E[(aX + b)^2] < \infty \\ &\iff Var[aX + b] < \infty \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
Var[aX+b] &= E[(aX+b)^2 - E[aX+b]^2 \\
&= a^2E[X^2] + 2abE[X] + b^2 - (aE[X]+b)^2 \\
&= a^2E[X^2] - a^2E[X]^2 = a^2Var[X]
\end{aligned}$$

4.) Wegen $Var[X], Var[Y] < \infty$ gilt

$$E[X^2], E[Y^2] < \infty$$

Wegen

$$\begin{aligned}
& 2X^2 + 2Y^2 - (X+Y)^2 \\
=\ & 2X^2 + 2Y^2 - X^2 - 2XY - Y^2 \\
=\ & X^2 - 2XY + Y^2 \\
=\ & (X-Y)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
(X+Y)^2 &\leq 2(X^2+Y^2) \\
E[(X+Y)^2] &\leq 2E[X^2] + 2E[Y^2] < \infty
\end{aligned}$$

und somit

$$Var[X+Y] < \infty$$

5.)

$$\int |X - E[X]|^2 dP \geq 0$$

■

**Satz 40.3** *Für* $X, Y : (W, S, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ *gilt*

$$Var[X] = 0 \iff X = E[X] \text{ } \textit{P-fast sicher}$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
Var[X] = 0 &\iff E[|X - E[X]|^2] = 0 \\
&\iff |X - E[X]|^2 = 0 \text{ P-fast sicher} \\
&\iff X = E[X] \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

■

# 41. Kovarianz

**Definition 41.1** *Sei* $X, Y : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *mit* $E[|X|], E[|Y|], E[|XY|] < \infty$. *Die* ***Kovarianz von X und Y*** *ist*

$$\begin{aligned} Kov(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \end{aligned}$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} & Kov(|X|, |Y|) \\ = \;& E[|X| \cdot |Y| - E[|X|] \cdot |Y| - E[|Y|] \cdot |X| + E[|X|] \cdot E[|Y|]] \\ = \;& E[|XY|] - E[|X|] \cdot E[|Y|] < \infty \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Kov(X,Y) &= E[XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \end{aligned}$$

■

**Satz 41.2** *1.)* $Kov(X, X) = Var(X)$
*2.)* $Kov(X, Y) = Kov(Y, X)$
*3.)* $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : Kov(aX + b, cY + d) = acKov(X, Y)$

**Beweis.** 1.)

$$Kov(X, X) = E[X \cdot X] - E[X]E[X] = Var(X)$$

2.)

$$\begin{aligned} Kov(X,Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[YX] - E[Y]E[X] \\ &= Kov(Y,X) \end{aligned}$$

3.)

$$\begin{aligned} & Kov(aX + b, cY + d) \\ = \;& E\,[\;(aX + b - E(aX + b))(cY + d - E(cY + d))\;] \\ = \;& acE\,[\;(X - EX)(Y - EY)] \\ = \;& acKov(X, Y) \end{aligned}$$

■

**Satz 41.3** *Seien $E[X^2], E[Y^2] < \infty$. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
|E[XY]| &\leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]} < \infty \\
|Kov(X,Y)| &\leq \sqrt{VarX}\sqrt{VarY}
\end{aligned}
$$

**Beweis. a)** Seien $E[X^2], E[Y^2] > 0$.
Wegen $E[X^2], E[Y^2] < \infty$ gilt

$$
\begin{aligned}
|XY| &\leq \frac{X^2 + Y^2}{2} \\
E[|XY|] &\leq \frac{1}{2}E[X^2] + \frac{1}{2}E[Y^2] < \infty
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
0 &\leq E\left[\left(tX \pm \frac{1}{t}Y\right)^2\right] \\
&= t^2E[X^2] \pm 2E[XY] + \frac{1}{t^2}E[Y^2] \\
|E[XY]| &\leq t^2E[X^2] + \frac{1}{t^2}E[Y^2]
\end{aligned}
$$

gilt für $t^2 = \sqrt{\frac{E[Y^2]}{E[X^2]}}$

$$
\begin{aligned}
|E[XY]| &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E[Y^2]}{E[X^2]}}E[X^2] + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E[X^2]}{E[Y^2]}}E[Y^2] \\
&= \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}
\end{aligned}
$$

Sei $E[X^2] = 0$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
E[X^2] = 0 &\iff |X| = 0 \text{ P-fast sicher} \\
&\Rightarrow |XY| = 0 \text{ P-fast sicher} \\
&\iff E[|XY| = 0]
\end{aligned}
$$

Analog für $E[Y^2] = 0$.
**b)**

$$
\begin{aligned}
|Kov(X,Y)|^2 &= E[|\ (X - EX)(Y - EY)\ |]^2 \\
&\leq E[(X - EX)^2] \cdot E[(Y - EY)^2] \\
&= Var[X]Var[Y]
\end{aligned}
$$

■

**Satz 41.4** *Seien* $X_1, \ldots, X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *mit* $E[X_i^2] < \infty$. *Dann gilt a)*

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} Kov(X_i, X_j)$$

*b) Für* $X_1, \ldots, X_n$ *mit* $Kov(X_i, X_j) = 0$ *für alle i,j gilt:*

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

**Beweis.** Wegen

$$E[|X_i||X_j|] \leq \sqrt{E[X_i^2]} \cdot \sqrt{E[X_j^2]} < \infty$$

ist die Kovarianz definiert.
a)

$$\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i])\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j - E[X_j])\right)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E[(X_i - E[X_i])\ (X_j - E[X_j])] \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} Kov(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \underbrace{Kov(X_i, X_j)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]
\end{aligned}$$

■

# 42. Das schwache Gesetz der großen Zahlen

**Satz 42.1** *Sei* $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *monoton wachsend, messbar und* $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *mit*

$$E[g(|X|)] < \infty$$

*Dann gilt für alle* $a > 0$ *mit* $g(a) > 0$*:*

$$P[|X| \geq a] \leq \frac{E[g(|X|])}{g(a)}$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} P[|X| \geq a] &= \int 1_{\{|X| \geq a\}} dP \\ &\leq \int 1_{\{|X| \geq a\}} \underbrace{\frac{g(|X|)}{g(a)}}_{\geq 1, \text{ da } |x| \geq a} dP + \int 1_{\{|X| < a\}} \underbrace{\frac{g(|X|)}{g(a)}}_{\geq 0} dP \\ &= \frac{1}{g(a)} \int g(|X|) dP \\ &= \frac{E[g(|X|)]}{g(a)} \end{aligned}$$

■

**Satz 42.2** *Sei* $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *mit* $E[X^2] < \infty$*. Dann gilt*

$$\forall a > 0 : \; P\left[|X - E[X]| \geq a\right] \leq \frac{VarX}{a^2}$$

**Beweis.** Da $x \mapsto x^2$ monoton steigend ist, gilt

$$P[|Y| \geq a] \leq \frac{E[Y^2]}{a^2}$$

und somit

$$\begin{aligned} P[|X - E[X]| \geq a] &\leq \frac{E[\; |X - E[X]|^2 \;]}{a^2} \\ &= \frac{VarX}{a^2} \end{aligned}$$

■

**Satz 42.3** *Für* $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *und* $a > 0$ *gilt*

$$P[|X| \geq a] \leq \frac{1}{a} E[|X|]$$

**Beweis.** Da $id : [0, \infty) \to [0, \infty), t \mapsto t$ monoton steigend und messbar ist, gilt

$$P[|X| \geq a] \leq \frac{E[id(|X|)]}{id(a)} = \frac{E[|X|]}{a}$$

■

**Satz 42.4 (Das schwache Gesetz der großen Zahlen)**
*Seien $X_i : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sodaß für alle i,j*

$$\begin{aligned} E[X_i] &= c \\ Var[X_i] &= v \\ Kov(X_i, X_j) &= 0 \end{aligned}$$

*Dann gilt für die Folge der Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - c\right| \geq \varepsilon\right] = 0$$

**Beweis.** Wegen

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = c$$

gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - c\right| \geq \varepsilon\right] \\ = & \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right]\right| \geq \varepsilon\right] \\ \leq & \lim_{n\to\infty} \frac{Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right]}{\varepsilon^2} \\ \overset{Kov(X_i,X_j)=0}{=} & \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{Var\left[X_i\right]}{n^2\varepsilon^2} \\ = & \lim_{n\to\infty} \frac{nv}{n^2\varepsilon^2} \\ = & 0 \end{aligned}$$

■

# 43. Unabhängigkeit

**Definition 43.1** *Sei (W,S,P) gegeben.*
*a) Eine Familie von Mengen $(A_i)_{i\in I}$ in S heißt* ***unabhängig bzgl. P*** $\Longleftrightarrow$

$$\forall J \subset I \text{ endlich}: P\left[\bigcap_{i\in J} A_i\right] = \prod_{i\in J} P[A_i]$$

*b) Eine Familie $(G_i)_{i\in I}$ von Mengensystemen in S (z.B. abzählbaren Algebren $S_i \subset S$) heißt* ***unabhängig***

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad \text{Für jede Wahl } A_i \in G_i \text{ sind } (A_i)_{i\in I} \text{ unabhängig} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall \text{ endlichen } J \subset I \ \forall A_i \in G_i, i \in J: \ P\left[\bigcap_{i\in J} A_i\right] = \prod_{i\in J} P[A_i] \end{aligned}$$

Wir haben schon gezeigt, dass die Unabhängigkeit vom Wahrscheinlichkeitsmaß abhängt.
Es reicht die Unabhängigkeit auf einem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem E zu prüfen.

**Satz 43.2** *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine unabhängige Familie von durchschnittsstabilen Mengensystemen in S. Dann sind die erzeugten abzählbaren Algebren $(S(G_i))_{i\in I}$ unabhängig.*

**Beweis.** Sei $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Für beliebige $A_{i_l} \in S(G_{i_l})$ zeige

$$P[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \prod_{j=1}^{k} P[A_{i_j}]$$

**n=1:** Seien $A_{i_1} \in S(G_{i_1})$ und $A_{i_2} \in G_{i_2}, \ldots, A_{i_k} \in G_{i_k}$ Setze

$$D_{i_1} = \left\{ A \in S(G_{i,1}) : P[A \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = P[A] \prod_{j=2}^{k} P[A_{i_j}] \right\}$$

Nach Voraussetzung gilt $G_{i_1} \subset D_{i_1}$
$D_{i_1}$ **ist schnittleere abzählbare Algebra:**
Aus $A \in D_{i_1}$ folgt $A^C \in D_{i_1}$:

$$\begin{aligned} & P[A^C \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] \\ = \quad & P[A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] - P[A \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] \\ \overset{A\in D_{i_1}}{=} \quad & P[A_{i_2}] \cdot \ldots \cdot P[A_{i_k}] - P[A] \cdot P[A_{i_2}] \cdot \ldots \cdot P[A_{i_k}] \\ = \quad & P[A^C] \cdot P[A_{i_2}] \cdot \ldots \cdot P[A_{i_k}] \end{aligned}$$

Aus $B_j \in D_{i_1}$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} B_j \in D_{i_1}$:

$$\begin{aligned}
& P\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right] \\
= \quad & \sum_{j=1}^{\infty} P[B_j \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] \\
\stackrel{B_j \in D_{i_1}}{=} \quad & \sum_{j=1}^{\infty} P[B_j] \prod_{j=2}^{k} P[A_{i_j}] \\
= \quad & P\left[\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right] \prod_{j=2}^{j} P[A_{i_j}]
\end{aligned}$$

$\emptyset, W \in D_1$:

$$\begin{aligned}
P[\emptyset \cap A_{i_2} \cap A_{i_k}] &= P[\emptyset] = 0 \\
&= P[\emptyset] \prod_{j=2}^{k} P[A_{i_j}] \\
P[W \cap A_{i_2} \cap A_{i_k}] &= P[A_{i_2} \cap A_{i_k}] \\
&= P[W] \prod_{j=2}^{k} P[A_{i_j}]
\end{aligned}$$

Wegen $(A, B \in G_{i_1} \Rightarrow A \cap B \in G_{i_1})$ folgt

$$D(G_{i_1}) = S(G_{i_1})$$

**$\mathbf{n} \to \mathbf{n+1}$:** Gelte es bereits für die ersten n Komponenten. Setze

$$D_{i_{n+1}} = \left\{ \begin{array}{l} A \in S(G_{i_{n+1}}) \ : \ P[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \prod_{j=1}^{k} P[A_{i_j}] \\ \text{mit } A_{i_j} \in S(G_{i_j}) \text{ für } 1 \leq j \leq n+1, A_{i_j} \in G_{i_j} \text{ für } j \geq n+2 \end{array} \right\}$$

Nach Voraussetzung ist $G_{i_{n+1}} \subset D_{i_{n+1}}$.
Aus $A \in D_{i_{n+1}}$ folgt $A^C \in D_{i_{n+1}}$

$$\begin{aligned}
& P\left[A_{i_1} \cap \ldots \cap A^C_{i_{n+1}} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right] \\
= \quad & P\left[A_{i_1} \cap \ldots \cap W \cap \ldots \cap A_{i_k}\right] - P\left[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right] \\
\stackrel{A \in D_{i_{k-1}}}{=} \quad & P[W] \prod_{j=1, j \neq n+1}^{k} P[A_{i_j}] - P[A_{i_{n+1}}] \prod_{j=1}^{k} P[A_{i_j}] \\
= \quad & P[A^C_{i_{n+1}}] \prod_{j=1, j \neq n+1}^{k} P[A_{i_j}]
\end{aligned}$$

Aus $B_{j,i_{n+1}} \in D_{i_{n+1}}$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} B_{j,i_{n+1}} \in D_{i_{n+1}}$:

$$\begin{aligned}
& P\left[A_{i_1} \cap \ldots \cap \sum_{j=1}^{\infty} B_{j,i_{n+1}} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right] \\
= \quad & \sum_{j=1}^{\infty} P\left[A_{i_1} \cap \ldots \cap B_{j,i_{n+1}} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right] \\
\overset{B_{j,i_{n+1}} \in D_{i_{n+1}}}{=} \quad & \sum_{j=1}^{\infty} P[B_{j,i_{n+1}}] \prod_{j=1, j \neq n+1}^{k} P[A_{i_j}] \\
= \quad & P\left[\sum_{j=1}^{\infty} B_{j,i_{n+1}}\right] \prod_{j=1, j \neq n+1}^{k} P[A_{i_j}]
\end{aligned}$$

Wegen $(A, B \in G_{i_{n+1}} \Rightarrow A \cap B \in G_{i_{n+1}})$ gilt

$$D(G_{i_{n+1}}) = S(G_{i_{n+1}})$$

■

**Satz 43.3** *Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine unabhängige Familie von durchschnittsstabilen Mengensystemen in S. Gilt $I = \bigoplus_{k \in K} I_k$ so sind die*

$$S_k := S\left(\bigcup_{i \in I_k} G_i\right)$$

*unabhängig.*

**Beweis.** Zeige $\left(\bigcup_{i \in I_k} G_i\right)_{k \in K}$ ist unabhängig.
Das Problem dabei: Es gilt nicht

$$A, B \in \bigcup_{i \in I_k} G_i \Rightarrow A \cap B \in \bigcup_{i \in I_k} G_i$$

Setze deshalb für $k \in K$

$$E_k = \left\{\bigcap_{i \in J} A_i \mid J \subset I_k \text{ endlich}, A_i \in G_i\right\}$$

Dann gilt

$$\bigcap_{i \in J_1} A_i \cap \bigcap_{i \in J_2} A_i = \bigcap_{i \in J_1 \cup J_2 \subset I_k} A_i \in E_k$$

Für $\{k_1, \ldots, k_n\} \subset K$ und $C_{k_j} = \bigcap_{i \in J_{k_j}} A_i \in E_{k_j}$ gilt

$$\begin{aligned}
& P[C_{k_1} \cap \ldots \cap C_{k_n}] \\
= \quad & P\left[\bigcap_{i \in J_{k_1}} A_i \cap \ldots \cap \bigcap_{i \in J_{k_n}} A_i\right] \\
\overset{(G_i)_{i \in I} \text{ unabhängig}}{=} \quad & \prod_{i \in J_{k_1}} P[A_i] \cdot \ldots \cdot \prod_{i \in J_{k_n}} P[A_i] \\
\overset{(G_i)_{i \in I} \text{ unabhängig}}{=} \quad & P[C_{k_1}] \cdot \ldots \cdot P[C_{k_n}]
\end{aligned}$$

Damit sind $(E_k)_{k \in K}$ unabhängig. Damit ist

$$(S(E_k))_{k \in K} = \left(S\left(\bigcup_{i \in I_k} G_i\right)\right)_{k \in K}$$

unabhängig.

■

# 44. 0-1-Gesetze

**Satz 44.1** *Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Ereignissen in S.*
*a) Die Wahrscheinlichkeit, daß unendlich viele Ereignisse eintreten ist Null.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[A_k] < \infty \Rightarrow P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right] = 0$$

*b) Die Wahrscheinlichkeit, daß fast alle Ereignisse eintreten, ist Eins.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left[A_k^C\right] < \infty \Rightarrow P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k\right] = 1$$

**Beweis.** a) Da $\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)_n$ monoton fallend ist und die Reihe einen Grenzwert hat, gilt

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right] &= \lim_{n \to \infty} P\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right] \\ &\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P[A_k] \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k\right] \\ = \; & 1 - P\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k\right)^C\right] \\ = \; & 1 - P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^C\right] \\ \overset{a)}{=} \; & 1 \end{aligned}$$

■

**Satz 44.2** *Seien $(A_n)_n$ **unabhängig** in S.*
*c) Mit Wahrscheinlichkeit 1 treten unendlich viele der Ereignisse $A_i$ ein.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[A_k] = \infty \Rightarrow P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\right] = 1$$

*d) Die Wahrscheinlichkeit, daß fast alle Ereignisse eintreten, ist Null.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[A_k^C] = \infty \Rightarrow P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k\right] = 0$$

*e)*

$$P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\right], P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k\right] \in \{0,1\}$$

**Beweis.** c) Gehe über die Komplemente.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^C\right)_N$ monoton fallend ist und da die $A_k$ unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{k\geq n} A_k^C\right] &\overset{\text{monoton} \downarrow}{=} \lim_{N\to\infty} P\left[\bigcap_{k=n}^{N} A_k^C\right] \\
&\overset{\text{unabhängig}}{=} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} P[A_k^C] \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - P[A_k]) \\
&\overset{1-x\leq e^{-x}}{\leq} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \exp(-P[A_k]) \\
&= \lim_{N\to\infty} \exp\left(-\underbrace{\sum_{k=n}^{N} P[A_k]}_{\to\infty}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_n$ monoton fallend ist, folgt

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k\right] &= \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{k\geq n} A_k\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - P\left[\bigcap_{k\geq n} A_k^C\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n} A_k\right] &= 1 - P\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n} A_k\right)^C\right] \\
&= 1 - P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k^C\right] \\
&\overset{c)}{=} 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

e) Mit c) und a) bzw mit b) und d). ∎

# 45. Übergangskerne

**Satz 45.1** *Seien* $W_1, W_2$ *abzählbar,* $P$ *ein Maß auf* $W_1 \times W_2$ *und*

$$X_i : W_1 \times W_2 \to W_i, (x_1, x_2) \mapsto x_i$$

*Dann gilt*

$$\underbrace{P[A]}_{\textit{Maß auf } W_1 \times W_2}$$

$$= \sum_{x_1 \in W_1} \left( \sum_{x_2 \in W_2} 1_A(x_1, x_2) \underbrace{P[X_2 = x_2 | X_1 = x_1]}_{\textit{Maß auf } W_2} \right) \underbrace{P[X_1 = x_1]}_{\textit{Maß auf } W_1}$$

**Beweis.** Für $P[X_1 = x_1] > 0$ gilt

$$P[X_2 = x_2 | X_1 = x_1] = \frac{P[X_2 = x_2 \cap X_1 = x_1]}{P[X_1 = x_1]} = \frac{P[(x_1, x_2)]}{P[X_1 = x_1]}$$

d.h.

$$\begin{aligned} P[A] &= \sum_{(x_1, x_2) \in W_1 \times W_2} 1_A(x_1, x_2) P[(x_1, x_2)] \\ &= \sum_{x_1 \in W_1} \left( \sum_{x_2 \in W_2} 1_A(x_1, x_2) P[X_2 = x_2 | X_1 = x_1] \right) P[X_1 = x_1] \end{aligned}$$

■

Das verallgemeinern wir:

**Definition 45.2**

$$K : W_1 \times S_2 \to [0, 1], (w_1, A_2) \mapsto K(w_1, A_2)$$

*heißt* ***Übergangskern*** *von* $(W_1, S_1)$ *auf* $(W_2, S_2)$ $\iff$
*a)* $\forall w_1 \in W_1 :\ K(w_1, \cdot)$ *ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(W_2, S_2)$
*b)* $\forall A_2 \in S_2 :\ K(\cdot, A_2)$ *ist* $S_1$*-messbar*

**Bemerkung 45.3** *a)* $K(w_1, \cdot)$ *ist das Wahrscheinlichkeitsmaß in Schritt 2 falls in Schritt 1 der Zustand* $w_1$ *vorlag.*
*b) Da* $K(\cdot, A_2)$ $S_1$*-messbar ist, ist*

$$\int K(w_1, A_2) P_1(dw_1)$$

*definiert.*

**Satz 45.4** *Sei $P_1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(W_1, S_1)$ und $K$ ein Übergangskern von $(W_1, S_1)$ nach $(W_2, S_2)$. Dann gilt*
*a) Es existiert ein eindeutiges Maß*

$$P : (W_1 \times W_2, S_1 \otimes S_2) \to [0,1], A \mapsto \int_{W_1} K(w_1, A_{w_1}) P_1(dw_1)$$

*mit dem Schnitt von $A$ bei $w_1$*

$$A_{w_1} = \{w_2 \in W_2 : (w_1, w_2) \in A\}$$

*b) Für alle $f : (W_1 \times W_2, S_1 \otimes S_2) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $f \geq 0$ gilt*

$$\int f dP = \int_{W_1} \left( \int_{W_2} f(w_1, w_2) K(w_1, dw_2) \right) P_1(dw_1)$$

*Bezeichnung: $P = P_1 \times K$.*

**Bemerkung 45.5** *Wie immer legt man das Maß auf den Rechtecken fest:*

$$\forall A_i \in S_i : \quad P[A_1 \times A_2] := \int_{A_1} K(w_1, A_2) P_1(dw_1)$$

**Beweis. a) 1.) Für alle $A \in S$ gilt $A_{w_1} \in S_2$.** Sei

$$g_{w_1} : (W_2, S_2) \to (W_1 \times W_2, S_1 \otimes S_2), w_2 \mapsto (w_1, w_2)$$

Es gilt

$$\begin{array}{rl} & g_{w_1}^{-1}(A_1 \times A_2) \\ = & \{w_2 \in W_2 : (w_1, w_2) \in A_1 \times A_2\} \\ = & \begin{cases} \emptyset & w_1 \notin A_1 \\ A_2 & w_1 \in A_1 \end{cases} \\ \in & S_2 \end{array}$$

Da $A_1 \times A_2$ ein Erzeugendensystem von $S_1 \otimes S_2$ ist, ist $g_{w_1}$ $(S_2, S_1 \otimes S_2)$-messbar.
Sei $A \in S_1 \otimes S_2$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} A_{w_1} & = & \{w_2 \in W_2 : (w_1, w_2) \in A\} \\ & = & g_{w_1}^{-1}(A) \in S_2 \end{array}$$

**2.) D ist eine schnittleere abzählbare Algebra, die $S_1 \otimes S_2$ enthält.** Setze

$$\begin{array}{rcl} D & = & \{A \in S_1 \otimes S_2 : w_1 \mapsto K(w_1, A_{w_1}) \text{ ist } S_1 - \text{ messbar}\} \\ & \subset & S_1 \otimes S_2 \end{array}$$

**i)** $A_1 \times A_2 \in D$ und $W_1 \times W_2 \in D$. Wegen

$$\begin{array}{l} 1_{A_1}(w_1) \text{ ist } S_1\text{-messbar, da } A_1 \in S_1 \\ K(w_1, A_2) \text{ ist } S_1\text{-messbar, als Übergangskern, da } A_2 \in S_2 \end{array}$$

ist

$$\begin{aligned} K(w_1, (A_1 \times A_2)_{w_1}) &= \begin{cases} K(w_1, A_2) & \text{für } w_1 \in A_1 \\ K(w_1, \emptyset) = 0 & \text{für } w_1 \notin A_1 \end{cases} \\ &= 1_{A_1}(w_1) \cdot K(w_1, A_2) \end{aligned}$$

$S_1$-messbar.
**ii)** Aus $A \in D$ folgt $A^C \in D$: Wegen

$$A^C|_{w_1} = g_{w_1}^{-1}(A^C) = (g_{w_1}^{-1}(A))^C = (A|_{w_1})^C$$

ist

$$K\left(w_1, A^C|_{w_1}\right) = K\left(w_1, (A_{w_1})^C\right) \stackrel{\text{W.Maß}}{=} 1 - \underbrace{K(w_1, A_{w_1})}_{S_1\text{-messbar}}$$

$S_1$-messbar.
**iii)** Aus $A_i \in D$ folgt $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in D$: Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i|_{w_1} = \sum_{i=1}^{\infty} g_{w_1}^{-1}(A_i) = g_{w_1}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)\Bigg|_{w_1}$$

ist

$$\begin{aligned} K\left(w_1, \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)\Bigg|_{w_1}\right) &= K\left(w_1, \sum_{i=1}^{\infty} A_i|_{w_1}\right) \\ &\stackrel{\text{W.Maß}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{K(w_1, A_i|_{w_1})}_{\geq 0, S_1\text{-messbar}} \end{aligned}$$

als monotoner Grenzwert der $S_1$-messbaren Funktionen $\sum_{i=1}^{n} K(w_1, A_i|_{w_1})$
$S_1$-messbar.
Da

$$\{A_1 \times A_2 : A_i \in S_i\}$$

ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $S_1 \otimes S_2$ ist, gilt

$$\begin{aligned} S_1 \otimes S_2 &\stackrel{\text{Definition}}{=} S(\{A_1 \times A_2 : A_i \in S_i\}) \\ &\stackrel{A_1 \times A_2 \text{ durchschnittsstabil}}{=} D(\{A_1 \times A_2 : A_i \in S_i\}) \\ &\subset D \\ &\subset S_1 \otimes S_2 \end{aligned}$$

**3.) $\int_{W_1} K(w_1, A_{w_1}) P_1(dw_1)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(W_1 \times W_2, S_1 \otimes S_2)$.**

$$\int_{W_1} \underbrace{K(w_1, \emptyset)}_{=0} P_1(dw_1) = 0$$

$$\int_{W_1} \underbrace{K(w_1, W_2)}_{=1} P_1(dw_1) = 1$$

$$\int_{W_1} \underbrace{K(w_1, A_{w_1})}_{\geq 0} P_1(dw_1) \geq 0$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_{W_1} K\left(w_1, \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)_{w_1}\right) P_1(dw_1) \\
= & \int_{W_1} K\left(w_1, \sum_{i=1}^{\infty} A_i|_{w_1}\right) P_1(dw_1) \\
= & \int_{W_1} \sum_{i=1}^{\infty} K(w_1, A_i|_{w_1}) P_1(dw_1) \\
= & \sum_{i=1}^{\infty} \int_{W_1} K(w_1, A_i|_{w_1}) P_1(dw_1)
\end{aligned}$$

**4.) Eindeutigkeit des Maßes.** Für das durchschnittsstabile Erzeugendensystem $A_1 \times A_2$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{W_1} K(w_1, (A_1 \times A_2)|_{w_1}) P_1(dw_1) &= \int_{A_1} K(w_1, A_2) P_1(dw_1) \\
&= P[A_1 \times A_2]
\end{aligned}$$

**b) 1.)** Sei $f = 1_A$ mit $A \in S_1 \otimes S_2$.

$$\begin{aligned}
\int 1_A dP &\overset{Def}{=} P[A] \\
&\overset{Def}{=} \int_{W_1} K(w_1, A_{w_1}) P_1(dw_1) \\
&\overset{Def}{=} \int_{W_1} \left(\int_{W_2} 1_{A_{w_1}} K(w_1, dw_2)\right) P_1(dw_1) \\
&\overset{Def}{=} \int_{W_1} \int_{W_2} 1_A(w_1, w_2) K(w_1, dw_2) P_1(dw_1)
\end{aligned}$$

**2.)** Seien $A_i \in S_1 \otimes S_2$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{W_2} \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i} K(w_1, dw_2) &= \int_{W_2} \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i} K(w_1, dw_2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i K(w_1, A_i|_{w_1})\end{aligned}$$

$S_1$-messbar und mit der Linearität des Integrales und 1.) gilt

$$\begin{aligned}&\int_{W_1} \left( \int_{W_2} \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i}(w_1, w_2) K(w_1, dw_2) \right) P_1(dw_1) \\ =& \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{W_1} \left( \int_{W_2} 1_{A_i}(w_1, w_2) K(w_1, dw_2) \right) P_1(dw_1) \\ =& \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{W} 1_{A_i} dP = \int_{W} \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i} dP\end{aligned}$$

**3.)** $f \geq 0$. Seien $f_n \uparrow f$ mit $f_n \in T$. Da

$$\int_{W_2} f_n K(w_1, dw_2) \uparrow \int_{W_2} f K(w_1, dw_2)$$

ist $\int_{W_2} f K(w_1, dw_2)$ als monotoner Grenzwert $S_1$-messbarer Funktionen $S_1$-messbar.
Damit ist die rechte Seite definiert. Mit 2.) gilt

$$\begin{aligned}\int_{W} f dP &\overset{\text{monoton} \uparrow}{=} \lim_{n \to \infty} \int f_n dP \\ &\overset{b)}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{W_1} \int_{W_2} f_n(w_1, w_2) K(w_1, dw_2) P_1(dw_1) \\ &\overset{\text{monoton} \uparrow}{=} \int_{W_1} \int_{W_2} f(w_1, w_2) K(w_1, dw_2) P_1(dw_1)\end{aligned}$$

■

**Satz 45.6** *Sei $P_0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(W_0, S_0)$ und $\forall i \geq 1$ sei $K_i$ ein Übergangskern von $\left(\prod_{j=0}^{i-1} W_j, \otimes_{j=0}^{i-1} S_j\right)$ nach $(W_i, S_i)$.*
*Dann existiert ein eindeutiges Maß $P^{(n)}$ auf $(\prod_{i=0}^{n} W_i, \otimes_{i=0}^{n} S_i)$ durch*

$$\forall 1 \leq i \leq n: \; P^{(i)} = P^{(i-1)} \times K_i$$

*Für ein $\otimes_{i=0}^n S_i$-messbares $f \geq 0$ gilt*

$$\begin{aligned} & \int f dP^{(n)} \\ = \quad & \int \dots \int f(x_0, \dots, x_n) K_n((x_0, \dots, x_{n-1}, dx_n) \dots K_1(x_0, dw_1) P_0(dx_0) \end{aligned}$$

**Beweis.** $i = 2$: Das haben wir im letzten Satz gezeigt.
$i - 1 \to i$: Wegen

$$\begin{aligned} & S\left(A_1 \times \ldots \times A_i : A_j \in S_j\right) \\ \subset \quad & S\left(A_{i-1} \times A_i : A_{i-1} \in \bigotimes_{j=1}^{i-1} S_j, A_i \in S_i\right) \\ \overset{\text{Definition}}{=} \quad & \left(\bigotimes_{j=1}^{i-1} S_j\right) \otimes S_i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S\left(A_1 \times \ldots \times A_{i-1} \times W_i : A_j \in S_j\right) \quad & \subset \quad S(A_1 \times \ldots \times A_i : A_j \in S_j) \\ \left(\bigotimes_{j=1}^{i-1} S_j\right) \times W_i \quad & \subset \quad \bigotimes_{j=1}^{i} S_j \\ \left(\bigotimes_{j=1}^{i-1} S_j\right) \times A_i \quad & \subset \quad \bigotimes_{j=1}^{i} S_j \\ \left(\bigotimes_{j=1}^{i-1} S_j\right) \otimes S_i \quad & \subset \quad \bigotimes_{j=1}^{i} S_j \end{aligned}$$

gilt $\exists! P^{(i)} := P^{(i-1)} \times K_i$ auf

$$\left(\prod_{j=0}^{i} W_j \left(\bigotimes_{j=0}^{i-1} S_j\right) \otimes S_i\right) = \left(\prod_{j=0}^{i} W_j, \bigotimes_{j=0}^{i} S_j\right)$$

■

**Satz 45.7** *Sei $P_0$ ein Maß auf $(W_0, S_0)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n$ ein Übergangskern von $\left(\prod_{i=0}^{n-1} W_i, \otimes_{i=0}^{n-1} S_i\right)$ nach $(\prod_{i=0}^{n} W_i, \otimes_{i=0}^{n} S_i)$. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\prod_{i=0}^{\infty} W_i, \otimes_{i=0}^{\infty} S_i)$ mit*

$$\forall A^{(n)} \in \bigotimes_{i=0}^{n} S_i : \; P[A^{(n)} \times W_{n+1} \times \ldots] = P^{(n)}[A^{(n)}]$$

*Bis zum Zeitpunkt n verhält sich $P$ wie $P^{(n)}$.*

**Beweis. 1.) Der linke Wert ist unabhängig von n:**
Sei $A^{(n)} = A^{(n-1)} \times W_n$ mit $A^{(n-1)} \in \otimes_{i=1}^{n-1} S_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
P^{(n)}[A^{(n)}] &= \int 1_{A^{(n-1)} \times W_n} K_n((x_0, \ldots x_{n-1}), dx_n) \\
&\quad P^{(n-1)}(d(x_0, \ldots, x_{n-1})) \\
&= \int 1_{A^{(n-1)}} \left( \int 1_{W_n} K_n((x_0, \ldots x_{n-1}), dx_n) \right) \\
&\quad P^{(n-1)}(d(x_0, \ldots, x_{n-1})) \\
&= \int 1_{A^{(n-1)}} \underbrace{K_n((x_0, \ldots x_{n-1}), W_n)}_{=1} P^{(n-1)}(d(x_0, \ldots, x_{n-1})) \\
&= P^{(n-1)}[A^{(n-1)}]
\end{aligned}$$

Sei $k < n$. Für $A^{(k)} \in \otimes_{i=1}^{k} S_i \cap \otimes_{i=1}^{n} S_i$ folgt in $n-k$ Schritten

$$P^{(n)}[A^{(k)} \times W_{k+1} \times \ldots \times W_n] = P^k[A^{(k)}]$$

**2.) P ist additiv auf dem Ring:** $\forall n \in \mathbb{N}$ ist

$$T_n = \bigotimes_{i=0}^{n} S_i \times W_{n+1} \times \ldots$$

eine abzählbare Algebra auf $\prod_{i=0}^{\infty} W_n$ und es gilt

$$T_n \subset T_{n+1}$$

Für $A, B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ gilt

$$\exists n, m \in \mathbb{N}: \; A \in T_m, B \in T_n$$

Sei $m \leq n$. Da $T_n$ eine abzählbare Algebra ist, gilt

$$A + B, A \backslash B, A \cap B \in T_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$$

Für $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned}
P[A + B] &\overset{\text{Def}}{=} P^{(n)}\left[(A \times W_{m+1} \times \ldots \times W_n + B) \times W_{n+1} \times \ldots\right] \\
&= P^{(n)}[A \times W_{m+1} \times \ldots \times W_n] + P^{(n)}[B] \\
&\overset{s.o.}{=} P^{(m)}[A] + P^{(n)}[B] \\
&= P[A] + P[B]
\end{aligned}$$

d.h. P ist additiv auf dem Ring $\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.
**3.) Eindeutigkeit von P:** Da $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $S\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$ ist.
**4.) Existenz:** P läßt sich auf $S\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$ fortsetzen, wenn es abzählbar additiv auf dem Ring $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ ist.
Da P als Wahrscheinlichkeitsmaß ein endliches Maß ist, zeige die Stetigkeit von oben: Seien $A_n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ und $A_n \downarrow A$.

$$\text{Aus } A = \emptyset \text{ folgt } \lim_{n\to\infty} P[A_n] = 0$$

Verneinung ergibt:

$$\text{Aus } \lim_{n\to\infty} P[A_n] \neq 0 \text{ folgt } A \neq \emptyset$$

Sei also $\lim_{n\to\infty} P[A_n] > 0$. Da $A_n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k_n \in \mathbb{N} :\ A_n \in T_{k_n}$$

d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n = A^{(k_n)} \times W_{k_n+1} \ldots$$

Wähle $k_{n+1} \geq k_n$. Wegen $A^{(k_{n+1})} \subset A^{(k_n)} \times W_{k_n+1} \times \ldots \times W_{k_{n+1}}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \int \ldots \int 1_{A^{(k_{n+1})}}(x_0, \ldots, x_{k_{n+1}}) K_{k_{n+1}}((x_0, \ldots, x_{k_{n+1}-1}), dx_{k_{n+1}}) \\
& \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1) \\
\leq\ & \int \ldots \int 1_{A^{(k_n)} \times W_{k_n+1} \times \ldots \times W_{k_{n+1}}}(x_0, \ldots, x_{k_{n+1}}) \\
& K_{k_{n+1}}((x_0, \ldots, x_{k_{n+1}-1}), dx_{k_{n+1}}) \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1) \\
=\ & \int \ldots \int 1_{A^{(k_n)}}(x_0, \ldots, x_{k_n}) \\
& K_{k_n}((x_0, \ldots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1)
\end{aligned}$$

und

$$\left( \int \ldots \int 1_{A^{(k_n)}}(x_0, \ldots, x_{k_n}) K_{k_n}((x_0, \ldots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1) \right)_{k_n}$$

ist monoton fallend, ist in [0,1] und hat daher für alle $x_0 \in W_0$ einen Grenzwert in [0,1]. Annahme:

$$\begin{aligned}
\forall x_0 \in W_0 : \quad & \lim_{k_n\to\infty} \int \ldots \int 1_{A^{(k_n)}}(x_0, \ldots, x_{k_n}) \\
& K_{k_n}((x_0, \ldots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1) = 0
\end{aligned}$$

Da $|1_{A^{(k_n)}}| \leq 1_W \in L^1$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
0 &< \lim_{n\to\infty} P[A_n] \\
&= \lim_{k_n\to\infty} P^{(k_n)}[A^{(k_n)}] \\
&= \lim_{k_n\to\infty} \int_{W_0} \dots \int_{W_{k_n}} 1_{A^{(k_n)}}(x_0, \dots, x_{k_n}) \\
&\quad K_{k_n}((x_0, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1) P_0(dx_0) \\
&\overset{|1_{A^{(k_n)}}| \leq 1_W \in L^1}{=} \int_{W_0} \lim_{k_n\to\infty} \int_{W_1} \dots \int_{W_{k_n}} 1_{A^{(k_n)}}(x_0, \dots, x_{k_n}) \\
&\quad K_{k_n}((x_0, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1) P_0(dx_0) \\
&= \int_{W_0} 0 dP_0 = 0
\end{aligned}$$

ein Widerspruch, d.h.

$$\begin{aligned}
\exists \overline{x}_0 \in W_0 : \lim_{k_n\to\infty} \int \dots \int 1_{A^{(k_n)}}(x_0, \dots, x_{k_n}) \\
K_{k_n}((x_0, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot K_1(x_0, dx_1) > 0
\end{aligned}$$

Halte $\overline{x}_0$ fest.
$k \to k+1$: Wegen $A^{(k_{n+1})} \subset A^{(k_n)} \times W_{k_n+1} \times \ldots \times W_{k_{n+1}}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{W_{k+2}} \dots \int_{W_{k_{n+1}}} 1_{A^{(k_{n+1})}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_{n+1}}) \\
&K_{k_{n+1}}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_{n+1}-1}), dx_{k_{n+1}}) \cdot \ldots \cdot \\
&K_{k+2}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}), dx_{k+2}) \\
\leq &\int_{W_{k+2}} \dots \int_{W_{k_{n+1}}} 1_{A^{(k_n)} \times W_{k_n+1} \times \ldots \times W_{k_{n+1}}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_{n+1}}) \\
&K_{k_{n+1}}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_{n+1}-1}), dx_{k_{n+1}}) \cdot \ldots \cdot \\
&K_{k+2}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}), dx_{k+2}) \\
= &\int_{W_{k+2}} \dots \int_{W_{k_n}} 1_{A^{(k_n)}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n}) \\
&K_{k_n}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \\
&\cdot \ldots \cdot K_{k+2}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}), dx_{k+2})
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{W_{k+2}} \cdots \int_{W_{k_n}} 1_{A^{(k_n)}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n}) \\
&K_{k_n}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \\
&\cdot \ldots \cdot K_{k+2}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}), dx_{k+2})\Big)_{k_n}
\end{aligned}
$$

ist monoton fallend in $k_n$, ist in $[0,1]$ und hat daher für alle $x_{k+1} \in W_{k+1}$ einen Grenzwert in $[0,1]$.
Annahme:

$$
\begin{aligned}
\forall x_{k+1} \in W_{k+1} : \lim_{k_n \to \infty} \int_{W_{k+2}} \cdots \int_{W_{k_n}} & 1_{A^{(k_n)}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n}) \\
K_{k_n}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) & \cdot \ldots \cdot \\
K_{k+2}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}), dx_{k+2}) &= 0
\end{aligned}
$$

Da $|1_{A^{(k_n)}}| \leq 1_W \in L^1$ ist, folgt dann

$$
\begin{aligned}
& 0 = \int_{W_{k+1}} 0 dK_{k+1} \\
= \quad & \int_{W_{k+1}} \lim_{k_n \to \infty} \int_{W_{k+2}} \cdots \int_{W_{k_n}} \\
& 1_{A^{(k_n)}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n}) \\
& K_{k_n}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot \\
& K_{k+1}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k), dx_{k+1}) \\
\overset{|1_{A^{(k_n)}}| \leq 1_W \in L^1}{=} \quad & \lim_{k_n \to \infty} \int_{W_{k+1}} \cdots \int_{W_{k_n}} 1_{A^{(k_n)}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n}) \\
& K_{k_n}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \cdot \ldots \cdot \\
& K_{k+1}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k), dx_{k+1}) \\
\overset{\text{Vor für } k}{>} \quad & 0
\end{aligned}
$$

ein Widerspruch, d.h. $\forall k \geq 0 \ \exists \overline{x}_k \in W_k$ :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k_n \to \infty} \int_{W_{k+1}} \cdots \int_{W_{k_n}} 1_{A^{(k_n)}}(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n}) \\
&K_{k_n}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_n-1}), dx_{k_n}) \\
&\cdot \ldots \cdot K_{k+1}((\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_k), dx_{k+1}) > 0
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\forall k_n \geq 0 : (\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots) &\in A^{(k_n)} \\
(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots) &\in \bigcap_{k_n=1}^{\infty} A^{(k_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \\
\emptyset &\neq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

■

**Satz 45.8** *Für*

$$X_i : (W_1 \times W_2, S_1 \otimes S_2) \to W_i, (w_1, w_2) \mapsto w_i$$

*gilt*

$$\begin{aligned}
P_1[\cdot] &= P_1 \times K[X_1^{-1}(\cdot)] \\
P[X_2^{-1}(\cdot)] &= \int K(w_1, \cdot) P_1(dw_1)
\end{aligned}$$

**Beweis.** $\forall A_1 \in S_1$ gilt

$$\begin{aligned}
P[X_1^{-1}(A_1)] &= P[A_1 \times W_2] \\
&= \int_{A_1} \underbrace{K(w_1, W_2)}_{=1} P_1(dx) \\
&= P_1[A_1]
\end{aligned}$$

und $\forall A_2 \in S_2$ gilt

$$P[X_2^{-1}(A_2)] = P[W_1 \times A_2] = \int K(w_1, A_2) P_1(dw_1)$$

■

**Beispiel 45.9** *Sei* $T : (W_1, S_1) \to (W_2, S_2)$ *und* $\delta_y$ *das Punktmaß in* $y$*. Dann ist*

$$K(x_1, \cdot) = \delta_{T(x_1)}$$

*ein Übergangskern.*
*Ist das erste System im Zustand* $x_1$*, so soll das zweite System in den Zustand* $x_2 = T(x_1)$ *übergehen.*

**Beweis.** Mit

$$\begin{aligned}
\delta_{T(x_1)}(A) &= \begin{cases} 1 & T(x_1) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & x_1 \in T^{-1}(A) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \delta_{x_1}(T^{-1}(A))
\end{aligned}$$

gilt für beliebige $x_1 \in W_1$

$$\begin{aligned}
K(x_1, \emptyset) &= \delta_{x_1}(T^{-1}(\emptyset)) = \delta_{x_1}(\emptyset) = 0 \\
K(x_1, A_2) &= \delta_{x_1}(T^{-1}(A_2)) \geq 0 \\
K(x_1, W_2) &= \delta_{x_1}(T^{-1}(W_2)) = \delta_{x_1}(W_1) = 1 \\
K\left(x_1, \sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \delta_{x_1}\left(T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_1}(T^{-1}(A_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} K(x_1, A_2)
\end{aligned}$$

und $K(x_1, \cdot)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(W_2, S_2)$.
Da T messbar ist gilt $T^{-1}(A_2) \in S_1$ und

$$K(x, A_2) = 1_{T^{-1}(A_2)}(x)$$

ist $S_1$-messbar. ■

# 46. Unabhängige $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ und das Produktmaß

**Definition 46.1** *$X_i : (W, S, P) \to (V_i, T_i)$ heißen **unabhängig** $\iff$*

$$\forall \text{ endlichen } J \subset I \; \forall A_i \in T_i : \; P\left[\bigcap_{i \in J} X_i \in A_i\right] = \prod_{i \in J} P[X_i \in A_i]$$

**Satz 46.2** *$X_i : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sind **unabhängig** $\iff$*

$$\forall \text{ endlichen } J \subset I \; \forall t_i \in \mathbb{R} : \; P\left[\bigcap_{i \in J} X_i \leq t_i\right] = \prod_{i \in J} P[X_i \leq t_i]$$

**Beweis.**

$$E = \{(-\infty, t_1] \times \ldots \times (-\infty, t_n] : t_i \in \mathbb{R}\}$$

ist ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem von $\mathbb{B}^n = S(E)$ ■

**Satz 46.3** *Seien $X_i : (W, S, P) \to (V_i, T_i)$ unabhängig und $f_i : V_i \to U_i$ messbar.*
*Dann sind $f_i \circ X_i : (W, S, P) \to U_i$ unabhängig.*

**Beweis.** Sei $J \subset I$ endlich.

$$\begin{aligned} & P\left[\bigcap_{j \in J} \{f_j \circ X_j \in A_j\}\right] \\ = \; & P\left[\bigcap_{j \in J} \left\{X_j \in f_j^{-1}(A_j)\right\}\right] \\ = \; & \prod_{j \in J} P\left[X_j \in f_j^{-1}(A_j)\right] \\ = \; & \prod_{j \in J} P\left[f_j \circ X_j \in A_j\right] \end{aligned}$$

■

**Satz 46.4** *Seien $X_i : (W, S, P) \to V_i$ unabhängig und $J = \bigoplus_{k \in K} J_k$ mit $|J_k| < \infty$. Dann sind $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{J_k}})_{k \in K}$ unabhängig.*

**Beweis.** Sei $K_1 \subset K$ endlich.

$$\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{k\in K_1} (X_{i_1},\ldots,X_{I_k}) \in A_k\right] \\
= \quad & P\left[\bigcap_{k\in K_1}\bigcap_{j_k\in I_k} \{X_{j_k} \in A_{j_k}\}\right] \\
\overset{\text{unabhängig}}{=} \quad & \prod_{k\in K_1}\prod_{j_k\in I_k} P\left[X_{j_k} \in A_{j_k}\right] \\
\overset{\text{unabhängig}}{=} \quad & \prod_{k\in K_1} P\left[(X_{i_1},\ldots,X_{I_k}) \in A_k\right]
\end{aligned}$$

■

**Satz 46.5** *Seien* $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (W_n, S_n, P_n)$ *gegeben. Mit*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; K_n((x_0,\ldots,x_{n-1}),\cdot) = P_n$$

*erhalten wir das eindeutige* ***unendliche Produktmaß*** $\prod_{n=0}^{\infty} P_n$ *auf* $(\prod_{n=0}^{\infty} W_n, \otimes_{n=0}^{\infty} S_n)$ *und es gilt*

$$P_n[\cdot] = P[X_n^{-1}(\cdot)]$$

$$\forall A_i \in S_i \;\forall 0 \le i \le n: \; P\left[A_0 \times \ldots \times A_n \times W_{n+1} \times \ldots\right] = \prod_{k=0}^{n} P_k[A_k]$$

$$X_n : \prod_{n=0}^{\infty} W_n \to W_n, (w_1,\ldots) \mapsto w_n \text{ sind unabhängig bzgl. } \prod_{n=0}^{\infty} P_n$$

*Seien* $X_i : (W,S,P) \to (\mathbb{R},\mathbb{B})$ *unabhängig,* $g_i : (\mathbb{R},\mathbb{B}) \to (\mathbb{R},\mathbb{B})$ *mit* $g_i \ge 0$. *Dann gilt*

$$\int_W \prod_{i=1}^{n} (g_i \circ X_i) dP = \prod_{i=1}^{n} \int_W g_i \circ X_i dP$$

*Für* $g_i : (\mathbb{R},\mathbb{B}) \to (\mathbb{R},\mathbb{B})$ *gilt*

$$\int_W \left|\prod_{i=1}^{n} g_i \circ X_i\right| dP < \infty \Rightarrow \int_W \prod_{i=1}^{n} (g_i \circ X_i) dP = \prod_{i=1}^{n} \int_W (g_i \circ X_i) dP$$

**Beweis. a)** Wegen

$$\begin{aligned}
\forall (x_0,\ldots,x_{n-1}) : \quad & K_n((x_0,\ldots,x_{n-1}),\cdot) \\
= \quad & P_n[\cdot] \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß} \\
\forall A_n \in S_n : \quad & K_n((x_0,\ldots,x_{n-1}), A_n) \\
= \quad & P_n[A_n] \\
= \quad & \text{konstant ist } \left(\otimes_{i=0}^{n-1} S_i, \otimes_{i=0}^{n} S_i\right)\text{-messbar}
\end{aligned}$$

ist $K_n$ ein Übergangskern und es existiert das eindeutige P auf

$$\left(\prod_{n=0}^{\infty} W_n, \otimes_{n=0}^{\infty} S_n\right)$$

**b)** Wegen

$$(W_0 \times \ldots \times W_{n-1} \times A_n)|_{x_n} = A_n$$

gilt

$$\begin{aligned}
& P\left[X_n^{-1}(A_n)\right] \\
= \;& P\left[W_0 \times \ldots \times W_{n-1} \times A_n \times W_{n+1} \times \ldots\right] \\
= \;& P^{(n)}\left[W_0 \times \ldots \times W_{n-1} \times A_n\right] \\
= \;& \int_{W_0} \cdots \int_{W_{n-1}} 1_{W_0 \times \ldots \times W_{n-1}} \underbrace{\int_{W_n} 1_{A_n} K_n(dx_n)}_{=P_n[A_n]} \\
& K_{n-1}(dx_{n-1}) \cdots P_0(dx_0) \\
= \;& P_n[A_n]
\end{aligned}$$

**c)** $n = 0$: Für $A_0 \in S_0$ gilt

$$P[A_0 \times W_1 \times \ldots] = P^{(0)}[A_0]$$

$n-1 \to n$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_i \in S_i$

$$\begin{aligned}
& P\left[A_0 \times \ldots \times A_n \times W_{n+1} \ldots\right] \\
= \;& P^{(n)}\left[A_0 \times \ldots \times A_n\right] \\
= \;& \int_{W_0} \cdots \int_{W_{n-1}} 1_{A_0 \times \ldots \times A_{n-1}} \underbrace{\int_{W_n} 1_{A_n} K_n(x_0, \ldots x_{n-1}, dx_n)}_{=P_n[A_n]} \\
& K_{n-1} \ldots P_0(dx_0) \\
= \;& P_n[A_n] \cdot \int_{W_0} \cdots \int_{W_{n-1}} 1_{A_0 \times \ldots \times A_{n-1}} \\
& K_{n-1}(x_0, \ldots x_{n-2}, dx_{n-1}) \ldots P_0(dx_0) \\
= \;& P_n[A_n] \cdot P^{(n-1)}\left[A_0 \times \ldots \times A_{n-1}\right] \\
\overset{\text{Fall } n-1}{=} \;& P_n[A_n] \prod_{k=0}^{n-1} P_k[A_k] = \prod_{k=0}^{n} P_k[A_k]
\end{aligned}$$

**d)** Seien $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ mit $i_j < i_{j+1}$ und $A_{i_j} \in S_{i_j}$. Setze

$$B_i := \begin{cases} A_{i_k} & \text{für } i \in \{i_1, \ldots, i_n\} \\ W_i & \text{für } i \notin \{i_1, \ldots, i_n\} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
P\left[X_{i_j} \in A_{i_j}\right] &= P\left[W_1 \times \ldots \times W_{i_j-1} \times A_{i_j} \times W_{i_j+1} \times \ldots\right] \\
&\overset{c)}{=} \left(\prod_{k=1}^{i_j-1} \underbrace{P[W_k]}_{=1}\right) P_{i_j}\left[A_{i_j}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{n} X_{i_j} \in A_{i_j}\right] &= P\left[B_1 \times \ldots \times B_{i_n} \times W_{i_n+1} \ldots\right] \\
&\overset{c)}{=} \prod_{j=1}^{i_n} P_j[B_j] \\
&\overset{\forall i \notin \{i_1,\ldots,i_n\}:\ P_i[W_i]=1}{=} \prod_{j=1}^{n} P_{i_j}[A_{i_j}] \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \prod_{j=1}^{n} P\left[X_{i_j} \in A_{i_j}\right]
\end{aligned}$$

**e)** Durch

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ (W_n, S_n, P_n) = (W, S(X_n), P[X_n^{-1}(\cdot)])$$

erhält man das Produktmaß und es gilt

$$\begin{aligned}
& \int_W \prod_{i=1}^{n} g_i \circ X_i(w) dP \\
= \quad & \int_{W_1} \cdots \int_{W_n} \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i) K_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n) \ldots dP_1 \\
= \quad & \int_{W_1} \cdots \int_{W_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_i) \left(\int_{W_n} g_n(x_n) dP_n\right) \\
& K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, dx_{n-1}) \ldots dP_1 \\
= \quad & \left(\int_{W_n} g_n(x_n) dP_n\right) \int_{W_1} \cdots \int_{W_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_i) \\
& K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, dx_{n-1}) \ldots dP_1 \\
\overset{\text{Induktion}}{=} \quad & \prod_{i=1}^{n} \int_{W_i} g(x_i) dP_i \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} \int_W g \circ X_i dP
\end{aligned}$$

■

**Satz 46.6** *a) Seien* $X_i : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ***unabhängig*** *mit* $E[|X_i|] < \infty$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} E\left[\left|\prod_{i=1}^n X_i\right|\right] &< \infty \\ E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] &= \prod_{i=1}^n E[X_i] \\ \forall i \neq j: \; Kov(X_i, X_j) &= 0 \\ Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] &= \sum_{i=1}^n Var[X_i] \end{aligned}$$

*b) Seien* $X_i : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ***paarweise unabhängig*** *mit* $E[|X_i|] < \infty$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \forall i \neq j: \; E[|X_i X_j|] &< \infty \\ \forall i \neq j: \; E[X_i X_j] &= E[X_i]E[X_j] \\ \forall i \neq j: \; Kov(X_i, X_j) &= 0 \\ Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] &= \sum_{i=1}^n Var[X_i] \end{aligned}$$

**Beweis. a)**

$$\begin{aligned} E\left[\left|\prod_{i=1}^n X_i\right|\right] &= \int_W \prod_{i=1}^n |X_i(w)| dP \\ &= \prod_{i=1}^n \int_W |X_i| dP \\ &= \prod_{i=1}^n E[|X_i|] < \infty \\ E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] &= \int_W \prod_{i=1}^n X_i(w) dP \\ &= \prod_{i=1}^n \int_W X_i dP \\ &= \prod_{i=1}^n E[X_i] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Kov[X_i, X_j] &= E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] = 0 \\
Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Kov[X_i, X_j] \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]
\end{aligned}
$$

**b)**

$$
\begin{aligned}
E\left[|X_i X_j|\right] &= \int_W |X_i(w) X_j(w)| dP \\
&= \left(\int_W |X_i(w)| dP\right) \cdot \left(\int_W |X_j(w)| dP\right) \\
&= E[|X_i|]E[|X_j|] < \infty \\
E\left[X_i X_j\right] &= \int_W X_i(w) X_j(w) dP \\
&= \left(\int_W X_i(w) dP\right) \cdot \left(\int_W X_j(w) dP\right) \\
&= E[X_i]E[X_j]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Kov[X_i, X_j] &= E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] = 0 \\
Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Kov[X_i, X_j] \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]
\end{aligned}
$$

■

# 47. Maße mit Dichten

**Definition 47.1** *Eine Funktion* $f : (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *mit* $f \geq 0$ *und*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

*heißt* ***Wahrscheinlichkeitsdichte****. Man erhält ein Wahrscheinlichkeitsmaß durch*

$$P(A) = \int_A f(x)dx$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
P[A] &= \int 1_A f(x)dx \geq 0 \\
P[\emptyset] &= \int 1_\emptyset f(x)dx = \int 0dx = 0 \\
P[W] &= \int 1_W f(x)dx = 1 \\
P\left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right] &= \int 1_{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx \\
&= \int \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} f(x)dx \\
&\overset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int 1_{A_i} f(x)dx
\end{aligned}$$

■

**Satz 47.2**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{-x^2}{2} dx = \sqrt{2\pi}$$

**Beweis.** In der Einführung haben wir gezeigt: Mit

$$t : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, (r, a) \mapsto (r \cos a, r \sin a)$$

gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f dl^2 = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} f(t(r, a))rdrda$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\frac{-x^2}{2}dx\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} \exp\frac{-x^2}{2}dx \int_{\mathbb{R}} \exp\frac{-y^2}{2}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\frac{-x^2}{2} \exp\frac{-y^2}{2} dl^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\frac{-(x^2+y^2)}{2} dl^2 \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} \exp\left(\frac{-r^2(\cos^2 a + \sin^2 a)}{2}\right) rdrda \\
&= \int_{(0,2\pi)} da \int_{(0,\infty)} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) rdr \\
&= 2\pi \cdot \left(\lim_{r\to\infty} - \exp\frac{-r^2}{2} + \exp\frac{-0^2}{2}\right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

■

**Beispiel 47.3** *1.) Die* ***Gleichverteilung*** *auf [a,b] hat die Dichte*

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$$

*2.) Die* ***Normalverteilung*** $N(a, s^2)$ *hat die Dichte*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right)$$

*3.) Die Dichte der* ***Exponentialverteilung*** *für* $a \in (0, \infty)$ *ist*

$$f(x) = a \cdot \exp(-ax) \cdot 1_{[0,\infty)}(x)$$

**Beweis.** 1.)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

2.) Mit

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x-a}{s} \\
x &= sy + a \\
dx &= sdy
\end{aligned}$$

gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 1$$

3.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \cdot e^{-ax} \cdot 1_{[0,\infty)}(x)dx = \lim_{x\to\infty} -e^{-ax} + e^{-0x} = 1$$

■

# 48. $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit Dichten

**Definition 48.1** *$X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ hat die Dichte $f$*

$$\begin{aligned} &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}: \ P[X^{-1}(-\infty, x]] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &\iff \quad \forall A \in \mathbb{B}: \ P[X^{-1}(A)]] = \int_A f(t)dt \end{aligned}$$

**Beweis.** Die beiden Maße sind auf dem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem

$$\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$$

gleich. ■

**Satz 48.2** *Sei $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Dichte $f$ und $g : (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Für*

$$\int |g \circ X| dP = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| f(t)dt < \infty$$

*gilt*

$$E[g \circ X] = \int g \circ X dP = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt$$

**Beweis.** Sei $A \in \mathbb{B}$. Dann gilt mit der Rechenregel für die Integration im (Ur-)Bildraum

$$\begin{aligned} \int 1_A \circ X dP &= \int 1_A dP[X^{-1}(\cdot)] \\ &= P[X^{-1}(A)] \\ &\overset{\text{Definition von } f}{=} \int 1_A(t)f(t)dt \end{aligned}$$

Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in T$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \circ X dP &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int 1_{A_i} \circ X dP \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int 1_{A_i}(t)f(t)dt \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(t)f(t)dt \end{aligned}$$

Sei $g \geq 0$ messbar und $g_n \in T$ mit $g_n \uparrow g$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int g \circ X dP &= \int \lim_{n\to\infty} g_n \circ X dP \\
&= \lim_{n\to\infty} \int g_n \circ X dP \\
&= \lim_{n\to\infty} \int g_n(t) f(t) dt \\
&= \int \lim_{n\to\infty} g_n(t) f(t) dt \\
&= \int g(t) f(t) dt
\end{aligned}$$

■

**Definition 48.3** *Sei $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit Dichte f. Für*

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t) dt < \infty$$

*gilt*

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt \\
Var[X] &= \int_{\mathbb{R}} (t - E[X])^2 f(t) dt
\end{aligned}$$

**Beispiel 48.4 (Erwartungswerte und Varianzen)**

| | *Dichte* | $E[X]$ | $Var[X]$ |
|---|---|---|---|
| *Gleichverteilung* | $\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| $N(a, s^2)$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right)$ | $a$ | $s^2$ |
| *Exponentialverteilung* | $a \cdot \exp(-ax) \cdot 1_{[0,\infty)}(x)$ | $\frac{1}{a}$ | $\frac{1}{a^2}$ |

**Beweis. a)**

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2} \\
E[X^2] &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \\
Var[X] &= \frac{1}{12}(4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2) \\
&= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} \\
&= \frac{(a-b)^2}{12}
\end{aligned}
$$

**b)** Mit

$$
\begin{aligned}
u &= (x-a)/s \\
x &= su+a \\
dx &= sdu
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{s^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\int_{-\infty}^{\infty}(su+a)e^{-u^2/2}sdu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{u\to\infty} -e^{-u^2/2}s - \lim_{u\to-\infty} -e^{-u^2/2}s + a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}du\right) \\
&= a
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[(X-a)^2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\int_{-\infty}^{\infty}(X-a)^2\exp\left(-\frac{(X-a)^2}{2s^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\int_{-\infty}^{\infty} s^2u^2e^{-u^2/2}sdu \\
&= \frac{s^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{u\to\infty} -ue^{-u^2/2} - \lim_{u\to-\infty} -ue^{-u^2/2} - \int_{-\infty}^{\infty}(-e^{-u^2/2})du\right) \\
&= s^2
\end{aligned}
$$

**c)**

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x 1_{[0,\infty)}(x) a e^{-ax} dx \\
&= \lim_{x\to\infty} -xe^{-ax} - 0 - \int_0^{\infty} -e^{-ax} dx \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a} e^{-ax} - \frac{1}{a} e^{-a0} = \frac{1}{a} \\
E[X^2] &= \int_0^{\infty} x^2 a e^{-ax} dx \\
&= -x^2 e^{-ax}|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2xe^{-ax} \\
&= 2\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{2}{a} E[X] \\
Var[X] &= \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}
\end{aligned}
$$

■

**Beispiel 48.5** *Sei* $P[X^{-1}(\cdot)] = N(a, s^2)$ *und* $c \neq 0$*. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
P[(X-b)^{-1}(\cdot)] &= N(a-b, s^2) \\
P[(cX)^{-1}(\cdot)] &= N(ca, c^2 s^2)
\end{aligned}
$$

**Beweis.** a) Sei $P[Y^{-1}(\cdot)] = N(a-b, s^2)$

$$
\begin{aligned}
P[X - b \leq t] &= P[X \leq t + b] \\
&= \int_{-\infty}^{t+b} \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right) dx \\
&\overset{u=x-b}{=} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \exp\left(-\frac{(u+b-a)^2}{2s^2}\right) du \\
&= P[Y \leq t]
\end{aligned}
$$

b) Sei $P[Y^{-1}(\cdot)] = N(ca, c^2s^2)$ und $c > 0$.

$$\begin{aligned}
P[cX \le t] &= P\left[X \le \frac{t}{c}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{t}{c}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right) dx \\
&\overset{u=cx}{=} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{\left(\frac{u}{c}-a\right)^2}{2s^2}\right) \frac{1}{c} du \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}cs} \exp\left(-\frac{(u-ca)^2}{2c^2s^2}\right) du \\
&= P[Y \le t]
\end{aligned}$$

und für $c < 0$

$$\begin{aligned}
P[cX \le t] &= P\left[X \ge \frac{t}{c}\right] \\
&= \int_{\frac{t}{c}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right) dx \\
&\overset{u=cx}{=} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{\left(\frac{u}{c}-a\right)^2}{2s^2}\right) \frac{1}{c} du \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}cs} \exp\left(-\frac{(u-ca)^2}{2c^2s^2}\right) du \\
&= P[Y \le t]
\end{aligned}$$

■

**Definition 48.6** *a) Ein integrierbares $f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $f \ge 0$ heißt **n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte** $\Longleftrightarrow$*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \\
&= 1
\end{aligned}$$

*b) $X_1, \ldots, X_n$ haben die **gemeinsame n-dimensionale Dichte f** $\Longleftrightarrow$*

$$\begin{aligned}
\forall t_1, \ldots, t_n : \quad & P[X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n] \\
&= \int_{(-\infty,t_1]\times\ldots\times(-\infty,t_n]} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{t_n} \cdots \int_{-\infty}^{t_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n
\end{aligned}$$

**Satz 48.7** *$X_1, \dots, X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ haben die gemeinsame n-dimensionale Dichte $f$ $\iff$*

$$\forall A \in \mathbb{B}^n : \ P[(X_1, \dots X_n) \in A] = \int_A f(x)dx$$

**Beweis.** P ist festgelegt durch das durchschnittsstabile Erzeugendensystem

$$E = \{(-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_n] : t_i \in \mathbb{R}\}$$

von $\mathbb{B}^n = S(E)$. ■

**Satz 48.8** *Seien $X_1, \dots, X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit Dichten $f_i$.*
*$X_1, \dots X_n$ sind unabhängig $\iff$*
*Es gibt eine gemeinsame Dichte f und diese hat die Form*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

**Beweis.** "$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} & P[X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n] \\ = & \prod_{i=1}^{n} P[X_i \le t_i] \\ = & \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_i} f_i(x_i)dx_i \\ = & \int_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_n]} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Somit ist $\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ die gemeinsame Dichte.
"$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned} & P[X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n] \\ = & \int_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_n]} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)dx_1 \dots dx_n \\ = & \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_i} f_i(x_i)dx_i \\ = & \prod_{i=1}^{n} P[X_i \le t_i] \end{aligned}$$

■

# 49. Faltung

**Definition 49.1** *Seien $f, g \in L^1$ mit $f \geq 0$ und $g \geq 0$. Setze*

$$f * g : \mathbb{R} \to [0, \infty), z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(z-x)dx$$

**Satz 49.2** *Seien $X, Y : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$* ***unabhängig*** *mit Dichten f,g. Dann hat $X + Y$ die Dichte $f * g$*

**Beweis.** Da $X, Y$ unabhängig sind, haben sie die gemeinsame Dichte $f(x)g(y)$. Da $f, g \geq 0$ sind die Integrale vertauschbar und mit

$$\begin{aligned} y &= z - x \\ dz &= dy \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} P[X + Y \leq t] &= P[Y \leq t - X] \\ &= \int_{y \leq t-x} f(x)g(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{t-x} g(y)dydx \\ &\overset{z=y+x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{t} g(z-x)dzdx \\ &= \int_{-\infty}^{t} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x)g(z-x)dx \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{t} (f * g)(z)dz \end{aligned}$$

■

**Satz 49.3** *Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $P[X_i^{-1}(\cdot)] = N(a_i, s_i^2)$. Dann gilt*

$$P\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1} (\cdot)\right] = N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)$$

**Beweis.** Sei $Y_i = X_i - a_i$. Wir haben schon gezeigt: $P[Y_i^{-1}(\cdot)] = N(0, s_i^2)$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ sind unabhängig.

$n = 2$: Mit

$$\begin{aligned} z &= y\frac{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}{s_1 s_2} - x\frac{s_2}{s_1\sqrt{s_1^2+s_2^2}} \\ dz &= dy\frac{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}{s_1 s_2} \\ dy &= \frac{s_1 s_2}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & z^2 + \frac{x^2}{s_1^2+s_2^2} \\ = & \left(y\frac{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}{s_1 s_2} - x\frac{s_2}{s_1\sqrt{s_1^2+s_2^2}}\right)^2 + \frac{x^2}{s_1^2+s_2^2} \\ = & y^2\frac{s_1^2+s_2^2}{s_1^2 s_2^2} - 2xy\frac{1}{s_1^2} + x^2\frac{s_2^2}{s_1^2(s_1^2+s_2^2)} + \frac{x^2}{s_1^2+s_2^2} \\ = & \frac{x^2}{s_1^2} - \frac{2xy}{s_1^2} + \frac{y^2}{s_1^2} + \frac{y^2}{s_2^2} \\ = & \frac{(x-y)^2}{s_1^2} + \frac{y^2}{s_2^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_1}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{s_1^2})\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}s_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{s_2^2}\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi s_1 s_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-y)^2}{s_1^2}+\frac{y^2}{s_2^2}\right)\right)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s_1^2+s_2^2)}}\exp\left(\frac{-x^2}{2(s_1^2+s_2^2)}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz}_{=1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s_1^2+s_2^2)}}\exp\left(\frac{-x^2}{2(s_1^2+s_2^2)}\right) \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} & P\left[(Y_1+Y_2)^{-1}(\cdot)\right] = N(0, s_1^2+s_2^2) \\ & X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2 + a_1 + a_2 \\ & P\left[(X_1+X_2)^{-1}(\cdot)\right] = N(a_1+a_2, s_1^2+s_2^2) \end{aligned}$$

$n \to n+1:$

$$P\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1}(\cdot)\right] = N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)$$

und $\sum_{i=1}^{n} X_i$ und $X_{n+1}$ sind unabhängig. Damit gilt

$$P\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i\right)^{-1}(\cdot)\right] = N\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i, \sum_{i=1}^{n+1} s_i^2\right)$$

■

# 50. Die Verteilungsfunktion

**Satz 50.1** *a) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* ***maßdefinierende Funktion*** $\Longleftrightarrow$
*i) F ist monoton wachsend.*
*ii) F ist rechtsstetig:* $\lim_{x_n \downarrow x} F(x_n) = F(x)$
*b) F heißt* ***Verteilungsfunktion*** $\Longleftrightarrow$
*Es gilt zusätzlich*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} F(x) &= 1 \\ \lim_{x \to -\infty} F(x) &= 0 \end{aligned}$$

**Satz 50.2** *Ist F eine maßdefinierende Funktion, so existiert genau ein Maß $m_F$ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit*

$$m_F[(a,b]] = F(b) - F(a)$$

**Beweis. Eindeutigkeit:** Wegen

$$\begin{aligned} m_F((-n,n]) &= F(n) - F(-n) < \infty \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n,n] &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist $m_F$ abzählbar endlich und auf dem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem

$$\{(a,b] \ : \ a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$$

eindeutig.
**Existenz:** Zeige

$$m_F : F^1 \to [0,\infty), \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \mapsto \sum_{i=1}^{n} \max(0, F(b_i) - F(a_i))$$

ist abzählbar additiv.
**1.) $m_F$ ist unabhängig von der Darstellung.** Sei

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] &= \sum_{j=1}^{m} (c_j, d_j] \\ \forall 1 \leq i \leq n-1 : \ a_i &< a_{i+1} \\ \forall 1 \leq j \leq m-1 : \ c_j &< c_{j+1} \end{aligned}$$

Seien $M_i$ maximal und $N_i$ minimal mit

$$\forall 1 \leq j \leq M_i \ \forall N_i + 1 \leq j \leq m : \ (a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] = \emptyset$$

Wegen

$$(c_j, d_j] \cap (c_{j+1}, d_{j+1}] = \emptyset$$

gilt für festes $i$ und $M_i \leq j \leq N_i$

$$\left( (a_i, b_i] = \sum_{j=M_i+1}^{N_i} (a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] \right) \Rightarrow (d_j = c_{j+1})$$

und somit

$$\begin{aligned}
& m_F \left[ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] \right] \\
= \; & m_F \left[ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\max(a_i, c_j), \min(b_i, d_j)] \right] \\
\overset{\text{Def}}{=} \; & \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{M_i} 0, \text{ da } (a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] = \emptyset \right. \\
& + F(\underbrace{\min(b_i, d_{M_i+1})}_{=d_{M_i+1}}) - F(\underbrace{\max(a_i, c_{M_i+1})}_{=a_i}) \\
& + \sum_{j=M_i+2}^{N_i-1} (F(\underbrace{\min(b_i, d_j)}_{=d_j}) - F(\underbrace{\max(a_i, c_j)}_{=c_j}) \\
& + F(\underbrace{\min(b_i, d_{N_i})}_{=b_i}) - F(\underbrace{\max(a_i, c_{N_i})}_{=c_{N_i}}) \\
& \left. + \sum_{j=N_i+1}^{m} 0, \text{ da } (a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] = \emptyset \right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \left( F(\underbrace{d_{M_i+1}}_{=c_{M_i+2}}) - F(a_i) + \sum_{j=M_i+2}^{N_i-1} (F(\underbrace{d_j}_{=c_{j+1}}) - F(c_j)) \right. \\
& \left. + F(b_i) - F(c_{N_i}) \right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) = m_F \left[ \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \right]
\end{aligned}$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned}
& m_F\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i,b_i]\cap(c_j,d_j]\right] \\
= \quad & m_F\left[\sum_{j=1}^{m}(c_j,d_j]\right]
\end{aligned}$$

**2.)** $m_F$ **ist endlich additiv.**

$$\begin{aligned}
m_F\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\right] &= \sum_{i=1}^{n}(\underbrace{F(b_i)-F(a_i)}_{\geq 0})\geq 0 \\
m_F[\emptyset] &= m_F[(a_i,a_i]]=0 \\
& \quad m_F\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i]+\sum_{j=1}^{m}(c_j,d_j]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(F(b_i)-F(a_i))+\sum_{j=1}^{m}(F(d_j)-F(c_j)) \\
&= m_F\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\right]+m_F\left[\sum_{j=1}^{m}(c_j,d_j]\right]
\end{aligned}$$

**3.)** $m_F$ **ist abzählbar additiv** $\Longleftrightarrow$ **F ist rechtsstetig.**
"$\Rightarrow$": Sei $x\in\mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_n$ monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. Wegen

$$\begin{aligned}
F(x_1)-F(x) &\overset{Def}{=} m_F[(x,x_1]] \\
&\overset{x_n\downarrow x}{=} m_F\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n,x_1]\right] \\
&\overset{(x_n,x_1]\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} m_F[(x_n,x_1]] \\
&\overset{Def}{=} \lim_{n\to\infty}(F(x_1)-F(x_n)) \\
&= F(x_1)-\lim_{n\to\infty}F(x_n) \\
F(x) &= \lim_{x_n\downarrow x}F(x_n)
\end{aligned}$$

ist F rechtsstetig:
"$\Leftarrow$": **a)** Sei $(a,b]=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]$ und $\varepsilon>0$ beliebig.

"$\leq$": Es gilt

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}: \ \sum_{n=1}^{N} m_F[(a_n, b_n]] &= m_F\left[\sum_{n=1}^{N}(a_n, b_n]\right] \leq m_F\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]\right] \\
\sum_{n=1}^{\infty} m_F[(a_n, b_n]] &\leq m_F\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]\right]
\end{aligned}$$

"$\geq$": Da F rechtsstetig und monoton steigend ist, gilt

$$\begin{aligned}
\exists \delta > 0: \ 0 &\leq F(a+\delta) - F(a) \leq \frac{\varepsilon}{2} \\
\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \delta_n > 0: \ 0 &\leq F(b_n + \delta_n) - F(b_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
m_F[(a, b]] &= F(b) - F(a) \\
&= F(b) - F(a+\delta) + F(a+\delta) - F(a) \\
&\leq m_F[(a+\delta, b]] + \frac{\varepsilon}{2} \\
m_F[(a_n, b_n + \delta_n]] &= F(b_n + \delta_n) - F(a_n) \\
&= F(b_n + \delta_n) - F(b_n) + F(b_n) - F(a_n) \\
&\leq m_F[(a_n, b_n]] + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Da $[a+\delta, b]$ kompakt ist, gilt

$$\begin{aligned}
(a, b] &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] \\
\underbrace{[a+\delta, b]}_{\text{kompakt}} &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n + \delta_n)}_{\text{offen}} \\
\exists N \in \mathbb{N}: \ [a+\delta, b] &\subset \bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n + \delta_n) \\
\exists N \in \mathbb{N}: \ (a+\delta, b] &\subset \bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n + \delta_n]
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
m_F[(a,b]] &\leq m_F[(a+\delta,b]] + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{(a+\delta,b]\subset\bigcup_{n=1}^{N}(a_n,b_n+\delta_n]}{\leq} m_F\left[\bigcup_{n=1}^{N}(a_n,b_n+\delta_n]\right] + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} m_F\left[(a_n,b_n+\delta_n]\right] + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} m_F\left[(a_n,b_n]\right] + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_F\left[(a_n,b_n]\right] + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt

$$
\begin{aligned}
m_F[(a,b]] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_F\left[(a_n,b_n]\right] \\
m_F\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} m_F\left[(a_n,b_n]\right]
\end{aligned}
$$

**b)** Für

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n}(a_{j_n},b_{j_n}] = \sum_{i=1}^{m}(a_i,b_i]
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
m_F\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j_n=1}^{k_n}(a_{j_n},b_{j_n}]\right] &\overset{Vor}{=} m_F\left[\sum_{i=1}^{m}(a_i,b_i]\right]\\
&= \sum_{i=1}^{m} m_F\left[(a_i,b_i]\right]\\
&= \sum_{i=1}^{m} m_F\left[(a_i,b_i]\cap\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j_n=1}^{k_n}(a_{j_n},b_{j_n}]\right]\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_n} m_F\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\max(a_i,a_{j_n}),\min(b_i,b_{j_n}]\right]\\
&\overset{a)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_n}\sum_{n=1}^{\infty} m_F\left[(\max(a_i,a_{j_n}),\min(b_i,b_{j_n}]\right]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m_F\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_n}(\max(a_i,a_{j_n}),\min(b_i,b_{j_n}]\right]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m_F\left[\sum_{j=1}^{k_n}(a_{j_n}b_{j_n}]\right]
\end{aligned}
$$

■

**Satz 50.3** *Sei $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\mathbb{R},\mathbb{B})$. *Dann heißt*

$$F:\mathbb{R}\to[0,1], x\mapsto P[(-\infty,x]]$$

*Verteilungsfunktion von $P$ und es gilt*

$$m_F = P$$

**Beweis.** Sei $x_1 < x_2$: Wegen

$$
\begin{aligned}
F(x_2)-F(x_1) &= P[(-\infty,x_2]]-P[(-\infty,x_1]]\\
&= P[(x_1,x_2]]\geq 0
\end{aligned}
$$

ist F monoton steigend.
Sei $(x_n)_n$ monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wegen

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(x_n)-F(x) &= \lim_{n\to\infty} P[(x,x_n]]\\
&\overset{x_n\downarrow x}{=} P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}(x,x_n]\right]\\
&= P[\emptyset]=0
\end{aligned}
$$

ist F rechtsstetig. Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F(x) &= P[\mathbb{R}] = 1 \\
\lim_{x\to-\infty} F(x) &= P[\emptyset] = 1 \\
m_F[(a,b]] &= F(b) - F(a) = P[(a,b]]
\end{aligned}$$

und da $(a,b]$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathbb{B}$ ist, gilt

$$m_F = P$$

■

**Satz 50.4** *Sei F massdefinierend.*
*a) Es gilt*

$$m_F(\{x\}) = F(x) - \lim_{y\uparrow x} F(y)$$

*b) F hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*
*c)* $m_F(\{x\}) = 0 \iff$ *F ist stetig in x.*
*d) Sei W abzählbar und* $X : (W,P) \to \mathbb{R}$. *Dann ist F eine Treppenfunktion mit den Intervallen* $[x_i, x_{i+1})$ *als Stufen und* $P[X = x_i]$ *als Höhe der Stufen.*

**Beweis. a)** Sei $(x_n)_n$ monoton wachsend mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $x_n \neq x$.

$$\begin{aligned}
m_F[\{x\}] &\overset{x_n\uparrow x}{=} m_F\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (x_n, x]\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} m_F\,[(x_n, x]] \\
&= F(x) - \lim_{x_n\uparrow x} F(x_n)
\end{aligned}$$

**b)** Da F monoton und rechtsstetig ist, existieren nur Unstetigkeitsstellen vom Typ

$$F(x) - \lim_{y\uparrow x} F(y) > 0$$

Wegen $0 \leq F(x) \leq 1$ gibt es höchstens n Sprungstellen der Höhen $h \geq \frac{1}{n}$.
Die Menge der Sprungstellen

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} :\ F(x) - \lim_{y\uparrow x} F(y) > \frac{1}{n} \right\}$$

ist somit abzählbar.
**c)** Da F rechtsstetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
\text{F ist stetig} &\iff \text{F ist linksstetig} \\
&\iff \lim_{x_n\uparrow x} F(x_n) = F(x) \\
&\overset{a)}{\iff} m_F[\{x\}] = 0
\end{aligned}$$

**d)** $P[X = x_i] > 0 \iff$ F macht in $x_i$ einen Sprung der Höhe $P[X = x_i]$.
$\blacksquare$

# 51. Der Zentrale Grenzwertsatz

**Satz 51.1** *Seien* $Y, Y_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$.
***1.)*** *Gleichwertig sind:*
*a) Für alle Stellen, an denen* $F_Y(x) = P[Y^{-1}(-\infty, x]]$ *stetig ist, gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$$

*b) Für alle* $f \in C_b(\mathbb{R})$ *sodaß* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ *existiert, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} E[f \circ Y_n] = E[f \circ Y]$$

***2.)*** *Ist* $F_Y$ *stetig, so ist gleichwertig zu a) und b):*

$$\lim_{n\to\infty} \| F_{Y_n} - F_Y \|_\infty = 0$$

***3.)*** *b)* $\Rightarrow$ *a) folgt auch für eine Folge von* $C^\infty$*-Funktionen, die* $1_{(-\infty,c]}$ *bzw.* $1_{(-\infty,c-\delta]}$ *nähert.*

**Beweis. a)** $\Rightarrow$ **b):** Da $F_Y$ monoton steigend ist und

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} F_Y(x) &= 1 \\ \lim_{x\to-\infty} F_Y(x) &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \exists a \in \mathbb{R} : \ F_Y(a) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists b \in \mathbb{R} : \ F_Y(b) &> 1 - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Wähle $a, b$ als Stetigkeitsstellen von $F_Y$. Das geht, da $F_Y$ nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.
Da die $F_{Y_n}$ monoton steigend sind und wegen

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$$

gilt

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \begin{cases} F_{Y_n}(a) < \varepsilon \\ F_{Y_n}(b) > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

Da $f \in C_b(\mathbb{R})$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist gibt es eine Unterteilung

$$a = c_1 < \ldots < c_k = b$$

sodaß

$$\forall x \in [c_{i-1}, c_i] : \; f(c_i) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(c_i) + \varepsilon$$

Die $c_i$ seien als Stetigkeitsstellen von $F_Y$ gewählt. Das ist möglich, da $F_Y$ nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.
Da $f \in C_b(\mathbb{R})$ existiert $\| f \|_\infty$ und es gilt $E[|f \circ Y_n|] < \infty$.
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
E[f \circ Y_n] &= E[\underbrace{f \circ Y_n}_{\leq \|f\|_\infty} 1_{\{Y_n \leq c_1\} \cup \{Y_n > c_k\}}] + \sum_{i=2}^{k} E[\underbrace{f \circ Y_n}_{\leq f(c_i)+\varepsilon} 1_{\{c_{i-1} < Y_n \leq c_i\}}] \\
&\leq \| f \|_\infty \, E[1_{\{Y_n \leq c_1\} + \{Y_n > c_k\}}] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} (f(c_i) + \varepsilon) \, E[1_{\{c_{i-1} < Y_n \leq c_i\}}] \\
&\leq \| f \|_\infty \left( P[Y_n \leq c_1] + \underbrace{P[Y_n > c_k]}_{=1-P[Y_n \leq c_k]} \right) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} (f(c_i) + \varepsilon) P[c_{i-1} < Y_n \leq c_i] \\
&\leq \| f \|_\infty \left( \underbrace{F_{Y_n}(c_1)}_{<\varepsilon} + 1 - \underbrace{F_{Y_n}(c_k)}_{>1-\varepsilon} \right) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} f(c_i) \, (F_{Y_n}(c_i) - F_{Y_n}(c_{i-1})) \\
&\quad + \varepsilon \sum_{i=2}^{k} (F_{Y_n}(c_i) - F_{Y_n}(c_{i-1}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[f \circ Y_n] &< 2\varepsilon \| f \|_\infty + \sum_{i=2}^{k} f(c_i) \, (F_{Y_n}(c_i) - F_{Y_n}(c_{i-1})) \\
&\quad + \varepsilon \underbrace{(F_{Y_n}(c_k) - F_{Y_n}(c_1))}_{\leq 1} \\
&\leq \sum_{i=2}^{k} f(c_i) \, (F_{Y_n}(c_i) - F_{Y_n}(c_{i-1})) + \varepsilon(1 + 2 \| f \|_\infty)
\end{aligned}$$

Genauso berechnet man

$$E[f \circ Y_n] \geq \sum_{i=2}^{k} f(c_i)\left(F_{Y_n}(c_i) - F_{Y_n}(c_{i-1})\right) - \varepsilon(1 + 2 \parallel f \parallel_\infty)$$

d.h.

$$\left| E[f \circ Y_n] - \sum_{i=2}^{k} f(c_i)\left(F_{Y_n}(c_i) - F_{Y_n}(c_{i-1})\right) \right| \leq \varepsilon(1 + 2 \parallel f \parallel_\infty)$$

Mit der selben Rechnung für Y ergibt sich

$$\left| E[f \circ Y] - \sum_{i=2}^{k} f(c_i)\left(F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1})\right) \right| \quad \leq \quad \varepsilon(1 + 2 \parallel f \parallel_\infty)$$

Da $F_Y$ in den $c_1, \ldots c_k$ stetig ist, gilt mit der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} |E[f \circ Y_n] - E[f \circ Y]| \\
\leq \quad & \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=2}^{k} f(c_i) \left( \underbrace{F_{Y_n}(c_i) - F_Y(c_i)}_{\to 0} + \underbrace{F_Y(c_{i-1}) - F_{Y_n}(c_{i-1})}_{\to 0} \right) \right| \\
& +2\varepsilon(1 + 2 \parallel f \parallel_\infty) \\
\leq \quad & 2\varepsilon(1 + 2 \parallel f \parallel_\infty)
\end{aligned}$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt

$$\lim_{n\to\infty} |E[f \circ Y_n] - E[f \circ Y]| = 0$$

**b) $\Rightarrow$ a):** Zu $c \in \mathbb{R}, \delta > 0$ wähle ein $g, h \in C_b(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned}
1_{(-\infty,c]}(x) &\leq g(x) \leq 1_{(-\infty,c+\delta]}(x) \\
1_{(-\infty,c-\delta]}(x) &\leq h(x) \leq 1_{(-\infty,c]}(x)
\end{aligned}$$

z.B.

$$\begin{aligned}
g &= \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (-\infty, c] \\ 1 - \frac{t-c}{\delta} & \text{für } t \in (c, c+\delta] \\ 0 & \text{für } t \in (c+\delta, \infty) \end{cases} \\
h &= \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (-\infty, c-\delta] \\ 1 - \frac{t-c+\delta}{\delta} & \text{für } t \in (c-\delta, c] \\ 0 & \text{für } t \in (c, \infty) \end{cases}
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} F_{Y_n}(c) &= \limsup_{n\to\infty} P[Y_n \le c] \\
&= \limsup_{n\to\infty} E[1_{(-\infty,c]} \circ Y_n] \\
&\le \limsup_{n\to\infty} E\left[g \circ Y_n\right] \\
&\overset{\text{Vor}}{=} E[g \circ Y] \\
&\le E[1_{(-\infty,c+\delta]} \circ Y] \\
&= P\left[Y \le c+\delta\right] \\
&= F_Y(c+\delta)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} F_{Y_n}(c) &= \lim_{n\to\infty} P[Y_n \le c] \\
&= \liminf_{n\to\infty} E\left[1_{(-\infty,c]} \circ Y_n\right] \\
&\ge \liminf_{n\to\infty} E\left[h \circ Y_n\right] \\
&\overset{Vor}{=} E[h \circ Y] \\
&\ge E\left[1_{(-\infty,c-\delta]} \circ Y\right] \\
&= P[Y \le c-\delta] \\
&= F_Y(c-\delta)
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
F_Y(c-\delta) &\le \liminf_{n\to\infty} F_{Y_n}(c) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} F_{Y_n}(c) \\
&\le F_Y(c+\delta)
\end{aligned}$$

Da c eine Stetigkeitsstelle von $F_Y$ ist und da $\delta > 0$ beliebig war, folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\downarrow 0} F_Y(c-\delta) &= F_Y(c) = \lim_{\delta\downarrow 0} F_Y(c+\delta) \\
\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(c) &= F_Y(c)
\end{aligned}$$

**a) $\Rightarrow$ c):** Sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\exists a \in \mathbb{R}:\ F_Y(a) &< \frac{\varepsilon}{4} \\
\exists b \in \mathbb{R}:\ F_Y(b) &> 1-\frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

Da F stetig ist, ist es auf [a,b] gleichmäßig stetig und es gibt eine Unterteilung

$$a = c_1 < \ldots < c_k = b$$

mit

$$\forall 2 \leq i \leq k: \; 0 \leq F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(c_i) = F_Y(c_i)$$

gilt

$$\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall 1 \leq i \leq k: \; |F_{Y_n}(c_i) - F_Y(c_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Da $F_{Y_n}$ und $F_Y$ monoton steigend sind, gilt $\forall n \geq N \; \forall x \in (-\infty, c_1]$

$$\begin{aligned}
0 &\leq F_Y(x) \leq F_Y(c_1) < \frac{\varepsilon}{4} \\
0 &\leq F_{Y_n}(x) \leq F_{Y_n}(c_1) < F_Y(c_1) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} \\
|F_Y(x) - F_{Y_n}(x)| &\leq |F_Y(x) - F_Y(c_1)| + |F_Y(c_1) - F_{Y_n}(c_1)| \\
&\quad + |F_{Y_n}(c_1) - F_{Y_n}(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Da $F_{Y_n}$ und $F_Y$ monoton steigend sind, gilt $\forall n \geq N \; \forall x \in [c_k, \infty)$

$$\begin{aligned}
1 &\geq F_Y(x) \geq F_Y(c_k) > 1 - \frac{\varepsilon}{4} \\
1 &\geq F_{Y_n}(x) \geq F_{Y_n}(c_k) > F_Y(c_k) - \frac{\varepsilon}{4} \\
&> 1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\
|F_Y(x) - F_{Y_n}(x)| &\leq |F_Y(x) - F_Y(c_k)| + |F_Y(c_k) - F_{Y_n}(c_k)| \\
&\quad + |F_{Y_n}(c_k) - F_{Y_n}(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

und für $x \in [c_i, c_{i+1}]$

$$\begin{array}{rcl} F_{Y_n}(c_i) & \leq & F_{Y_n}(x) \leq F_{Y_n}(c_{i+1}) \\ F_Y(c_i) & \leq & F_Y(x) \leq F_Y(c_{i+1}) \\ F_{Y_n}(x) - F_Y(x) & \leq & F_{Y_n}(c_{i+1}) - F_Y(c_i) \\ & = & F_{Y_n}(c_{i+1}) - F_Y(c_{i+1}) + F_Y(c_{i+1}) - F_Y(c_i) \\ & < & \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \\ F_{Y_n}(x) - F_Y(x) & \geq & F_{Y_n}(c_i) - F_Y(c_{i+1}) \\ & = & F_{Y_n}(c_i) - F_Y(c_i) + F_Y(c_i) - F_Y(c_{i+1}) \\ & > & -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} > -\varepsilon \\ |F_Y(x) - F_{Y_n}(x)| & < & \varepsilon \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{rcl} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \ \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_Y(x) - F_{Y_n}(x)| & \leq & \varepsilon \\ \lim_{n \to \infty} \|F_Y - F_{Y_n}\|_{\infty, \mathbb{R}} & = & 0 \end{array}$$

**c)⇒ a):**

$$\begin{array}{rl} & \lim_{n \to \infty} \| F_Y - F_{Y_n} \|_\infty = 0 \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R} : \ \lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x) \end{array}$$

**3.)** Mit dem selben Beweis wie $b) \Rightarrow a)$. Dass es solche $C^\infty$-Funktionen gibt, zeigen wir im letzten Satz dieses Kapitels. ■

**Bemerkung 51.2** *Wo geht ein, dass* $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ *existiert? Reicht nicht, dass f stetig und beschränkt ist?*

**Satz 51.3 (Der zentrale Grenzwertsatz)** *Seien* $Z_i : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ***unabhängig*** *mit*

$$\begin{array}{rcl} \forall i \neq j : \ P[Z_i^{-1}(\cdot)] & = & P[Z_j^{-1}(\cdot)] \\ E[Z_i] & = & m \\ Var[Z_i] & = & v > 0 \\ X_i & := & \frac{Z_i - m}{\sqrt{v}} \\ R_n^* & = & \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \end{array}$$

*Dann gilt*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \lim_{n \to \infty} F_{R_n^*}(x) = N(0,1)((-\infty, x])$$

**Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned}
E[X_i] &= \frac{E[Z_i] - m}{\sqrt{v}} = 0 \\
E[X_i^2] &= Var[X_i] = \frac{Var[Z_i - m]}{\sqrt{v}^2} = \frac{VarZ_i}{VarZ_i} = 1
\end{aligned}$$

Sei $(Y_i)_i$ unabhängig und unabhängig von $(X_i)_i$ mit $P[Y_i^{-1}(\cdot)] = N(0,1)$. Für

$$T_n^* := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

gilt

$$\begin{aligned}
P\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{-1}(\cdot)\right] &= N\left(\sum_{i=1}^{n} 0, \sum_{i=1}^{n} 1\right) = N(0,n) \\
P\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{-1}(\cdot)\right] &= N\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0, \frac{1}{\sqrt{n}^2} n\right) = N(0,1) \\
P[(T_n^*)^{-1}(\cdot)] &= N(0,1)
\end{aligned}$$

Für

$$W_{i,n} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i-1} X_j + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=i+1}^{n} Y_j$$

gilt

$$\begin{aligned}
W_{i-1,n} + \frac{X_{i-1}}{\sqrt{n}} - \frac{Y_i}{\sqrt{n}} &= W_{i,n} \\
W_{i-1,n} + \frac{X_{i-1}}{\sqrt{n}} &= W_{i,n} + \frac{Y_i}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Wähle $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, das $1_{(-\infty,c]}$ nähert, wie im letzten Satz dieses Kapitels. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\| f \|_\infty &< \infty \\
\| f' \|_\infty &< \infty \\
\| f'' \|_\infty &< \infty
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& f \circ R_n^* - f \circ T_n^* \\
= \;& f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i\right) \\
= \;& f\left(W_{n,n} + \frac{X_n}{\sqrt{n}}\right) - f\left(W_{1,n} + \frac{Y_1}{\sqrt{n}}\right) \\
= \;& \sum_{i=1}^n \left( f\left(W_{i,n} + \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - f \underbrace{\left(W_{i,n} + \frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)}_{=W_{i-1,n} + \frac{X_{i-1}}{\sqrt{n}}} \right)
\end{aligned}$$

Da $\frac{X_i}{\sqrt{n}}, \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ klein sind und f glatt ist, verwenden wir eine Reihenentwicklung von $f$

$$\begin{aligned}
& f\left(W_{i,n} + \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) \\
= \;& f(W_{i,n}) + f'(W_{i,n})\frac{X_i}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}f''(W_{i,n})\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)^2 + r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

mit einem $s : (W, S, P) \to \left([0,1], \mathbb{B}|_{[0,1]}\right)$ und mit

$$\begin{aligned}
r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{X_i^2}{2n}\left(f''\left(W_{i,n} + s\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - f''(W_{i,n})\right) \\
\left|r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)\right| &\leq \frac{X_i^2}{n} \parallel f'' \parallel_{\infty,[0,1]}
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung für $|r|$ ist noch nicht gut genug.
Da $f''$ gleichmäßig stetig ist auf $[0,1]$, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; (|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

d.h. für $\frac{|X_i|}{\sqrt{n}} \leq \delta < 1$

$$\begin{aligned}
\left|r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)\right| &\leq X_i^2 \frac{1}{n} \underbrace{\left|f''\left(W_{i,n} + s\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - f''(W_{i,n})\right|}_{\leq \varepsilon} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{n} X_i^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\left|r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \frac{X_i^2}{n}\left(\varepsilon 1_{\{|X_i|\leq\sqrt{n}\delta\}} + \| f'' \|_\infty\, 1_{\{|X_i|>\sqrt{n}\delta\}}\right)$$

Wegen

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= 0 = E[X_i] \\ E[Y_i^2] &= 1 = E[X_i^2] \end{aligned}$$

und da $X_i, Y_i$ unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned} & E[f\circ R_n^*] - E[f\circ T_n^*] \\ = \quad & \sum_{i=1}^n E\Bigg[f(W_{i,n}) + f'(W_{i,n})\frac{X_i}{\sqrt{n}} \\ & +\frac{1}{2}f''(W_{i,n})\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)^2 + r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) \\ & - f(W_{i,n}) - f'(W_{i,n})\frac{Y_i}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}f''(W_{i,n})\left(\frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)^2 - r\left(\frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)\Bigg] \\ \overset{\text{unabhängig}}{=} \quad & \sum_{i=1}^n \frac{E[f'(W_{i,n})]}{\sqrt{n}}(\underbrace{E[X_i]}_{=0} - \underbrace{E[Y_i]}_{=0}) \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{E[f''(W_{i,n})]}{2n}(\underbrace{E[X_i^2] - E[Y_i^2]}_{=0}) \\ & + \sum_{i=1}^n E\left[r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - r\left(\frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)\right] \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & |E[f\circ R_n^* - f\circ T_n^*]| \\ \leq \quad & \sum_{i=1}^n E\left[\left|r\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)\right|\right] + \sum_{i=1}^n E\left[\left|r\left(\frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)\right|\right] \\ \leq \quad & \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n}\underbrace{E[X_i^2 1_{|X_i|\leq\sqrt{n}\delta}]}_{\leq E[X_i^2]=1} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n}\underbrace{E[Y_i^2 1_{|Y_i|\leq\sqrt{n}\delta}]}_{\leq E[Y_i^2]=1} \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\| f'' \|_{[0,1],\infty}}{n}\left(E[X_i^2 1_{|X_i|>\sqrt{n}\delta}] + E[Y_i^2 1_{|Y_i|>\sqrt{n}\delta}]\right) \\ \leq \quad & 2\varepsilon + \| f'' \|_{[0,1],\infty}\left(E[X_1^2 1_{|X_1|>\sqrt{n}\delta}] + E[Y_1^2 1_{|Y_1|>\sqrt{n}\delta}]\right) \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} E\left[X_1^2 1_{|X_1|>\sqrt{n}\delta}\right] \\
= \quad & E[X_1^2] - \lim_{n\to\infty} E\left[X_1^2 1_{|X_1|\leq\sqrt{n}\delta}\right] \\
\overset{\text{monoton}}{=} \quad & E\left[X_1^2\right] - E\left[X_1^2 1_{|X_1|<\infty}\right] \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

folgt da $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\begin{aligned}
\forall\varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} |E[f\circ R_n^*] - E[f\circ T_n^*]| &\leq 2\varepsilon \\
\lim_{n\to\infty} |E[f\circ R_n^*] - E[f\circ T_n^*]| &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} |E[f\circ R_n^*] - E[f\circ Y_1]| &= 0
\end{aligned}$$

und somit

$$\forall x\in\mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} F_{R_n^*}(x) = N(0,1)((-\infty,x])$$

■

**Satz 51.4** *Es existiert ein unendlich oft differenzierbares*

$$g:\mathbb{R}\to[0,1], p\mapsto \begin{cases} 1 & \textit{für } p\in(-\infty,c] \\ \in(0,1] & \textit{für } p\in(c,c+\delta) \\ 0 & \textit{für } p\in[c+\delta,\infty) \end{cases}$$

**Beweis.** Setze

$$g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{(t-c)(t-c-\delta)}\right) & t\in(c,c+\delta) \\ 0 & t\in(-\infty,c]\cup[c+\delta,\infty) \end{cases}$$

Sei $t\notin\{-1,-2\}$. Da

$$\begin{aligned}
& 0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto 0 \\
& \exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto\exp(t) \\
& \mathbb{R}\backslash\{c\}\to\mathbb{R}, t\mapsto\frac{1}{t-c} \\
& \mathbb{R}\backslash\{c+\delta\}\to\mathbb{R}, t\mapsto\frac{1}{t-c-\delta}
\end{aligned}$$

unendlich oft differenzierbar sind, gilt

$$\forall t\in\mathbb{R}\backslash\{c,c+\delta\}: \ g_1 \text{ ist unendlich oft differenzierbar}$$

Zeige: Für $t \in (c, c+\delta)$ gilt

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \exists a_{i,j} \in \mathbb{R}: \ \frac{d^n}{dt^n} g_1 = g_1 \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \frac{1}{(t-c)^i} \frac{1}{(t-c-\delta)^j}$$

$n = 1$:

$$\begin{aligned} g_1 &= \exp\left(\frac{-1}{(t-c)(t-c-\delta)}\right) \\ \frac{d}{dt} g_1 &= g_1 \cdot \left(\frac{1}{t-c} \frac{-1}{(t-c-\delta)^2} + \frac{1}{t-c-\delta} \frac{-1}{(t-c)^2}\right) \end{aligned}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^{n+1} g_1}{dt^{n+1}} \\ = & \frac{d}{dt}\left(g_1 \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \frac{1}{(t-c)^i} \frac{1}{(t-c-\delta)^j}\right) \\ = & g_1 \cdot \left(\frac{1}{t-c} \frac{-1}{(t-c-\delta)^2} + \frac{1}{t-c-\delta} \frac{-1}{(t-c)^2}\right) \\ & \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \frac{1}{(t-c)^i} \frac{1}{(t-c-\delta)^j} \\ & + g_1 \cdot \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \left(\frac{-i}{(t-c)^{i+1}} \frac{1}{(t-c-\delta)^j} + \frac{1}{(t-c)^i} \frac{-j}{(t-c-\delta)^{j+1}}\right) \\ = & g_1 \sum_{i,j=1}^{N'} a'_{i,j} \frac{1}{(t-c)^i} \frac{1}{(t-c-\delta)^j} \end{aligned}$$

Wegen $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} t^n \exp(-t) &= 0 \\ \lim_{t\to c} \frac{1}{(t-c)^n} \exp\left(\frac{-1}{(t-c)(t-c-\delta)}\right) &= 0 \\ \lim_{t\to c+\delta} \frac{1}{(t-c-\delta)^n} \exp\left(\frac{-1}{(t-c)(t-c-\delta)}\right) &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t\to c} \frac{d^n g_1}{dt^n}(t) &= 0 = g_1(c) \\ \lim_{t\to c+\delta} \frac{d^n g_1}{dt^n}(t) &= 0 = g_1(c+\delta) \end{aligned}$$

und somit ist $g_1$ unendlich oft differenzierbar. Damit ist

$$g : \mathbb{R} \to [0,1], t \mapsto \frac{\int_{-\infty}^{t} g_1(s)ds}{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(s)ds} \begin{cases} = 0 & \text{für } t \in (-\infty, c] \\ \in (0,1] & \text{für } t \in (c, c+\delta) \\ = 1 & \text{für } t \in [c+\delta, \infty) \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar. ■

# 52. Ein starkes Gesetz der großen Zahlen

Sei m ein endliches Maß.

**Definition 52.1** *Für $a \geq 0$ setze*

$$\begin{aligned} \lfloor a \rfloor &= \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq a\} \\ \lceil a \rceil &= \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a \leq n\} \end{aligned}$$

**Satz 52.2** *Für $f : (W, S, m) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $f \geq 0$ m-fast sicher gilt*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} m\,[f \geq n] &\leq \int f dm \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} m[f > n] \end{aligned}$$

*und*

$$\int f dm = \int_0^{\infty} m[f \geq t] dt$$

**Beweis. a)** Für $\lfloor f \rfloor, \lceil f \rceil : (W, S, m) \to \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} m[f \geq n] &= \sum_{k=n}^{\infty} m[k \leq f < k+1] \\ \sum_{n=1}^{\infty} m[f \geq n] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m[k \leq f < k+1] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot m[k \leq f < k+1] \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int \lfloor f \rfloor dm \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m[f > n-1] &= \sum_{k=n}^{\infty} m[k-1 < f \leq k] \\ \sum_{n=1}^{\infty} m[f > n-1] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m[k-1 < f \leq k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot m[k-1 < f \leq k] \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int \lceil f \rceil dm \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
n &\leq f(x) \leq n' \\
\max\{n \in \mathbb{N}: \ n \leq f(x)\} &\leq f(x) \leq \min\{n' \in \mathbb{N}: \ f(x) \leq n'\} \\
\lfloor f \rfloor &\leq f \leq \lceil f \rceil \\
\int \lfloor f \rfloor dm &\leq \int f dm \leq \int \lceil f \rceil dm \\
\sum_{n=1}^{\infty} m[f \geq n] &\leq \int f dm \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\,[f > n-1]
\end{aligned}$$

**b)** Sei $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\frac{n}{2^k} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} \leq f 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} \leq \frac{n+1}{2^k} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}}$$

gilt

$$\begin{aligned}
a_k^{\varepsilon} &= \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} m\left[f 1_{f \geq \varepsilon} \geq \frac{n}{2^k}\right] \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} m\left[j \leq f 1_{f \geq \varepsilon} 2^k < j+1\right] \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot m\left[n \leq f 1_{f \geq \varepsilon} 2^k < n+1\right] \\
&\overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{n}{2^k} 1_{f \geq \varepsilon} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} dm \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n}{2^k} 1_{f \geq \varepsilon} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} dm \\
&\leq \int f 1_{f \geq \varepsilon} dm \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^k} 1_{f \geq \varepsilon} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} dm \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{n+1}{2^k} 1_{f \geq \varepsilon} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} dm + \frac{1}{2^k} \int 1_{f \geq \varepsilon} 1_{0 \leq f \leq 2^{-k}} dm
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{n}{2^k} 1_{f \geq \varepsilon} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} dm + \int \frac{1}{2^k} 1_{f \geq \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\frac{n}{2^k} \leq f < \frac{n+1}{2^k}} dm \\
&\quad + \frac{1}{2^k} m \left[\varepsilon \leq f \leq 2^{-k}\right] \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} a_k^{\varepsilon} + \frac{1}{2^k} \int 1_{f \geq \varepsilon} 1_{[2^{-k} \leq f < \infty)} dm + \frac{1}{2^k} m \left[\varepsilon \leq f \leq 2^{-k}\right] \\
&\leq a_k^{\varepsilon} + \frac{1}{2^k} m \left[f \geq \max\left(\varepsilon, 2^{-k}\right)\right] + \frac{1}{2^k} m \left[\varepsilon \leq f \leq 2^{-k}\right]
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^k} m \left[f \geq \frac{n+1}{2^k}\right] &= \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} m \left[f \geq \frac{n+1}{2^k}\right] dt \\
&\leq \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} m[f \geq t] dt \\
&\leq \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} m \left[f \geq \frac{n}{2^k}\right] dt \\
&= \frac{1}{2^k} m \left[f \geq \frac{n}{2^k}\right]
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& a_k^{\varepsilon} - \frac{1}{2^k} m \left[f \geq \max(\varepsilon, 2^{-k})\right] \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} m \left[f 1_{f \geq \varepsilon} \geq \frac{n}{2^k}\right] - \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} m \left[\frac{n+1}{2^k} > f 1_{f \geq \varepsilon} \geq \frac{n}{2^k}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} m \left[f 1_{f \geq \varepsilon} \geq \frac{n+1}{2^k}\right] \\
&\overset{\text{s.o.}}{\leq} \int_{1/2^k}^{\infty} m \left[f 1_{f \geq \varepsilon} \geq t\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n 2^{-k}}^{(n+1)2^{-k}} m \left[f 1_{f \geq \varepsilon} \geq t\right] dt \\
&\overset{\text{s.o.}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} m \left[f 1_{f \geq \varepsilon} \geq \frac{n}{2^k}\right] \\
&= a_k^{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

und somit

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\int_0^\infty m[f1_{f\geq\varepsilon} \geq t]dt - \int f1_{f\geq\varepsilon}dm\right| \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\left|\int_0^\infty m[f1_{f\geq\varepsilon} \geq t]dt - \int_{\frac{1}{2^k}}^\infty m[f1_{f\geq\varepsilon} \geq t]dt\right| \\
&\quad + \lim_{k\to\infty}\left|\int_{\frac{1}{2^k}}^\infty m[f1_{f\geq\varepsilon} \geq t]dt - a_k^\varepsilon\right| \\
&\quad + \lim_{k\to\infty}\left|a_k^\varepsilon - \int f1_{f\geq\varepsilon}dm\right| \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\underbrace{m[W]}_{<\infty} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\underbrace{m\left[f \geq \max\left(\varepsilon, 2^{-k}\right)\right]}_{<\infty} \\
&\quad + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\underbrace{m\left[f \geq \max\left(\varepsilon, 2^{-k}\right)\right]}_{<\infty} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\underbrace{m\left[\varepsilon \leq f \leq 2^{-k}\right]}_{<\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d.h.

$$\int_0^\infty m[f1_{f\geq\varepsilon} \geq t]dt = \int f1_{f\geq\varepsilon}dm$$

Wegen

$$\begin{aligned}
f1_{f\geq\varepsilon} \geq t &\iff f(w) \geq \varepsilon \text{ und } f(w) \geq t \\
&\Rightarrow f(w) \geq t \\
\{w \in W:\ f(w)1_{f\geq\frac{1}{k}}(w) \geq t\} &\subset \{w \in W:\ f(w) \geq t\} \\
\left\{f1_{f\geq\frac{1}{k}} \geq t\right\} &\uparrow \{f \geq t\} \\
f1_{f\geq\frac{1}{k}} &\uparrow f
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty m\left[f1_{f\geq\frac{1}{k}} \geq t\right]dt &\overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{k\to\infty}\int f1_{f\geq\frac{1}{k}}dm \\
\int_0^\infty m[f \geq t]dt &= \int f dm
\end{aligned}$$

■

**Satz 52.3** *a)*

$$\forall x \geq 0 : x\sum_{n>x}\frac{1}{n^2} \leq 2$$

*b) Seien* $X_n : (W,S,P) \to (\mathbb{R},\mathbb{B})$ *mit* $\forall i,j:\ P[X_i^{-1}(\cdot)] = P[X_j^{-1}(\cdot)]$. *Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[(X_n 1_{|X_n|\le n})^2]}{n^2} \le 4E[|X_1|]$$

**Beweis. a)** Sei $x \ge 0$ beliebig. Wegen

$$\begin{aligned}
\forall t \in [n,n+1]:\ \frac{1}{(n+1)^2} &\le \frac{1}{t^2} \\
\frac{1}{(n+1)^2} = \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2}dt &\le \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}dt \\
\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{m^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\le \frac{1}{m^2} + \sum_{n=m}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{m^2} + \int_m^{\infty} \frac{1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \le \frac{2}{m}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
m &:= \min\{n \in \mathbb{N}:\ n > x\} \\
x \sum_{n>x} \frac{1}{n^2} &\overset{x\le m}{\le} m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le m\frac{2}{m} = 2
\end{aligned}$$

**b)** Mit $f = \left(X_n 1_{|X_n|\le n}\right)^2$ und $m = P$ gilt

$$\begin{aligned}
\int f dm &= \int_0^{\infty} m[f \ge t]dt \\
E\left[(X_n 1_{|X_n|\le n})^2\right] &= \int_0^{\infty} P\left[(X_n 1_{|X_n|\le n})^2 \ge t\right] dt
\end{aligned}$$

Mit $t^2 = x$ und $dx = 2tdt$ und

$$\begin{aligned}
\forall x > n:\ \{|X_n| 1_{|X_n|\le n} \ge x\} &= \emptyset \\
\forall x > n:\ P\left[|X_n| 1_{|X_n|\le n} \ge x\right] &= 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
E\left[(X_n 1_{|X_n|\le n})^2\right] &= \int_0^\infty 2xP\left[|X_n| 1_{|X_n|\le n} \ge x\right] dx \\
&= \int_0^n 2xP\left[n \ge |X_n| \ge x\right] dx \\
&\overset{P[X_n^{-1}(\cdot)]=P[X_1^{-1}(\cdot)]}{\le} \int_0^n 2xP\left[|X_1| \ge x\right] dx
\end{aligned}$$

Sei

$$f_m(x) := 2xP[|X_1| \ge x] \sum_{n>x}^m \frac{1}{n^2}$$

Dann ist $(f_m)_m$ monoton steigend und

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} f_m(x)dx &= 2xP[|X_1| \ge x] \sum_{n>x} \frac{1}{n^2} \\
&\le 4P[|X_1| \ge x]
\end{aligned}$$

Damit lassen sich Summe und Integral vertauschen.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \frac{E[(X_n 1_{|X_n|\le n})^2]}{n^2} &\le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \int_0^\infty 1_{[0,n)}(x) 2xP[|X_1| \ge x]dx \\
&= \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} 1_{[0,n)}(x) 2xP[|X_1| \ge x] \right) dx \\
&= 2\int_0^\infty P[|X_1| \ge x] \underbrace{x \sum_{n>x} \frac{1}{n^2}}_{\le 2} dx \\
&\le 4\int_0^\infty P[|X_1| \ge x]dx \\
&= 4\int |X_1| dP \\
&= 4E[|X_1|]
\end{aligned}$$

■

**Satz 52.4** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $X_n \in L^1$ *mit* $\forall i, j :\ P[X_i^{-1}(\cdot)] = P[X_j^{-1}(\cdot)]$

$$\begin{aligned}
a &= E[X_1] \\
Y_n &:= X_n \cdot 1_{|X_n|\le n} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i &= a \text{ } P\text{-fast sicher}
\end{aligned}$$

*Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = a \text{ } P\text{-fast sicher}$$

**Beweis.** Wegen $Y_n = X_n 1_{|X_n|\leq n}$ gilt mit $f = |X_n|$ und $m = P$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n \neq Y_n] &= \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > n] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| \geq n] \\
&\overset{P[X_n^{-1}(\cdot)]=P[X_1^{-1}(\cdot)]}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_1| \geq n] \\
&\leq \int |X_1| dP = E[|X_1|] < \infty
\end{aligned}$$

Mit dem 0-1-Gesetz folgt

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i\geq n}\{X_i = Y_i\}\right] &= 1 \\
P\left[\{w \in W:\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall i \geq n:\ X_i(w) = Y_i(w)\}\right] &= 1
\end{aligned}$$

d.h. $\exists A \in S$ mit

$$\begin{aligned}
&P[A] = 0 \\
&\forall w \in A^C\ \exists n_0\ \forall i \geq n_0:\ X_i(w) = Y_i(w) \\
&\forall w \in A^C:\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(w) = a
\end{aligned}$$

d.h. $\forall w \in A^C\ \forall n \geq n_0:$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i(w) - \sum_{i=1}^{n} X_i(w)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} Y_i(w) - \sum_{i=1}^{n_0} X_i(w)}{n}$$

und

$$\begin{aligned}
\forall w \in A^C \qquad & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(w) \\
= {} & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(w) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(w)\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(w) \\
= {} & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0} X_i(w) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0} Y_i(w)\right) + a \\
= {} & a
\end{aligned}$$

■

**Satz 52.5 (Ein starkes Gesetz der großen Zahlen)**
*Seien* $X_n \in L^1$ ***paarweise unabhängig*** *mit* $\forall i, j: \ P[X_i^{-1}(\cdot)] = P[X_j^{-1}(\cdot)]$.
*Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = E[X_1] \ P\text{-fast sicher}$$

**Beweis.** Sei $Y_n = X_n 1_{|X_n| \leq n}$.
Da $(X_n)_n$ unabhängig ist, ist $(X_n^+)_n$ unabhängig. Sei also $X_n \geq 0$.
**1.)** Sei $X_n \geq 0, \varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: \ k_n &:= \lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor \\ &= \max\{m \in \mathbb{N}_0 : \ m \leq (1+\varepsilon)^n\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 \leq \lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor \leq (1+\varepsilon)^n &< \lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor + 1 \\ \frac{(1+\varepsilon)^n}{2} &< \frac{\lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor + 1}{2} \leq \lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor \end{aligned}$$

Sei

$$n_0 := \left\lceil \frac{\ln m}{\ln(1+\varepsilon)} \right\rceil = \min\left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \ \frac{\ln m}{\ln(1+\varepsilon)} \leq n \right\}$$

Da ln und exp streng monoton wachsend sind, gilt

$$\begin{aligned} k_n = \lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor \geq m &\iff (1+\varepsilon)^n \geq m \\ &\iff n \ln(1+\varepsilon) \geq \ln m \\ &\iff n \geq \frac{\ln m}{\ln(1+\varepsilon)} \\ &\iff n \geq n_0 = \left\lceil \frac{\ln m}{\ln(1+\varepsilon)} \right\rceil \end{aligned}$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k_n \geq m} \frac{1}{k_n^2} &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{\lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor \geq m} \frac{1}{\lfloor (1+\varepsilon)^n \rfloor^2} \\
&\leq 4 \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2n}} \\
&= \frac{4}{(1+\varepsilon)^{2n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2n}} \\
&= 4 \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2n_0}} \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}} \\
&\leq 4 \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}} \frac{1}{m^2}
\end{aligned}
$$

**2.)** Wegen

$$
E[Y_n^2] \quad = \quad E\left[X_n^2 1_{|X_n| \leq n}\right] \leq E\left[n^2 1_W\right] = n^2 < \infty
$$

existiert $VarY_n$. Sei $\delta > 0$. Für

$$
T_{k_n} = \sum_{m=1}^{k_n} Y_m
$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} P\left[|T_{k_n} - E[T_{k_n}]| > \delta k_n\right] \\
\leq \quad & \sum_{n=1}^{\infty} P\left[|T_{k_n} - E[T_{k_n}]| \geq \delta k_n\right] \\
\leq \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var[T_{k_n}]}{\delta^2 k_n^2} \\
= \quad & \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var\left[\sum_{m=1}^{k_n} Y_m\right]}{k_n^2} \\
\overset{(Y_m)_m \text{ paarweise unabhängig}}{=} \quad & \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{m=1}^{k_n} Var[Y_m] \\
= \quad & \frac{Var[Y_1]}{\delta^2} \sum_{k_n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} + \frac{Var[Y_2]}{\delta^2} \sum_{k_n \geq 2} \frac{1}{k_n^2} + \ldots \\
= \quad & \frac{1}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{Var[Y_m]}_{=E[Y_m^2] - E[Y_m]^2 \leq E[Y_m^2]} \sum_{k_n \geq m} \frac{1}{k_n^2} \\
= \quad & \frac{1}{\delta^2} \frac{4}{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} E\left[|X_m|^2 1_{|X_m| \leq m}\right]}_{\leq 4E[|X_1|]} \\
< \quad & \infty
\end{aligned}$$

Mit dem 0-1-Gesetz gilt

$$\forall \delta > 0: \; P\left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} \left\{ \frac{|T_{k_n} - E[T_{k_n}]|}{k_n} \leq \delta \right\}\right] = 1$$

$$\forall \delta > 0: \; P\left[\left\{ w \in W: \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m: \; \frac{|T_{k_n}(w) - E[T_{k_n}]|}{k_n} \leq \delta \right\}\right] = 1$$

$$\forall \delta > 0: \; 0 \leq \lim_{k_n \to \infty} \frac{|T_{k_n} - E[T_{k_n}]|}{k_n} \leq \delta \text{ P-fast sicher}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k_n} Y_i - E\left[\sum_{i=1}^{k_n} Y_i\right]}{k_n} = 0 \text{ P-fast sicher}$$

**3.)** Da $(X_1 1_{X_1 \leq n})_n$ monoton steigend mit Grenzwert $X_1$ ist und $\geq 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E\left[\lim_{n\to\infty} X_1 1_{X_1\leq n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[X_1 1_{X_1 \leq n}] \\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall i\geq n_0:\ E[X_1 1_{X_1>i}] &< \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon>0:\ 0 &\leq \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} E[X_1 1_{X_1>i}] \\ &= \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{n_0} E[X_1 1_{X_1>i}] + \frac{1}{k_n}\sum_{i=n_0+1}^{k_n} E[X_1 1_{X_1>i}] \\ &\leq \frac{n_0}{k_n}E[X_1] + \frac{k_n-n_0}{k_n}\varepsilon \\ 0 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} E[X_1 1_{X_1>i}] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k_n}(E[Y_i]-E[X_1])}{k_n} \\ = &\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k_n}(E[X_i 1_{X_i\leq i}]-E[X_1])}{k_n} \\ \overset{P[X_i^{-1}(\cdot)]=P[X_1^{-1}(\cdot)]}{=} &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}E[X_1 1_{X_1>i}] \\ = &\ 0 \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{E\left[\sum_{i=1}^{k_n} Y_i\right]}{k_n} &= E[X_1] \\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k_n} Y_i}{k_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k_n} Y_i - E\left[\sum_{i=1}^{k_n} Y_i\right]}{k_n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}E\left[\sum_{i=1}^{k_n} Y_i\right] \\ &= E[X_1] \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

**4.)** Aus

$$\begin{aligned} m &\leq \lfloor(1+\varepsilon)^n\rfloor = k_n < m+1 \\ M &\leq \lfloor(1+\varepsilon)^{n+1}\rfloor = k_{n+1} < M+1 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
m &\leq M \\
\frac{k_{n+1}}{k_n} &< \frac{M+1}{m} \\
&\leq 1+\frac{1}{m} \\
&< 1+\underbrace{\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n_0}-1}}_{\overset{n_0\to\infty}{\to}0} \\
\exists N\ \forall n \geq N: \ \frac{k_{n+1}}{k_n} &< 1+2\varepsilon
\end{aligned}$$

Damit folgt für $n \geq N$

$$\begin{aligned}
\forall k_n \leq l \leq k_{n+1}: \qquad & \frac{1}{1+2\varepsilon}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} Y_i \\
< \qquad & \frac{1}{k_{n+1}}\sum_{i=1}^{k_n} Y_i \\
\overset{Y_i\geq 0, k_n\leq l\leq k_{n+1}}{\leq} \qquad & \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} Y_i \\
\overset{Y_i\geq 0, k_n\leq l\leq k_{n+1}}{\leq} \qquad & \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_{n+1}} Y_i \\
< \qquad & (1+2\varepsilon)\frac{1}{k_{n+1}}\sum_{i=1}^{k_{n+1}} Y_i
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0: \ \frac{1}{1+2\varepsilon}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} Y_i &\leq \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l} Y_i \\
&\leq (1+2\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_{n+1}}\sum_{i=1}^{k_{n+1}} Y_i \\
\forall \varepsilon > 0: \ \frac{E[X_1]}{1+2\varepsilon} &\leq \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l} Y_i \\
&\leq (1+2\varepsilon)E[X_1] \text{ P-fast sicher} \\
E[X_1] &= \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l} Y_i \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

Mit dem Satz vorher folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = E[X_1] \text{ P-fast sicher}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^+ - X_i^-) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^+ - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^- \\
&= E\left[X_1^+\right] - E\left[X_1^-\right] \\
&= E[X_1]
\end{aligned}$$

■

**Satz 52.6** *Seien* $X_1, X_2, \ldots : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ***paarweise unabhängig*** $\forall i, j: \ P[X_i^{-1}(\cdot)] = P[X_j^{-1}(\cdot)]$. *Dann gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \le x} - P[X_1 \le x] \right| = 0 \textit{ P-fast sicher}$$

*Die experimentelle Stufenfunktion* $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \le x}$ *nähert sich in* $\|\cdot\|_\infty$ *beliebig genau der Funktion* $x \mapsto P[X_1 \le x]$

**Beweis.** Sei $x \in \mathbb{R}$. $(1_{X_n \le x})_n$ bzw. $(1_{X_n < x})_n$ sind paarweise unabhängige Familien. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \le x} &\overset{1_{X_i \le x} \in L^1 \text{ paarweise unabhängig}}{=} E[1_{X_1 \le x}] \text{ P-fast sicher} \\
&= P[X_1 \le x] \text{ P-fast sicher} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i < x} &\overset{1_{X_i < x} \in L^1 \text{ paarweise unabhängig}}{=} E[1_{X_1 < x}] \text{ P-fast sicher} \\
&= P[X_1 < x] \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$. Unterteile $[0, 1]$ durch

$$\forall 1 \le j \le N-1: \ c_j = \inf\left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : \ P[X_1 \le x] \ge \frac{j}{N} \right\}$$

und setze

$$\begin{aligned}
R_n := \max_{1 \le j \le N-1} \Bigg( &\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \le c_j} - P[X_1 \le c_j] \right| \\
&+ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i < c_j} - P[X_1 < c_j] \right| \Bigg)
\end{aligned}$$

Dann gilt für $j = 2, \ldots, N-1$ und $c_{j-1} \neq c_j$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R_n &= 0 \text{ P-fast sicher} \\
\forall x \in [c_{j-1}, c_j): \; P[X_1 \leq x] &\in \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right) \\
c_{j-1} \neq c_j \Rightarrow P[X_1 < c_j] &\in \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]
\end{aligned}$$

Sei $c_{j-1} \neq c_j$. Dann gilt $\forall x \in [c_{j-1}, c_j)$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} - P[X_1 \leq x] \\
\overset{x\in[c_{j-1},c_j)}{\leq} \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i < c_j} - P[X_1 < c_j] + \underbrace{P[X_1 < c_j]}_{\in\left[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\right]} - \underbrace{P[X_1 \leq x]}_{\in\left[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\right)} \\
\leq \quad & R_n + \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& P[X_1 \leq x] - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} \\
\overset{x\in[c_{j-1},c_j)}{\leq} \quad & \underbrace{P[X_1 \leq x]}_{\in\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{N}\right)} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq c_{j-1}} + P[X_1 \leq c_{j-1}] + \underbrace{P[X_1 \leq c_{j-1}]}_{=\frac{j-1}{N}} \\
\leq \quad & R_n + \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\forall x \in (-\infty, c_1): \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} - \underbrace{P[X_1 \leq x]}_{\in\left[0,\frac{1}{n}\right)} \\
\leq \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i < c_1} - \underbrace{P[X_1 < c_1]}_{\in\left[0,\frac{1}{N}\right]} + \frac{1}{N} \\
\leq \quad & R_n + \frac{1}{N} \\
& P[X_1 \leq x] - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} \\
\leq \quad & P[X_1 \leq c_1] = \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\forall x \in [c_{N-1}, \infty): \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} - P[X_1 \leq x] \\
\leq \quad & 1 - \underbrace{P[X_1 \leq c_{N-1}]}_{=\frac{N-1}{N}} = \frac{1}{N} \\
& P[X_1 \leq x] - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} \\
\leq \quad & -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq c_{N-1}} - P[X_1 \leq c_{N-1}] + \underbrace{P[X_1 \leq c_{N-1}]}_{=\frac{N-1}{N}} \\
& + \underbrace{P[X_1 \leq x]}_{\in\left[\frac{N-1}{N},1\right]} \\
\leq \quad & R_n + \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}: \quad & \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} - P[X_1 \leq x] \right| \\
\leq \quad & \frac{1}{N} + \limsup_{n\to\infty} R_n \text{ P-fast sicher} \\
= \quad & \frac{1}{N} \text{ P-fast sicher} \\
& \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x} - P[X_1 \leq x] \right| \\
= \quad & 0 \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

■

Nun haben wir die notwendigen Sätze für die Statistik bewiesen.

# 53. Ein Wartezeitenprozess

Ab dem Zeitpunkt Null sollen in $[0,\infty)$ zufällig Punkte auftreten. Für

$$N : \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{N}_0, (a,b] \mapsto \text{ Anzahl Punkte in } (a,b]$$

soll gelten:

**(1)** $N_{(s,t]+(t,u]} = N_{(s,t]} + N_{(t,u]}$

**(2)** $\forall s, s' \in [0,\infty) \forall u \in (0,\infty) :$
$P\left[\left(N_{(s,s+u]}\right)^{-1}(\cdot)\right] = P\left[\left(N_{(s',s'+u]}\right)^{-1}(\cdot)\right]$

**(3)** Für $\sum_{i=1}^{n}(s_i,t_i]$ sind $N_{(s_1,t_1]},\ldots,N_{(s_n,t_n]}$ unabhängig.

**(4)** $\forall t \in [0,\infty)\ \forall u \in (0,\infty) :\ E[N_{(t,t+u]}] < \infty$

**(5)** $\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \dfrac{P[N_{(0,\varepsilon]} \geq 2]}{\varepsilon} = 0$

**Satz 53.1** *Für*

$$C := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{P\left[N_{(0,\varepsilon]} \geq 2\right]}{\varepsilon}$$

*gilt*

$$P\left[\exists \textit{ Doppelpunkt in } (0,1]\right] = 1 - \exp(-C)$$

*Insbesondere gilt*

$$(5) \Rightarrow P\left[\exists \textit{ Doppelpunkt in } (0,1]\right] = 0$$

**Beweis.** In der Einführung haben wir gezeigt: Für $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ mit $\exists k_0\ \forall k \geq k_0 :\ a_k \neq 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{a_k}{k}\right)^k = \exp(-a)$$

Wegen

$$\begin{aligned} & \exists 1 \leq j \leq 2^{n+1} - 1 :\ N_{\left(j\cdot 2^{-(n+1)},(j+1)2^{-(n+1)}\right]}(w) \geq 2 \\ \Rightarrow\ & \exists 1 \leq k \leq 2^n - 1 :\ N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \geq 2 \end{aligned}$$

gilt

$$\left(\bigcup_{k=0}^{2^n-1}\left\{N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \geq 2\right\}\right)_n \quad \text{ist monoton fallend}$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
& P\left[\exists \text{ Doppelpunkt in } (0,1]\right] \\
= \quad & P\left[\forall n \in \mathbb{N}\ \exists 0 \leq k \leq 2^n - 1 :\ N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \geq 2\right] \\
= \quad & P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \geq 2\right\}\right] \\
\overset{\text{monoton fallend}}{=} \quad & \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \geq 2\right\}\right] \\
\overset{P[A]=1-P[A^C]}{=} \quad & 1 - \lim_{n\to\infty} P\left[\left(\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \geq 2\right\}\right)^C\right] \\
= \quad & 1 - \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcap_{k=0}^{2^n-1} \left\{N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \leq 1\right\}\right] \\
\overset{(3)\text{ unabhängig}}{=} \quad & 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{2^n-1} P\left[N_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \leq 1\right] \\
\overset{(2)}{=} \quad & 1 - \lim_{n\to\infty} P\left[N_{(0,2^{-n}]} \leq 1\right]^{2^n} \\
= \quad & 1 - \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{P\left[N_{(0,2^{-n}]} \geq 2\right]}{2^n \cdot 2^{-n}}\right)^{2^n} \\
\overset{2^n P\left[N_{(0,2^{-n}]}\geq 2\right]>0}{=} \quad & 1 - \exp\left(-\lim_{n\to\infty} \frac{P\left[N_{(0,2^{-n}]} \geq 2\right]}{2^{-n}}\right) \\
\overset{(5)}{=} \quad & 1 - \exp(-C)
\end{aligned}
$$

■

**Satz 53.2**

$$E[N_{(0,t]}] = tE[N_{(0,1]}]$$

**Beweis. a)** Für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto E[N_{(0,t]}]$$

gilt

$$\begin{aligned}
f(0) &= E[N_{(0,0]}] = E[N_\emptyset] = E[0] = 0 \\
f(s+t) &= E\left[N_{(0,s+t]}\right] \\
&\overset{(1)}{=} E\left[N_{(0,s]} + N_{(s,s+t]}\right] \\
&= E\left[N_{(0,s]}\right] + E\left[N_{(s,s+t]}\right] \\
&\overset{(2)}{=} E\left[N_{(0,s]}\right] + E\left[N_{(0,t]}\right] \\
&= f(s) + f(t)
\end{aligned}$$

**b) f ist monoton steigend.**

$$\begin{aligned}
f(t+\varepsilon) &= E[N_{(0,t+\varepsilon]}] \\
&= E[N_{(0,t]}] + \underbrace{E[N_{(t,t+\varepsilon]}]}_{\geq 0} \\
&\geq E[N_t] = f(t)
\end{aligned}$$

**c) f(t)=c $\cdot$ t** mit $c = E[N_{(0,1]}]$**.**

$$\begin{array}{ll}
t = 0: & f(0) = 0 = c \cdot 0 \\
t = 1: & f(1) = E\left[N_{(0,1]}\right] = c \cdot 1 \\
n \to n+1: & f(n+1) = f(n) + f(1) = c \cdot n + c \cdot 1 = (n+1) \cdot c
\end{array}$$

Sei $t \in \mathbb{Q}^+$. Mit

$$\begin{aligned}
m \cdot c &= f(m) = f\left(\frac{m}{n} n\right) \\
&= \underbrace{f\left(\frac{m}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{m}{n}\right)}_{n-mal} \\
&= n \cdot f\left(\frac{m}{n}\right)
\end{aligned}$$

gilt

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} c$$

**d)** Sei $t \in \mathbb{R}^+$: Wähle Folgen $(q_k)_k$ und $(Q_k)_k$ in $\mathbb{Q}^+$ mit $q_k \uparrow t$ und $Q_k \downarrow t$, d.h.

$$\forall k \in \mathbb{N}: \; q_k < t < Q_k$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
cq_k = f(q_k) &\leq f(t) \leq f(Q_k) = cQ_k \\
ct = c \lim_{k \to \infty} q_k &\leq f(t) \leq c \lim_{k \to \infty} Q_k = ct \\
ct &= f(t)
\end{aligned}$$

■

**Definition 53.3** *Ein* $(N_t)_{t\geq 0}$ *mit messbarem* $N_t : (W, S, P) \to \mathbb{N}_0$ *heißt* ***Wartezeitenprozess*** *mit* $c \geq 0 \iff$

$$\begin{array}{rl} \textbf{\textit{i)}} & N_0 = 0 \\ \textbf{\textit{ii)}} & \forall n \in \mathbb{N}\ \forall 0 = t_0 < \ldots < t_n : \ (N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{i=1}^n \textit{ ist unabhängig.} \\ \textbf{\textit{iii)}} & \forall t > s \geq 0 : \ P[(N_t - N_s)^{-1}(\cdot)] = Poi(c(t-s)) \end{array}$$

**Satz 53.4**

$$\begin{array}{rl} & (N_t)_{t\geq 0} := \left(N_{(0,t]}\right)_{t\geq 0} \textit{ ist ein Wartezeitenprozess} \\ \iff & \left(N_{(s,t]}\right)_{s,t\in[0,\infty),t\geq s} := (N_t - N_s)_{s,t\in[0,\infty),t\geq s} \textit{ erfüllt } (1)-(5) \end{array}$$

*Dabei gilt*

$$c := E[N_{[0,1]}] \geq 0$$

**Beweis.** "$\Rightarrow$":
**(1)** Für $(s, u] = (s, t] + (t, u]$ gilt

$$\begin{array}{rcl} N_{(s,u]} & \overset{Def}{=} & N_u - N_s \\ & = & N_u - N_t + N_t - N_s \\ & \overset{Def}{=} & N_{(s,t]} + N_{(t,u]} \end{array}$$

**(2)** $\forall t > 0\ \forall s, s' \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} P\left[(N_{s+t} - N_s)^{-1}(\cdot)\right] & \overset{iii)}{=} & Poi_{ct}(\cdot) \overset{iii)}{=} P[(N_{s'+t} - N_{s'})^{-1}(\cdot)] \\ P\left[N_{(s,s+t]}{}^{-1}(\cdot)\right] & = & P[N_{(s',s'+t]}{}^{-1}(\cdot)] \end{array}$$

**(3)**

$$\sum_{i=1}^n (a_i, b_i]$$

$$\begin{array}{rl} \overset{ii)}{\Rightarrow} & N_{b_1} - N_{a_1}, N_{a_2} - N_{b_1}, N_{b_2} - N_{a_2}, \ldots, N_{b_n} - N_{a_n} \text{ sind unabhängig} \\ \Rightarrow & N_{b_1} - N_{a_1}, N_{b_2} - N_{a_2}, \ldots, N_{b_n} - N_{a_n} \text{ sind unabhängig.} \\ \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} & N_{(a_1,b_1]}, \ldots, N_{(a_n,b_n]} \text{ sind unabhängig} \end{array}$$

**(4)** Mit iii) gilt für $t > 0$

$$E[N_{t+s} - N_s] \overset{P\left[(N_{s+t}-N_s)^{-1}(\cdot)\right]=Poi_{ct}(\cdot)}{=} \frac{1}{\exp(ct)} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(ct)^k}{k!}$$

$$= ct \underbrace{\frac{1}{\exp(ct)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ct)^{k-1}}{(k-1)!}}_{=1}$$

$$= ct < \infty$$

**(5)** Wegen

$$\begin{aligned} P[N_{(0,\varepsilon]} \geq 2] &= P[N_\varepsilon - N_0 \geq 2] \\ &= 1 - P[N_\varepsilon - N_0 = 0] - P[N_\varepsilon - N_0 = 1] \\ &\overset{iii)}{=} 1 - \exp(-c\varepsilon)(1 + c\varepsilon) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P[N_{(0,\varepsilon]} \geq 2]}{\varepsilon} &\overset{\text{Def}}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp(-c\varepsilon) \frac{\exp(c\varepsilon) - 1 - c\varepsilon}{\varepsilon} \\ &\overset{c\varepsilon \leq \frac{3}{2}}{\leq} \left( \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp(-c\varepsilon) \right) \cdot \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(c\varepsilon)^2}{\varepsilon} \\ &= 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": **i)** Wegen

$$E[\underbrace{N_0}_{\geq 0}] = 0 \cdot E[N_{(0,1]}] = 0$$

gilt

$$N_0 = 0 \text{ P-fast sicher.}$$

**ii)** Wegen

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (t_i, t_{i+1}] \\ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ & N_{(t_1,t_2]}, \ldots, N_{(t_{n-1},t_n]} \text{ sind unabhängig} \\ \overset{\text{Def}}{\Rightarrow}\ & (N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{1 \leq i \leq n} \text{ ist unabhängig} \end{aligned}$$

**iii)**

$$
\begin{aligned}
& & (0,t] &= \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right] \\
&\overset{(3)}{\Rightarrow} & & \left(N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}\right)_{1\le k\le 2^n} \text{ sind unabhängig} \\
&\overset{(2)}{\Rightarrow} & & \forall 1 \le k \le 2^n : P\left[\left(1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}\ge 1}\right)^{-1}(\cdot)\right] \\
& & & \overset{(2)}{=} P\left[\left(1_{N_{\left(0, \frac{t}{2^n}\right]}\ge 1}\right)^{-1}(\cdot)\right] \\
& & & = B\left(1, P\left[N_{\left(0,\frac{t}{2^n}\right]} \ge 1\right]\right)[\cdot] \\
&\overset{\text{unabhängig}}{\Rightarrow} & & P\left[\left(\sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}\ge 1}\right)^{-1}(\cdot)\right] = B\left(2^n, P\left[N_{(0,2^{-n}t]} \ge 1\right]\right)[\cdot]
\end{aligned}
$$

**A)** Sei

$$N_t^n := \sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}\ge 1}$$

Wegen

$$\left(N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]} \ge 1\right) \Rightarrow \left(N_{\left(\frac{(2k-2)t}{2^{n+1}}, \frac{(2k-1)t}{2^{n+1}}\right]} \ge 1 \text{ oder } N_{\left(\frac{(2k-1)t}{2^{n+1}}, \frac{2kt}{2^{n+1}}\right]} \ge 1\right)$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& N_t^{n+1} - N_t^n \\
= & \sum_{k=1}^{2^{n+1}} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^{n+1}}, \frac{kt}{2^{n+1}}\right]}\ge 1} - \sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}\ge 1} \\
= & \sum_{k=1}^{2^n} \underbrace{1_{N_{\left(\frac{(2k-2)t}{2^{n+1}}, \frac{(2k-1)t}{2^{n+1}}\right]}\ge 1} + 1_{N_{\left(\frac{(2k-1)t}{2^{n+1}}, \frac{2kt}{2^{n+1}}\right]}\ge 1} - 1_{N_{\left(\frac{(2k-2)t}{2^{n+1}}, \frac{2kt}{2^{n+1}}\right]}\ge 1}}_{\ge 0} \\
\ge & \ 0
\end{aligned}
$$

und $(N_t^n)_n$ ist monoton steigend ist. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} N_t^n \text{ existiert in } [0,\infty]$$

**B)** Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} N_t^n(w) \neq N_t^n(w) \\
\overset{\text{Def}}{\iff} \quad & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]} \geq 1}(w) \neq \sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]} \geq 1}(w) \\
\iff \quad & \exists 1 \leq k \leq 2^n : \ N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}(w) \geq 2
\end{aligned}
$$

denn die Summe ändert sich nicht mehr, wenn in jedem $\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]$ nur noch ein Punkt ist. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\left[\lim_{n\to\infty} N_t^n \neq N_t^n\right] &= \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]} \geq 2\right\}\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} P\left[N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]} \geq 2\right] \\
&\overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} P\left[N_{\left(0, \frac{t}{2^n}\right]} \geq 2\right] \\
&= t \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{P\left[N_{(0,2^{-n}t]} \geq 2\right]}{2^{-n}t}}_{=0} \\
&\overset{(5)}{=} 0
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
& (N_t^n(w))_n \text{ geht nicht in } \mathbb{R} \text{ gegen } \lim_{n\to\infty} N_t^n(w) \\
\iff \quad & \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n : |N_t^k(w) - \lim_{n\to\infty} N_t^n(w)| \geq \frac{1}{n_0} \\
\iff \quad & \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \ \sup_{k\geq n} |N_t^k(w) - \lim_{n\to\infty} N_t^n(w)| \geq \frac{1}{n_0}
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\left\{\lim_{n\to\infty} N_t^n = \infty\right\} &= \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\sup_{k\geq n} |N_t^k - \lim_{n\to\infty} N_t^n| \geq \frac{1}{n_0}\right\} \\
\left\{\lim_{n\to\infty} N_t^n = \infty\right\} &\supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\sup_{k\geq n} |N_t^k - \lim_{n\to\infty} N_t^n| \geq \frac{1}{n_0}\right\}
\end{aligned}
$$

Da $\left(\sup_{k\geq n}|N_t^k - \lim_{n\to\infty} N_t^n| \geq \frac{1}{n_0}\right)_n$ monoton fällt, gilt

$$\begin{aligned}
& P\left[\lim_{n\to\infty} N_t^n = \infty\right] \\
\leq\ & \sum_{n_0=1}^{\infty} P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\sup_{k\geq n}|N_t^k - \lim_{n\to\infty} N_t^n| \geq \frac{1}{n_0}\right\}\right] \\
\overset{\text{stetig von oben}}{=}\ & \sum_{n_0=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n}|N_t^k - \lim_{n\to\infty} N_t^n| \geq \frac{1}{n_0}\right] \\
\leq\ & \sum_{n_0=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P\left[N_t^n \neq \lim_{n\to\infty} N_t^n\right] \\
\overset{s.o.}{=}\ & 0 \\
1 =\ & P\left[\lim_{n\to\infty} N_t^n \in \mathbb{R}\right]
\end{aligned}$$

Damit gilt

Für P-fast alle $w$ $\exists n_0(w)\ \forall n \geq n_0(w) : N_t^n(w) = N_t^{n_0}(w)$
Für P-fast alle $w$ $\exists n_0(w)\ \forall n \geq n_0(w)\ \forall 1 \leq k \leq 2^n$ :
$N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]}(w) \leq 1$

und es ist höchstens ein Punkt jedem Intervall enthalten, d.h.

$$N_{(0,t]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]} \geq 1} \text{ P-fast sicher}$$

**C)** Da $(N_t^n)_n \uparrow \lim_{n\to\infty} N_t^n$, gilt

$$\begin{aligned}
ct \overset{\text{früher}}{=}\ & E\left[N_{(0,t]}\right] \\
=\ & E\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right]} \geq 1}\right] \\
\overset{(N_t^n)_n \uparrow \lim_{n\to\infty} N_t^n}{=}\ & \lim_{n\to\infty} E[N_t^n] \\
=\ & \lim_{n\to\infty} 2^n P\left[N_{\left(0, \frac{t}{2^n}\right]} \geq 1\right]
\end{aligned}$$

Mit dem Grenzwertsatz aus Kapitel 6 folgt

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}_0: \quad & P\left[\lim_{n\to\infty} N_t^n = k\right] \\
&\overset{\text{monoton steigend}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left[N_t^n = k\right] \\
&\overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left[\sum_{k=1}^{2^n} 1_{N_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n},\frac{kt}{2^n}\right]}\geq 1} = k\right] \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{n\to\infty} B\left(2^n, P[N_{2^{-n}t}\geq 1]\right)[k] \\
&\overset{\lim_{n\to\infty} 2^n P\left[N_{\left(0,\frac{t}{2^n}\right]}\geq 1\right]=ct}{=} Poi_{ct}[k]
\end{aligned}$$

$$P\left[\left(\lim_{n\to\infty} N_t^n\right)^{-1}(\cdot)\right] = Poi_{ct}[\cdot]$$

■

**Satz 53.5** *a) Die geometrische Verteilung ist gedächtnislos*

$$\forall m,n \geq 0 : P[X > m+n | X > m] = P[X > n]$$

*b) Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos.*

$$\forall s,t > 0 : \ P[X > t+s \mid X > s] = P[X > t]$$

*Deshalb kann man mit ihnen Wartezeiten beschreiben.*

**Beweis. a)** Wegen

$$\begin{aligned}
P[X > m] &= \sum_{k=m+1}^{\infty} P[X = k] \overset{\text{Definition}}{=} \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-q)^{k-1} q \\
&= q(1-q)^m \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k \\
&= q(1-q)^m \frac{1}{1-(1-q)} = (1-q)^m
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
P[X > m+n | X > m] &= \frac{P[X > m+n, X > m]}{P[X > m]} \\
&\overset{X>m+n>m}{=} \frac{P[X > m+n]}{P[X > m]} \\
&= \frac{(1-q)^{m+n}}{(1-q)^m} = (1-q)^n \\
&= P[X > n]
\end{aligned}$$

**b)** Mit

$$P[X > t] = \int_t^\infty e^{-ax} dx = \lim_{x\to\infty} - \exp(-ax) + \exp(-at) = \exp(-at)$$

gilt

$$\begin{aligned}
P[X > t + s | X > s] &\overset{Def}{=} \frac{P[X > t + s, X > s]}{P[X > s]} \\
&\overset{X > t+s > t}{=} \frac{P[X > t + s]}{P[X > s]} \\
&= \frac{\exp(-a(t + s))}{\exp(-as)} = \exp(-at) \\
&= P[X > t]
\end{aligned}$$

■

## Konstruktion des Wartezeitenprozesses

**Satz 53.6** *Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Wartezeitenprozess. Die Wahrscheinlichkeit zur Zeit s, dass man bis zum nächsten Punkt t Zeiteinheiten warten muss, wird beschrieben durch $Exp(c)$.*

**Beweis.**

$$P\left[N_{(s,s+t]} = 0\right] = P\left[N_{(0,t]} = 0\right] = \exp(-ct)$$

■

Starte deshalb nach jedem Ereignis erneut eine unabhängige $Exp(c)$-Wartezeit, um $(N_t)_t$ zu erzeugen.
Seien $Y_1, Y_2, \ldots : (W, S, P) \to \mathbb{N}_0$ messbar und unabhängig mit $P[Y_i^{-1}(\cdot)] = Exp(c)$

$$\begin{aligned}
Y_n &:= \text{Wartezeit zwischen } n-1\text{-tem und } n\text{-tem Punkt.} \\
T_n &:= \sum_{k=1}^{n} Y_n \\
&:= \text{Zeitpunkt des n-ten Punktes.} \\
N_t &:= \max\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\} \\
&= \text{Anzahl Punkte bis zur Zeit } t
\end{aligned}$$

**Satz 53.7** *Es gilt*

$$\{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
N_t = k &\iff \max\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\} = k \\
&\iff \begin{cases} \forall n > k : T_n > t \\ \forall n \leq k : T_n \leq t \end{cases} \\
&\iff T_k \leq t < T_{k+1}
\end{aligned}$$

■

**Satz 53.8**
$$\frac{a^i}{i!} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty 1_{\sum_{m=1}^i y_m \leq a} dy_1 \ldots dy_i$$

**Beweis.** $i = 1$:

$$\int_0^\infty dy_1 1_{y_1 \leq a} = \int_0^\infty 1_{(-\infty,a]}(y_1) dy_1 = \int_0^a dy_1 = a$$

$i \to i+1$: Mit $x = c - y_1$ und $dx = -dy_1$ gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty dy_1 \ldots dy_{i+1} 1_{\sum_{m=1}^{i+1} y_m \leq a} \\
= \quad & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty dy_1 \ldots dy_{i+1} 1_{y_1 \leq a} 1_{y_2 \leq a - y_1} \ldots 1_{y_{i+1} \leq a - y_1 - \ldots - y_i} \\
= \quad & \int_0^a \left( \int_0^{a-y_1} \ldots \int_0^{a-y_1-\ldots-y_i} dy_{i+1} \ldots dy_2 \right) dy_1 \\
= \quad & \int_0^a \left( \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty 1_{\sum_{m=2}^{i+1} y_m \leq a - y_1} dy_{i+1} \ldots dy_2 \right) dy_1 \\
\stackrel{\text{Fall } i}{=} \quad & \int_0^a \frac{(a-y_1)^i}{i!} dy_1 = -\int_a^0 \frac{x^i}{i!} dx \\
= \quad & \frac{a^{i+1}}{(i+1)!}
\end{aligned}$$

■

**Satz 53.9** $(N_t)_{t \geq 0}$ *ist ein Wartezeitenprozess mit Parameter c.*

**Beweis.** Da die $Y_1, \ldots, Y_{k+l+1}$ unabhängig sind, haben sie die gemeinsame Dichte
$$\prod_{j=1}^{k+l+1} c \exp(-c x_j) = c^{k+l+1} \exp\left( -c \sum_{j=1}^{k+l+1} x_j \right)$$

Für feste $x_1, \ldots, x_{k+l}$ gilt

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{j=1}^{k+l+1} x_j \\
dz &= dx_{k+l+1} \\
\int_0^\infty dx_{k+l+1} c \exp\left(-c \sum_{j=1}^{k+l+1} x_j\right) 1_{\sum_{j=1}^{k+l+1} x_j > t} &= \int_t^\infty c \exp(-cz) dz \\
&= \exp(-ct)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
N_s - N_0 = k &\iff N_s = k \\
&\iff T_k \leq s < T_{k+1} \\
N_t - \underbrace{N_s}_{=k} = l &\iff N_t = l + k \\
&\iff T_{k+l} \leq t < T_{k+l+1}
\end{aligned}$$

gilt für $l \geq 1$ und $2 \leq i \leq l$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{j=1}^{k+1} x_j - s \\
y_i &= x_{k+i}
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
& P\left[N_s-N_0=k, N_t-N_s=l\right] \\
= \; & P\left[T_k \leq s<T_{k+1}, T_{k+l} \leq t<T_{k+l+1}\right] \\
= \; & \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} d x_1 \ldots d x_{k+l+1} c^{k+l+1} \exp \left(-c \sum_{j=1}^{k+l+1} x_j\right) \\
& 1_{\sum_{j=1}^k x_j \leq s<\sum_{j=1}^{k+1} x_j} 1_{\sum_{j=1}^{k+l} x_j \leq t<\sum_{j=1}^{k+l+1} x_j} \\
= \; & c^{k+l} \exp (-c t) \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} d x_1 \ldots d x_{k+l} 1_{\sum_{j=1}^{k+l} x_j \leq t} 1_{\sum_{j=1}^k x_j \leq s<\sum_{j=1}^{k+1} x_j} \\
= \; & c^{k+l} \exp (-c t) \underbrace{\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} d y_1 \ldots d y_l 1_{\sum_{m=1}^l y_m \leq t-s} 1_{y_1>0}}_{=\frac{(t-s)^l}{l!}} \\
& \underbrace{\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} 1_{\sum_{j=1}^k x_j \leq s} d x_1 \ldots d x_k}_{=\frac{s^k}{k!}} \\
= \; & c^{k+l} \exp (-c t) \frac{(t-s)^l}{l!} \frac{s^k}{k!}
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
& \forall 0<s<t \; \forall l \in \mathbb{N} \; \forall k \in \mathbb{N}_0: \\
& P\left[N_s-N_0=k, N_t-N_s=l\right] \\
& =\exp (-c s) \frac{(c s)^k}{k!} \exp (-c(t-s)) \frac{(c(t-s))^l}{l!}
\end{aligned}
$$

insbesondere

$$N_s-N_0, N_t-N_s \text{ sind unabhängig}$$

Summieren über $k \in \mathbb{N}_0$ ergibt

$$
\begin{aligned}
P\left[N_t-N_s=l\right] & =\sum_{n=0}^{\infty} P\left[N_s-N_0=k, N_t-N_s=l\right] \\
& =\exp (-c(t-s)) \frac{(c(t-s))^l}{l!} \\
& =Poi_{c(t-s)}[l] \\
P\left[N_t-N_s=0\right] & =1-\sum_{l=1}^{\infty} P\left[N_t-N_s=l\right] \\
& =1-\sum_{l=1}^{\infty} Poi_{c(t-s)}[l]=Poi_{c(t-s)}[0]
\end{aligned}
$$

Den Beweis für

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall 0 = t_0 < \ldots < t_n :\ (N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{i=1}^n \text{ ist unabhängig}$$

geht analog. ■

# Teil IV. Maßtheorie

## 54. Konvexe Funktionen

**Definition 54.1** *Eine Menge G heißt* ***konvex*** $\iff$

$$\forall x, y \in G \ \forall c \in [0,1] : cx + (1-c)y \in G$$

**Beispiel 54.2** *a)* $G \subset \mathbb{R}$ *ist konvex* $\iff$
*G ist ein Intervall*
*b) Die Wahrscheinlichkeitsmaße auf (W,S) sind eine konvexe Menge.*

**Beweis.** a) "$\Rightarrow$": Betrachte Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ mit

$$\begin{array}{rcl} x_n & < & y_n \\ x_n & \downarrow & \inf G \\ y_n & \uparrow & \sup G \end{array}$$

Da G konvex ist, gilt

$$\forall c \in [0,1] : cx_n + (1-c)y_n \in G$$

Für

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, c \mapsto cx_n + (1-c)y_n$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & y_n \\ f(1) & = & x_n \end{array}$$

Da f stetig in c ist, gilt

$$\forall p \in [x_n, y_n] \ \exists s \in [0,1] : \ f(s) = p$$

d.h.

$$\begin{array}{rcl} f([0,1]) & = & [x_n, y_n] \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ [x_n, y_n] & \subset & G \\ \bigcup_n [x_n, y_n] & \subset & G \end{array}$$

Das ergibt

$$(\inf x_n, \sup y_n) \subset G \subset [\inf x_n, \sup y_n]$$

"$\Leftarrow$": Sei $G = (a, b)$ und $x, y \in G$. Dann gilt mit obigem f

$$\begin{aligned}
a < x < y < b \\
a < f(c) < b \\
a < cx + (1-c)y < b \\
cx + (1-c)y \in G
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
cm_1[\emptyset] + (1-c)m_2[\emptyset] &= 0 \\
cm_1[A] + (1-c)m_2[A] &\geq 0 \\
cm_1[W] + (1-c)m_2[W] &= c + 1 - c = 1 \\
cm_1\left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right] + (1-c)m_2\left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right] &= c\sum_{i=1}^{\infty} m_1[A_i] + (1-c)\sum_{i=1}^{\infty} m_2[A_i]
\end{aligned}$$

■

**Definition 54.3** *Sei G eine konvexe Menge.*
*Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$ heißt* ***konvex*** $\iff$

$$\forall x, y \in G\ \forall c \in (0,1): \ f(\underbrace{cx + (1-c)y}_{\in G}) \leq cf(x) + (1-c)f(y)$$

*Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$ heißt* ***streng konvex*** $\iff$

$$\forall x, y \in G\ \forall c \in (0,1): \ f(\underbrace{cx + (1-c)y}_{\in G}) < cf(x) + (1-c)f(y)$$

*Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$ heißt* ***konkav*** $\iff$

$$\forall x, y \in G\ \forall c \in (0,1): \ f(\underbrace{cx + (1-c)y}_{\in G}) \geq cf(x) + (1-c)f(y)$$

*Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$ heißt* ***streng konkav*** $\iff$

$$\forall x, y \in G\ \forall c \in (0,1): \ f(\underbrace{cx + (1-c)y}_{\in G}) > cf(x) + (1-c)f(y)$$

**Satz 54.4** *$f$ ist konvex $\iff$ $-f$ ist konkav.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned} & f(cx+(1-c)y) &\leq& \; cf(x)+(1-c)f(y) \\ \iff & -f(cx+(1-c)y) &\geq& \; c(-f(x))+(1-c)(-f)(y) \end{aligned}$$

■

**Satz 54.5** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex.*
*a)*

$$g_x : I \backslash \{x\} \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

*ist monoton wachsend.*
*Ist f* ***streng konvex****, so ist $g_x$ streng monoton wachsend.*
*b) Die links- und rechtsseitige Ableitung von f existiert:*

$$\begin{aligned} D^- f(x) &= \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \sup_{y<x} g_x(y) \\ D^+ f(x) &= \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \inf_{y>x} g_x(y) \end{aligned}$$

*c) Für $x \in \overset{\circ}{I}$ gilt*

$$D^- f(x) \leq D^+ f(x)$$

*d) $D^- f(x)$ und $D^+ f(x)$ sind die minimale und maximale Steigung in x.*

$$\begin{aligned} & \forall y \in I \backslash \{x\} : \; f(x) + (y-x)t \leq f(y) \\ \iff & t \in [D^- f(x), D^+ f(x)] \end{aligned}$$

*Ist f* ***streng konvex****, so gilt*

$$\begin{aligned} & \forall y \in I \backslash \{x\} : \; f(x) + (y-x)t < f(y) \\ \iff & t \in [D^- f(x), D^+ f(x)] \end{aligned}$$

*e) f ist stetig in $\overset{\circ}{I}$.*
*f) $x \mapsto D^- f(x)$ ist monoton wachsend und linksstetig.*
*$x \mapsto D^+ f(x)$ ist monoton wachsend und rechtsstetig.*

**Beweis. a)** Seien $u, v \in I \backslash \{x\}$ mit $u \leq v$.
**1. Fall:** Für $x < u \leq v$ gilt

$$c := \frac{u-x}{v-x} \in [0,1]$$

und

$$
\begin{aligned}
& \left(1-\frac{u-x}{v-x}\right)x+\frac{u-x}{v-x}v \\
= \quad & \frac{(v-u)x+(u-x)v}{v-x} \\
= \quad & u
\end{aligned}
$$

Da f konvex ist, gilt

$$
\begin{aligned}
f(u) &= f\left(\left(\underbrace{1-\frac{u-x}{v-x}}_{=1-c}\right)x+\left(\underbrace{\frac{u-x}{v-x}}_{=c}\right)v\right) \\
&\leq \left(1-\frac{u-x}{v-x}\right)f(x)+\frac{u-x}{v-x}f(v) \\
&= f(x)+\frac{u-x}{v-x}(f(v)-f(x))
\end{aligned}
$$

und somit da $u-x>0$

$$
\frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq \frac{f(v)-f(x)}{v-x}
$$

**f streng konvex:** $<$ statt $\leq$.
**2. Fall:** Für $u<x<v$ gilt

$$
c:=\frac{x-u}{v-u} \in [0,1]
$$

und

$$
\begin{aligned}
& \left(1-\frac{x-u}{v-u}\right)u+\frac{x-u}{v-u}v \\
= \quad & \frac{(v-x)u+(x-u)v}{v-u} \\
= \quad & x
\end{aligned}
$$

Da f konvex ist, gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\left(\underbrace{1-\frac{x-u}{v-u}}_{=1-c}\right)u+\underbrace{\frac{x-u}{v-u}}_{=c}v\right) \\
&\leq \left(1-\frac{x-u}{v-u}\right)f(u)+\frac{x-u}{v-u}f(v)
\end{aligned}
$$

und somit da $u - x < 0$

$$\begin{aligned}
& (v-u)f(x) \leq (v-x)f(u) + (x-u)f(v) \\
\iff \quad & f(u)(v-x) \geq f(v)(u-x) + f(x)(v-u) \\
\iff \quad & \frac{f(u)}{u-x} \leq \frac{f(v)}{v-x} + \frac{f(x)(v-x-(u-x))}{(u-x)(v-x)} \\
\iff \quad & \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq \frac{f(v)-f(x)}{v-x}
\end{aligned}$$

**f streng konvex:** $<$ statt $\leq$.
**3. Fall:** Für $u \leq v < x$ gilt

$$c := \frac{x-v}{x-u} \in [0,1]$$

und

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{x-v}{x-u}\right) x + \frac{x-v}{x-u} u \\
= \quad & \frac{(v-u)x + (x-v)u}{x-u} \\
= \quad & v
\end{aligned}$$

Da f konvex ist, gilt

$$\begin{aligned}
f(v) \quad &= \quad f\left(\left(\underbrace{1 - \frac{x-v}{x-u}}_{=1-c}\right) x + \underbrace{\frac{x-v}{x-u}}_{=c} u\right) \\
&\leq \quad \left(1 - \frac{x-v}{x-u}\right) f(x) + \frac{x-v}{x-u} f(u)
\end{aligned}$$

und somit da $u - x < 0$ und $v - x < 0$

$$\begin{aligned}
& (x-u)f(v) \leq (v-u)f(x) + (x-v)f(u) \\
\iff \quad & f(u)(v-x) \leq f(v)(u-x) + f(x)(v-u) \\
\overset{(u-x)(v-x)>0}{\iff} \quad & \frac{f(u)}{u-x} \leq \frac{f(v)}{v-x} + \frac{f(x)(v-x-(u-x))}{(u-x)(v-x)} \\
\iff \quad & \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq \frac{f(v)-f(x)}{v-x}
\end{aligned}$$

**f streng konvex:** $<$ statt $\leq$.
**b)** Da $g_x(y)$ monoton steigend ist, gilt für $z > x$

$$\forall y < x : g_x(y) \leq g_x(z) < \infty$$

Eine monoton steigende, beschränkte Folge hat die kleinste obere Schranke als Grenzwert

$$\begin{aligned} D^- f(x) &= \lim_{y\uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\uparrow x} g_x(y) \\ &= \sup_{y<x} g_x(y) \end{aligned}$$

Für $y \downarrow x$ fällt $g_x(y)$ monoton. Für $u < x$ gilt

$$\forall y > x : g_x(y) \geq g_x(u) > -\infty$$

Eine monoton fallende beschränkte Folge hat die größte untere Schranke als Grenzwert

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \lim_{y\downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\downarrow x} g_x(y) \\ &= \inf_{y>x} g_x(y) \end{aligned}$$

**c)** Da $g_x(y)$ monoton ist, gilt

$$\begin{aligned} \forall y_1 < x < y_2 : \ \frac{f(y_1)-f(x)}{y_1-x} &\leq \frac{f(y_2)-f(x)}{y_2-x} \\ \forall x < y_2 : \ \sup_{y<x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\leq \frac{f(y_2)-f(x)}{y_2-x} \\ \sup_{y<x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\leq \inf_{y>x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ D^- f(x) &\leq D^+ f(x) \end{aligned}$$

**d)**

$$\begin{aligned} & \forall y \in I \backslash \{x\} : \ f(x) + (y-x)t \leq f(y) \\ \iff & \forall y \in I \backslash \{x\} : \begin{cases} t \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{für } y > x \\ t \geq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{für } y < x \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} t \leq \inf_{y>x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = D^+ f(x) \\ t \geq \sup_{y<x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = D^- f(x) \end{cases} \\ \iff & D^- f(x) \leq t \leq D^+ f(x) \end{aligned}$$

Ist f streng konvex, so ist g streng monoton wachsend und

$$
\begin{array}{rl}
& \forall y \in I \backslash \{x\}: \ f(x) + (y-x)t < f(y) \\
\iff & \forall y \in I \backslash \{x\}: \begin{cases} t < \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{für } y > x \\ t > \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{für } y < x \end{cases} \\
\overset{g_x \text{ streng monoton wachsend}}{\iff} & \begin{cases} t \leq \inf_{y>x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = D^+ f(x) \\ t \geq \sup_{y<x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = D^- f(x) \end{cases} \\
\iff & D^- f(x) \leq t \leq D^+ f(x)
\end{array}
$$

**e)** Wegen

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) &\leq (x-y)t \text{ mit } t \in [D^- f(x), D^+ f(x)] \\
f(y) - f(x) &\leq (y-x)s \text{ mit } s \in [D^- f(y), D^+ f(y)]
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& |f(x) - f(y)| \\
\leq \ & |y-x| \cdot \max\left\{|D^- f(x)|, |D^+ f(x)|, |D^- f(y)|, |D^+ f(y)|\right\}
\end{aligned}
$$

und f ist stetig.
**f)** Sei $x_1 < x_2$. Wegen

$$
\begin{array}{rcl}
g_y(x_1) & \leq & g_y(x_2) \\
\dfrac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} & \leq & \dfrac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2}
\end{array}
$$

gilt

$$
\begin{array}{rcl}
D^- f(x_1) & = & \sup\limits_{y<x_1} \dfrac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \\
& \leq & \sup\limits_{y<x_1} \dfrac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2} \\
& \overset{x_1 \leq x_2}{\leq} & \sup\limits_{y<x_2} \dfrac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2} \\
& = & D^- f(x_2)
\end{array}
$$

und $D^- f(x)$ ist monoton wachsend.
**g)** Sei $x_2$ fest. Wegen

$$
D^- f(x_i) = \sup_{y<x_i} g_{x_i}(y) = \sup_{y<x_i} g_y(x_i)
$$

und da $g_{y_i}$ monoton wachsend ist, gilt

$$\exists z_1\ \forall z_1 < y_1 < x_1 :\ \left|g_{y_1}(x_1) - D^- f(x_1)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\exists z_2\ \forall z_2 < y_2 < x_2 :\ \left|g_{y_2}(x_2) - D^- f(x_2)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

d.h. wir benötigen

$$\max(z_1, z_2) < y_1, y_2 < x_1 < x_2$$

Wegen

$$D^- f(x) = \sup_{y<x} g_x(y) = \lim_{y \uparrow x} g_x(y)$$

ist

$$g_x : (-\infty, x] \to \mathbb{R}, y \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \\ D^- f(x) \end{cases}$$

stetig, d.h. gleichmäßig stetig auf $[\max(z_1, z_2), x_2]$:

$$|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |g_{x_2}(y_1) - g_{x_2}(y_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Wähle deshalb $y_1, y_2$ mit

$$\max(z_1, z_2, x_2 - \delta) < y_1, y_2 < x_2$$

Da $g_{y_1}$ stetig in $x_2$ ist, gilt

$$|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |g_{y_1}(x_1) - g_{y_1}(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Wähle deshalb $x_1$ mit

$$\max(y_1, y_2, x_2 - \delta_1) < x_1 < x_2$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left|D^- f(x_1) - D^- f(x_2)\right| \\ \le\ & \left|D^- f(x_1) - g_{y_1}(x_1)\right| + |g_{y_1}(x_1) - g_{y_1}(x_2)| \\ & + \underbrace{\left|g_{y_1}(x_2) - g_{y_2}(x_2)\right|}_{=|g_{x_2}(y_1) - g_{x_2}(y_2)|} + \left|D^- f(x_2) - g_{y_2}(x_2)\right| \\ <\ & \varepsilon \end{aligned}$$

Für $D^+ f(x)$ genauso. ■

**Definition 54.6** *a)* $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt* ***affin-linear*** $\iff$

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : g(x) = ax + b$$

*b) Für* $f : I \to \mathbb{R}$ *sei*

$$L(f) := \{g : I \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}, g \leq f\}$$

*die Menge der affin-linearen Abbildungen g, die kleiner gleich f sind und*

$$\sup L(f) : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \sup_{g \in L(f)} g(x)$$

*das kleinste obere Schranke all dieser Abbildungen.*

**Satz 54.7** *a) Eine affin-lineare Funktion ist konvex.*
*b) Die kleinste obere Schranke konvexer Funktionen ist konvex.*
*c) Positive Linearkombinationen konvexer Funktionen sind konvex.*

**Beweis. a)**

$$\begin{aligned} g(cx + (1-c)y) &= a(cx + (1-c)y) + b \\ &= cax + (1-c)ay + (c + 1 - c)b \\ &= cg(x) + (1-c)g(y) \end{aligned}$$

**b)** Seien $(f_i)_{i \in I}$ konvex, d.h.

$$\forall i \in I : \ f_i(cx + (1-c)y) \leq cf_i(x) + (1-c)f_i(y)$$

Wegen

$$\begin{aligned} cf_i(x) + (1-c)f_i(y) &\leq \sup_{i \in I} cf_i(x) + \sup_{i \in I}(1-c)f_i(y) \\ \sup_{i \in I}(cf_i(x) + (1-c)f_i(y)) &\leq \sup_{i \in I} cf_i(x) + \sup_{i \in I}(1-c)f_i(y) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I} f_i(cx + (1-c)y) &\leq \sup_{i \in I}(cf_i(x) + (1-c)f_i(y)) \\ &\leq c \sup_{i \in I} f_i(x) + (1-c) \sup_{i \in I} f_i(y) \end{aligned}$$

**c)** Seien $b_i \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} b_i f_i(cx + (1-c)y) &\leq \sum_{i=1}^{n} b_i(cf_i(x) + (1-c)f_i(y)) \\ &= c \sum_{i=1}^{n} b_i f_i(x) + (1-c) \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i f_i((1-c)y) \end{aligned}$$

■

**Satz 54.8** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.*
*1.) Dann sind gleichwertig*
*a) $f$ ist konvex.*
*b) $\forall x_0 \in I\ \exists g_{x_0} \in L(f) : g_{x_0}(x_0) = f(x_0)$*
*c) $L(f) \neq \emptyset$ und $f = \sup L(f)$*
*d) $\exists$ Folge $(g_n)_n$ in L(f):*

$$f = \lim_{n\to\infty} \max\{g_1, \dots, g_n\}$$

*2.) Ist $f$ **streng konvex**, gilt*

$$\forall x_0 \in I\ \exists g_{x_0} \in L(f) : \begin{cases} g_{x_0}(x_0) = f(x_0) \\ \forall y \neq x_0 : \ g_{x_0}(y) < f(y) \end{cases}$$

**Beweis. 1.) a) $\Rightarrow$ b) :**

$$g_{x_0} : I \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x_0) + (y - x_0)D^+f(x_0)$$

ist affin-linear und wegen

$$\begin{aligned} g_{x_0}(x_0) &= f(x_0) \\ \forall y \in I : g_{x_0}(y) &= f(x_0) + (y - x_0)D^+f(x_0) \\ &\leq f(y) \end{aligned}$$

gilt

$$g_{x_0} \in L(f)$$

**b) $\Rightarrow$ c) :** Sei $x_0 \in I$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $g_{x_0} \in L(f)$ mit $f(x_0) = g_{x_0}(x_0)$. Das ergibt

$$\begin{aligned} L(f) &\neq \emptyset \\ \sup L(f)(x_0) &\geq f(x_0) \end{aligned}$$

Wegen

$$\forall g \in L(f) : g \leq f$$

gilt auch

$$\sup L(f)(x_0) \leq f(x_0)$$

Da $x_0 \in I$ beliebig war, gilt

$$f = \sup L(f)$$

**c) $\Rightarrow$ a):** Da die kleinste obere Schranke konvexer Funktionen $g \in L(f)$ konvex ist und wegen $L(f) \neq \emptyset$ ist

$$f = \sup_{g \in L(f)} g$$

konvex.
**b) $\Rightarrow$ d):** Sei $(x_i)_i$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap I$. Es gilt

$$\forall x_i \in \mathbb{Q} \cap I \ \exists g_i \in L(f): \ f(x_i) = g_i(x_i)$$

Wegen $g_i \leq f$ gilt

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq j \leq n: \ f(x_j) &= \max_{1 \leq i \leq n} g_i(x_j) \\ \forall j \in \mathbb{Q} \cap I: \ f(x_j) &= \lim_{n \to \infty} \max_{1 \leq i \leq n} g_i(x_j) \end{aligned}$$

Da f stetig ist und $\mathbb{Q} \cap I$ dicht ist in I, gilt

$$f = \lim_{n \to \infty} \max\{g_1, \ldots, g_n\}$$

**d) $\Rightarrow$ a):** Da die kleinste obere Schranke konvexer Funktionen konvex ist, ist

$$\lim_{n \to \infty} \max\{g_1, \ldots, g_n\} = \sup_{g \in L(f)} g$$

konvex.
**2.)** Für

$$g_{x_0}: I \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x_0) + (y - x_0) D^+ f(x_0)$$

gilt

$$\begin{aligned} g_{x_0}(x_0) &= f(x_0) \\ g_{x_0}(y) &= f(x_0) + (y - x_0) D^+ f(x_0) \\ &< f(y) \end{aligned}$$

■

**Satz 54.9** *Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist gleichwertig*
*a) f ist konvex*
*b) f' ist monoton wachsend*
*c) $f'' \geq 0$*

**Beweis. a) $\Rightarrow$ b):** In f) gezeigt.
**b) $\Rightarrow$ a):** Es gilt

$$\begin{aligned} s_x &\in (x, cx + (1-c)y) \\ s_y &\in (cx + (1-c)y, y) \end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
\frac{f(cx+(1-c)y)-f(x)}{cx+(1-c)y-x} &= f'(s_x) \\
\frac{f(y)-f(cx+(1-c)y)}{y-(cx+(1-c)y)} &= f'(s_y)
\end{aligned}
$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
& s_x < s_y \\
\overset{f' \text{ monoton wachsend}}{\Rightarrow} \quad & f'(s_x) \leq f'(s_y) \\
\Rightarrow \quad & \frac{f(cx+(1-c)y)-f(x)}{cx+(1-c)y-x} \leq \frac{f(y)-f(cx+(1-c)y)}{y-(cx+(1-c)y)} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{f(cx+(1-c)y)-f(x)}{(1-c)(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(cx+(1-c)y)}{c(y-x)} \\
\Longleftrightarrow \quad & f(cx+(1-c)y) \leq cf(x)+(1-c)f(y)
\end{aligned}
$$

**b) $\Rightarrow$ c):**

$$f''(x) = \lim_{y \searrow x} \frac{\overbrace{f'(y)-f'(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{y-x}_{>0}} \geq 0$$

**c) $\Rightarrow$ b):** Sei $y > x$. Da f' differenzierbar ist, gilt

$$\exists p \in [x,y]: \; f''(p) = \frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}$$

Wegen

$$\frac{f'(y)-f'(x)}{\underbrace{y-x}_{>0}} = f''(p) \geq 0$$

muss $f'(y) - f'(x) \geq 0$ gelten, d.h.

$$f'(x) \leq f'(y)$$

■

### Anwendung für Wahrscheinlichkeitsmaße

**Satz 54.10** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $X : (W,S,P) \to I$ mit $E[|X|] < \infty$ und f konvex.*
*a) Für $E[X] \in \partial I$ gilt*

$$X = E[X] \text{ P-fast sicher}$$

*b)*

$$\begin{aligned} E[f(X)^-] &< \infty \\ E[f(X)] &\geq f(E[X]) \end{aligned}$$

*wobei ggf.* $E[f(X)] = \infty$ *möglich ist.*
*c) Ist f* ***streng konvex*** *und X nicht P-fast sicher konstant, so gilt*

$$E[f(X)] > f(E[X])$$

**Beweis. a)** Sei $E[X] = \inf I$. Wegen

$$\begin{aligned} X - \inf I &\geq 0 \\ E[X - \inf I] &= E[X] - \inf I = 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} X - \inf I &= 0 \text{ P-fast sicher} \\ X &= E[X] \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

Für $E[X] = \sup I$ genauso.
**b)** Da f konvex ist, gilt

$$\exists a, b \in \mathbb{R}: \ ax + b \leq f(x)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} -f(x) &\leq -ax - b \\ f^-(x) &= \max(0, -f(x)) \\ &\leq \max(0, -ax - b) \\ &\leq |b| + |a||x| \end{aligned}$$

d.h.

$$E[f(X)^-] \leq |b| + |a|E[|X|] < \infty$$

Da f konvex ist, wähle $ax + b \in L(f)$ mit

$$aE[X] + b = f(E[X])$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} E[f(X)] &\overset{f \geq ax+b}{\geq} E[aX + b] \\ &= aE[X] + b\underbrace{m[W]}_{=1} = f(E[X]) \end{aligned}$$

**c)** Sei f streng konvex. Wähle $ax + b \in L(f)$ mit

$$\begin{aligned} f(E[X]) &= aE[X] + b \\ \forall y \neq E[X]: \ f(y) &> ay + b \end{aligned}$$

Nach b) gilt $E[f(X)] \geq f(E[X])$. Annahme

$$E[f(X)] = f(E[X])$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & E[\underbrace{f(X) - aX - b}_{\geq 0}] = E[f(X)] - aE[X] - b \\ & \overset{\text{Annahme}}{=} f(E[X]) - f(E[X]) = 0 \\ \Rightarrow \quad & f(X) - aX - b = 0 \text{ P-fast sicher} \\ \Rightarrow \quad & f(X) = aX + b \text{ P-fast sicher} \\ \overset{\forall y \neq E[X]:\ f(y) > ay+b}{\Rightarrow} \quad & X = E[X] \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

ein Widerspruch, d.h.

$$E[f(X)] > f(E[X])$$

■

**Satz 54.11** *Sei $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$, $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $p < q$. Dann gilt*

$$E\left[|X|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq E\left[|X|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

**Beweis.** Für

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^{q/p}$$

gilt wegen $q > p$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1} \\ f''(x) &= \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) x^{\frac{q}{p}-2} > 0 \end{aligned}$$

Damit ist f konvex und es gilt

$$\begin{aligned} f(E[X]) &\leq E[f(|X|)] \\ \left(\int |X|^p dm\right)^{q/p} &\leq \int |X|^{p \cdot q/p} dm \end{aligned}$$

Zieht man die q-te Wurzel folgt

$$\left(\int |X|^p dm\right)^{1/p} \leq \left(\int |X|^q dm\right)^{1/q}$$

■

# 55. $L^p$-Räume

Sei $m$ ein Maß auf $(W, S)$.

**Satz 55.1** *Für $1 \leq p < \infty$ ist*

$$\tilde{L}^p \quad := \quad \left\{ f : (W,S) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}}) : \int |f|^p dm < \infty \right\}$$

*ein Vektorraum.*

**Beweis.** Null:

$$\int |0|^p dm = 0 < \infty$$

Skalarmultiplikation:

$$\int |cf|^p dm = |c|^p \int |f|^p dm < \infty$$

Addition: Mit

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq (2 \max(|f|, |g|))^p \\ &\leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

folgt

$$\int |f+g|^p dm \leq 2^p \int |f|^p dm + 2^p \int |g|^p dm < \infty$$

■

**Satz 55.2**

$$\| \cdot \|_p \colon \tilde{L}^p \to [0, \infty), f \mapsto \left( \int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$$

*ist eine definierte Abbildung*

**Beweis.** Da $0 \leq \int |f|^p dm < \infty$ ist die p-te Wurzel definiert und

$$\left( \int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

■

**Satz 55.3** *Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \in [0, \infty]$. Dann gilt*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

**Beweis.** Ist $x = \infty$ oder $y = \infty$ so steht rechts $\infty$ und die Ungleichung stimmt.
Seien $x, y < \infty$. Wegen

$$-\ln''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

ist $-\ln$ konvex und es gilt

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &\leq \frac{1}{p}(-\ln x^p) + \frac{1}{q}(-\ln y^q) \\ &= -\ln xy \end{aligned}$$

Anwendung von exp auf beide Seiten ergibt, da exp monoton steigend ist,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

■

**Satz 55.4** *Seien* $1 < p, q < \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und* $f, g : (W, S) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$. *Dann gilt*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

*Insbesondere gilt*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_2 \| g \|_2$$

**Beweis.** Ist $\| f \|_p = \infty$ oder $\| g \|_q = \infty$, so steht rechts $\infty$ und die Ungleichung stimmt.
Seien $\| f \|_p, \| g \|_q < \infty$. In jedem Punkt gilt

$$\frac{|f(x)|}{\| f \|_p} \frac{|g(x)|}{\| g \|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\| f \|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\| g \|_q^q}$$

Integration ergibt

$$\begin{aligned} & \int \frac{|f||g|}{\| f \|_p \| g \|_q} dm \\ \leq \ & \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p dm}{\int |f|^p dm} + \frac{1}{q} \frac{\int |g|^q dm}{\int |g|^q dm} \\ = \ & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

■

**Satz 55.5** *Seien* $f, g : (W, S) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *und* $1 \leq p < \infty$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \| f + g \|_p &\leq \| f \|_p + \| g \|_p \\ \| cf \|_p &= |c| \, \| f \|_p \end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned}
& \| f+g \|_p^p \\
= \quad & \int |f+g|^p dm \\
= \quad & \int |f+g||f+g|^{p-1} dm \\
\overset{\Delta}{\leq} \quad & \int |f||f+g|^{p-1} dm + \int |g||f+g|^{p-1} dm \\
\overset{\text{s.o.}}{\leq} \quad & \| f \|_p \| (f+g)^{p-1} \|_q \; + \; \| g \|_p \| (f+g)^{p-1} \|_q \\
= \quad & (\| f \|_p + \| g \|_p) \left( \int |f+g|^{q(p-1)} dm \right)^{\frac{1}{q}} \\
\overset{q(p-1)=p}{=} \quad & (\| f \|_p + \| g \|_p) \left( \int |f+g|^p dm \right)^{\frac{p}{qp}} \\
= \quad & (\| f \|_p + \| g \|_p) \| f+g \|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\| f+g \|_p \quad & \overset{1=p-\frac{p}{q}}{=} \quad \frac{\| f+g \|_p^p}{\| f+g \|_p^{\frac{p}{q}}} \\
& \leq \quad \| f \|_p + \| g \|_p
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\| cf \|_p \quad & = \quad \left( \int |cf|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \quad |c| \left( \int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \quad |c| \; \| f \|_p
\end{aligned}$$

■

**Satz 55.6**

$$\begin{aligned}
N \quad & := \quad \{ f \in \tilde{L}^p : f = 0 \; \textit{m-fast überall} \} \\
& = \quad \{ f \in \tilde{L}^p : \| f \|_p = 0 \}
\end{aligned}$$

*ist ein Untervektorraum von $\tilde{L}^p$.*

**Beweis.** Wegen

$$\begin{array}{rl} & \| f \|_p = 0 \\ \Longleftrightarrow & \int |f|^p dm = 0 \\ \Longleftrightarrow & |f|^p = 0 \text{ m-fast überall} \\ \Longleftrightarrow & |f| = 0 \text{ m-fast überall} \end{array}$$

sind die beiden Mengen gleich.
Dass die obere Menge ein Vektorraum ist, wurde schon gezeigt. ∎

**Satz 55.7** $\| \cdot \|_p$ *ist eine Länge auf*

$$L^p := \{f + n : f \in \tilde{L}^p, n \in N\}$$

**Beweis. a)** $\| \cdot \|_p$ **ist unabhängig vom Vertreter aus** $L^p$**:**
Seien $f \in L^p, n \in N \subset L^p$. Wegen

$$\begin{array}{rcl} \| f \|_p & = & \| f + n - n \|_p \\ & \leq & \| f + n \|_p + \underbrace{\| n \|_p}_{=0} \\ & \leq & \| f \|_p + \underbrace{\| n \|_p}_{=0} = \| f \|_p \end{array}$$

gilt

$$\forall n \in N : \| f + n \|_p = \| f \|_p$$

b) Gezeigt wurde schon

$$\begin{array}{rcl} \| f \|_p & \geq & 0 \\ \| cf \|_p & = & |c| \, \| f \|_p \\ \| f + g \|_p & \leq & \| f \|_p + \| g \|_p \\ \| f \|_p = 0 & \Longleftrightarrow & f = 0 \text{ m-fast sicher} \\ & \Longleftrightarrow & f = 0 + n \text{ mit } n \in N \end{array}$$

∎

**Definition 55.8** *Seien* $1 \leq p < \infty$ *und* $f, f_n \in L^p$ *für* $n \in \mathbb{N}$.
$(f_n)_n$ ***geht gegen f in*** $L^p$ $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \| f - f_n \|_p = 0$$

$(f_n)_n$ *ist eine* ***Cauchyfolge*** *in* $L^p$ $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n, m \geq n_0 : \| f - f_n \|_p \leq \varepsilon$$

**Satz 55.9** *Ist $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^p$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ und ein $f \in L^p$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f \text{ m-fast sicher}$$
$$\lim_{k\to\infty} \| f_{n_k} - f \|_p = 0$$

**Beweis.** Die Idee ist: Addiere zu $f_{n_1}$ ein immer späteres $f_{n_k} - f_{n_1}$
**a)** Da $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, gilt

$$\forall k \geq 1 \; \exists n_k \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq n_k : \| f_n - f_m \|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Wähle jeweils das kleinste passende $n_k$, dann gilt

$$n_{k+1} \geq n_k$$

Setze

$$\begin{aligned} g_k &:= f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \\ g &:= \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \end{aligned}$$

**b)** Wegen

$$\frac{d}{dx} x^p = p x^{p-1} > 0$$

ist

$$h : (0, \infty) \to (0, \infty), x \mapsto x^p$$

monoton wachsend.
**c)** Wegen $n_{k+1} \geq n_k$ und da $x \mapsto x^p$ stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
\| g \|_p &= \left( \int \left( \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |g_k| \right)^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{stetig}}{=} \left( \int \lim_{N\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{N} |g_k| \right)^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{monoton}}{=} \lim_{N\to\infty} \left( \int \left( \sum_{k=1}^{N} |g_k| \right)^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} |g_k| \right\|_p \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \| g_k \|_p \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p}_{\leq 2^{-k}} \\
&\overset{n_{k+1}\geq n_k}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
|g|^p &< \infty \text{ m-fast überall} \\
\sum_{k=1}^{\infty} |g_k| &< \infty \text{ m-fast überall}
\end{aligned}$$

Damit hat die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ m-fast überall einen Grenzwert. Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} g_k &= \sum_{k=1}^{N} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_{N+1}} - f_{n_1} \\
f_{n_{N+1}} &= \sum_{k=1}^{N} g_k + f_{n_1} \\
|f_{n_{N+1}}| &\leq |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{N} |g_k|
\end{aligned}$$

hat $(f_{n_k})_k$ m-fast überall einen Grenzwert, d.h.
$\exists A \subset S : m(A) = 0$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} \text{ existiert für alle } w \in A^C$$
$$g + |f_{n_1}| < \infty \text{ für alle } w \in A^C$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}: \ |f_{n_{k+1}}| &= |g_1 + \ldots + g_n - f_{n_1}| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| + |f_{n_1}| \\
&\leq g + |f_{n_1}|
\end{aligned}$$

gilt

$$f := \lim_{k\to\infty} f_{n_k} 1_{A^C} \in L^p$$

b) Wegen

$$\begin{aligned}
|f_{n_k} - f| &\leq |f_{n_k}| + |f| \\
&\leq 2|f_{n_1}| + 2|g| \\
|f_{n_k} - f|^p &\leq 2^p \left(|f_{n_1}| + |g|\right)^p
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f|^p dm &= \int \underbrace{\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f|^p}_{=0 \text{ m-fast sicher}} dm \\
&= 0 \\
\lim_{k\to\infty} \| f_{n_k} - f \|_p &= 0
\end{aligned}$$

■

**Satz 55.10** *$L^p$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge hat einen Grenzwert.*

**Beweis.** Da jede Cauchyfolge in $L^p$ eine Teilfolge mit einem Grenzwert $f \in L^p$ hat, hat sie f als Grenzwert. ■

**Satz 55.11** *Seien $f_n : (W, S, m) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ m-fast überall und es gebe ein $g \geq 0$ in $L^p$ mit $|f_n| \leq g$ m-fast überall. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
f &\in L^p \\
\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_p &= 0
\end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned}
|f_n|^p &\leq |g|^p \\
|f|^p &= \left|\lim_{n\to\infty} f_n\right|^p = \lim_{n\to\infty} |f_n|^p \\
&\leq |g|^p
\end{aligned}$$

gilt

$$f \in L^p$$

Da $|g|^p$ integrierbar ist und

$$\begin{aligned}
|f_n - f| &\leq 2|g| \\
|f_n - f|^p &\leq 2^p|g|^p
\end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p dm = \int \lim_{n\to\infty} |f_n - f|^p dm = 0$$

■

# 56. Der Raum $L^\infty$

Sei $m$ ein Maß auf $(W, S)$.

**Satz 56.1**

$$\begin{aligned}\tilde{L}^\infty &:= \{f : (W, S) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}}) \mid f \text{ ist m-fast sicher beschränkt}\} \\ &= \{f : (W, S) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}}) \mid \exists K \in \mathbb{N} : |f| \leq K \text{ m-fast sicher}\}\end{aligned}$$

*ist ein Vektorraum.*

**Beweis.** Null: Die Nullfunktion ist beschränkt.
Für $f, g \in L^\infty$ gibt es ein K mit

$$m[|f| > K] = 0 = m[|g| > K]$$

Skalarmultiplikation:

$$m[|cf| > |c|K] = m[|f| > K] = 0$$

Addition: Aus $|f|, |g| \leq K$ folgt

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq 2K$$

Verneinung ergibt: Aus $|f + g| > 2K$ folgt

$$|f| > K \text{ oder } |g| > K$$

Das ergibt

$$\{|f + g| > 2K\} \subset \{|f| > K\} \cup \{|g| > K\}$$

und

$$\begin{aligned}m[|f + g| \geq 2K] &\leq m[\{|f| \geq K\} \cup \{|g| \geq K\}] \\ &\leq m[|f| \geq K] + m[|g| \geq K] \\ &= 0\end{aligned}$$

Somit gilt

$$cf, f + g \in \tilde{L}^\infty$$

■

**Satz 56.2**

$$\| \cdot \|_\infty : \tilde{L}^\infty \to [0, \infty), f \mapsto \inf\{K > 0 : m[|f| > K] = 0\}$$

*ist eine definierte Abbildung und es gilt*

$$\begin{aligned}&a) \quad \forall K < \| f \|_\infty : \ m[|f| > K] > 0 \\ &b) \quad \forall K \geq \| f \|_\infty : \ m[|f| > K] = 0\end{aligned}$$

**Beweis.** Da $f \in \tilde{L}^\infty$ gibt es ein $K > 0$ mit $m[|f| > K] = 0$.
Damit ist die größte untere Schranke endlich und $\geq 0$.
a) Nach der Definition der größten unteren Schranke gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ m\left[|f| > \| f \|_\infty + \frac{1}{n}\right] = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} m\,[|f| > \| f \|_\infty] &= m\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{|f| > \| f \|_\infty + \frac{1}{n}\right\}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{m\left[|f| > \| f \|_\infty + \frac{1}{n}\right]}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Annahme:

$$\exists K < \| f \|_\infty \colon \ m[|f| > K] = 0$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \| f \|_\infty &= \inf\{K > 0 : m[|f| > K] = 0\} \\ &\overset{K<\|f\|_\infty}{<} \| f \|_\infty \end{aligned}$$

ein Widerspruch.
■

**Satz 56.3** *Seien $f, g : (W, S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ in $L^\infty$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \| cf \|_\infty &= |c| \, \| f \|_\infty \\ \| f + g \|_\infty &\leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty \end{aligned}$$

**Beweis.** Für $c = 0$ gilt

$$\| cf \|_\infty = \| 0 \|_\infty = 0 = 0 \cdot \| f \|_\infty$$

Sei $c \neq 0$. Wegen

$$|f| > K \iff |c||f| > |c|K$$

gilt

$$\begin{aligned} \| cf \|_\infty &= \inf\{K > 0 : m[|cf| > K] = 0\} \\ &= \inf\{|c|K > 0 : m[|cf| > |c|K] = 0\} \\ &\overset{|c|>0}{=} |c| \inf\{K > 0 : m[|f| > K] = 0\} \\ &= |c| \, \| f \|_\infty \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} |f(w)| &\leq \| f \|_\infty \\ |g(w)| &\leq \| g \|_\infty \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} |f(w)+g(w)| &\leq |f(w)|+|g(w)| \\ &\leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty \end{aligned}$$

Verneinung ergibt: Aus

$$|f(w)|+|g(w)| > \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

folgt

$$|f(w)| > \| f \|_\infty \text{ oder } |g(w)| > \| g \|_\infty$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} & m\,[|f+g| > \| f \|_\infty + \| g \|_\infty] \\ \leq\; & m\,[|f| > \| f \|_\infty \cup |g| > \| g \|_\infty] \\ \leq\; & m\,[|f| > \| f \|_\infty] + m[|g| > \| g \|_\infty] \\ =\; & 0 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \| f+g \|_\infty &= \inf\{K>0 : m[|f+g|>K]=0\} \\ &\leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty \end{aligned}$$

■

**Satz 56.4**

$$\begin{aligned} N &:= \{f \in \tilde{L}^\infty : f = 0 \text{ } \textit{m-fast überall}\} \\ &= \inf\{K>0 : m[|f|>K]=0\} \end{aligned}$$

*ist ein Untervektorraum von* $\tilde{L}^\infty$*.*

**Beweis.** Die Mengen sind gleich nach der Definition von m-fast überall. Dass N ein Vektorraum ist, wurde schon gezeigt. ■

**Satz 56.5** $\| \cdot \|_\infty$ *ist eine Länge auf*

$$L^\infty := \{f+n : f \in \tilde{L}^\infty, n \in N\}$$

**Beweis. a) $\| \cdot \|_\infty$ ist unabhängig vom Vertreter aus $L^\infty$**
Seien $f \in L^\infty, n \in N \subset L^\infty$. Wegen

$$\begin{aligned} \| f \|_\infty &= \| f + n - n \|_\infty \\ &\leq \| f + n \|_\infty + \underbrace{\| n \|_\infty}_{=0} \\ &\leq \| f \|_\infty + \underbrace{\| n \|_\infty}_{=0} = \| f \|_\infty \end{aligned}$$

gilt

$$\forall n \in N : \| f + n \|_\infty = \| f \|_\infty$$

**b)** Gezeigt wurde schon

$$\begin{aligned} \| f \|_\infty &\geq 0 \\ \| cf \|_\infty &= |c| \, \| f \|_\infty \\ \| f + g \|_\infty &= \| f \|_\infty + \| g \|_\infty \\ \| f \|_\infty = 0 &\iff f = 0 \text{ m-fast überall} \\ &\iff f \in 0 + n \text{ mit } n \in N \end{aligned}$$

■

**Definition 56.6** *Seien $f, f_n \in L^\infty$ für $n \in \mathbb{N}$.*
$(f_n)_n$ ***geht gegen f in*** $L^\infty \iff$

$$\lim_{n \to \infty} \| f - f_n \|_\infty = 0$$

$(f_n)_n$ *ist eine* ***Cauchyfolge*** *in* $L^\infty \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : \| f - f_n \|_\infty < \varepsilon$$

**Satz 56.7** *$L^\infty$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge hat einen Grenzwert in $L^\infty$.*

**Beweis.** Da $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^\infty$ ist, gilt:

$$\forall k \geq 1 \; \exists n_k \; \forall n, m \geq n_k : \| f_n - f_m \|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

Wählt man das jeweilige $n_k$ minimal, so gilt

$$n_k \leq n_{k+1}$$

Sei

$$
\begin{aligned}
M_1 &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f_n| > \| f_n \|_\infty\} \\
M_2 &:= \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \{|f_n - f_m| > \| f_n - f_m \|_\infty\} \\
M &:= M_1 \cup M_2
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
m[M] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left[|f_n| > \| f_n \|_\infty\right] + \sum_{m,n=1}^{\infty} m\left[|f_n - f_m| > \| f_n - f_m \|_\infty\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\forall x \in M^C \ \forall k \geq 1 \ \exists n_k \ \forall n, m \geq n_k : \ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}
$$

ist $(f_n(w))_n$ auf $M^C$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und hat einen Grenzwert $f(w)$.
Für

$$
f := \lim_{n \to \infty} f_n 1_{M^C}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\forall x \in M^C : \ |f(x)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\
&= \lim_{m \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\
&\leq \frac{1}{k} + \| f_n \|_\infty
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
M^C \cap \left\{ x \in W : \ |f(x)| > \frac{1}{k} + \| f_n \|_\infty \right\} = \emptyset
$$

und

$$
\begin{aligned}
& m\left[ |f| > \| f_n \|_\infty + \frac{1}{k} \right] \\
= \ & m\left[ M \cap \left\{ |f| > \| f_n \|_\infty + \frac{1}{k} \right\} + M^C \cap \left\{ |f| > \| f_n \|_\infty + \frac{1}{k} \right\} \right] \\
\leq \ & m\left[M\right] + m\left[\emptyset\right] = 0
\end{aligned}
$$

und somit

$$
f \in L^\infty
$$

■

**Satz 56.8** *Für $f \in L^1$ und $g \in L^\infty$ gilt*

$$\| fg \|_1 \leq \| g \|_\infty \| f \|_1$$

**Beweis.** Sei $M = \{|g| > \| g \|_\infty\}$. Wegen

$$\begin{aligned} m[M] &= m[|g| > \| g \|_\infty] = 0 \\ \forall x \in M^C : \ |f(x)g(x)| &\leq |f(x)| \, \| g \|_\infty \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \int |fg| dm &= \int |fg| 1_{M^C} dm \\ &\leq \int |f| \, \| g \|_\infty \, 1_{M^C} dm \\ &= \| g \|_\infty \int |f| dm \\ &= \| g \|_\infty \| f \|_1 \end{aligned}$$

■

# 57. Grenzwertbegriffe

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (W,S). Hier noch einmal die verschiedenen Möglichkeiten, einen Grenzwert zu definieren.

**Definition 57.1** *Seien* $X, X_1, X_2, \ldots : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$.
$(X_n)_n$ *geht* ***nach Wahrscheinlichkeit P gegen X*** $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left[|X_n - X| \geq \varepsilon\right] = 0$$

$(X_n)_n$ ***geht P-fast sicher gegen X*** $\iff$

$$P\left[\left\{w \in W : \lim_{n\to\infty} (X_n(w) - X(w)) = 0\right\}\right] = 1$$

*d.h. bis auf eine Nullmenge geht* $(X_n(w) - X(w))_n$ *punktweise gegen* $0$.
$(X_n)_n$ ***geht in*** $L^p$ ***gegen X*** *für* $1 \leq p < \infty \iff$

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p]^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\int |X_n - X|^p dP\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

**Satz 57.2** *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ } P\text{-fast sicher} \\ \iff & \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\right] = 0 \\ \iff & \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right] = 0 \end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned} \left\{\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} &\subset \left\{\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right\} \\ &\subset \left\{\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] &\leq P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right] \\ &\leq P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] &\leq \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n}|X_k - X| > \varepsilon\right]\\ &\leq \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \varepsilon\right]\end{aligned}$$

und die unteren beiden Aussagen sind gleichwertig.
Setze

$$\begin{aligned}A_n &:= \left\{\sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \varepsilon\right\}\\ &= \{w \in W \mid \exists k \geq n : |X_k(w) - X(w)| \geq \varepsilon\}\\ C &:= \left\{\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right\}\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}A_n &= \{\exists k \geq n : |X_k - X| \geq \varepsilon\}\\ &\supset \{\exists k \geq n+1 : |X_k - X| \geq \varepsilon\}\\ &= A_{n+1}\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0$. Wegen

$$w \in A_n \iff \exists k \geq n : |X_k(w) - X(w)| \geq \varepsilon$$

gilt

$$\begin{aligned}w \in C &\iff \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\\ &\iff \exists n_0 \ \forall k \geq n_0 : |X_k(w) - X(w)| < \varepsilon\\ &\Rightarrow \exists n_0 : \ w \notin A_{n_0}\\ &\Rightarrow C \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset\end{aligned}$$

d.h.

$$A_n \cap C \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap C) = C \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Da $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-fast sicher, gilt

$$\begin{aligned}P[C] &= 1\\ P[A_n \cap C] &= P[A_n \cap C] + \underbrace{P\left[A_n \cap C^C\right]}_{\leq P[C^C]=0}\\ &= P[A_n]\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \varepsilon\right] &\overset{\text{Def } A_n}{=} \lim_{n\to\infty} P\left[A_n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left[A_n \cap C\right] \\
&= P\left[C \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right] = 0
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Wegen

$$\begin{aligned}
& w \in C^C \\
\iff\ & (X_n(w))_n \text{ geht nicht gegen } X(w) \\
\iff\ & \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n : |X_k(w) - X(w)| \geq \frac{1}{N} \\
\iff\ & \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ \sup_{k\geq n}|X_k(w) - X(w)| \geq \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

gilt

$$C^C = \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \frac{1}{N}\right\}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
P\left[C^C\right] &\leq \sum_{N=1}^{\infty} P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \frac{1}{N}\right\}\right] \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \frac{1}{N}\right]}_{=0} \\
&= 0 \\
P[C] &= 1 - P\left[C^C\right] = 1
\end{aligned}$$

■

**Satz 57.3** *a) Aus* $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p]^{\frac{1}{p}} = 0$ *für* $1 \leq p < \infty$ *folgt* $X_n$ *geht gegen* $X$ *nach Wahrscheinlichkeit.*
*b) Aus* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *P-fast sicher folgt* $X_n$ *geht gegen* $X$ *nach Wahrscheinlichkeit.*

**Beweis. a)** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} P\left[|X_n - X| \geq \varepsilon\right] \\
= & \lim_{n\to\infty} P\left[|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p\right] \\
\leq & \frac{1}{\varepsilon^p} \lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^p\right] \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

**b)** Da $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-fast sicher, gilt

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{k\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\right] = 0$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} & \subset \bigcup_{k\geq n} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\} \\
& = \{\exists k \geq n : \ |X_k - X| \geq \varepsilon\} \\
& = \sup_{k\geq n} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] & \leq \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\right] \\
& = 0
\end{aligned}$$

■

**Satz 57.4** *Es sind gleichwertig:*
*a) $X_n$ geht gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit.*
*b) Jede Teilfolge $(X_{n_k})_k$ von $(X_n)_n$ hat eine weitere Teilfolge $\left(X_{n_{\tilde{k}}}\right)$, die P-fast sicher einen Grenzwert hat.*

**Beweis. a) $\Rightarrow$ b):** Sei $(X_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(X_n)_n$.

$$\begin{aligned}
& X_n \text{ geht gegen X nach Wahrscheinlichkeit} \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall \varepsilon, \delta > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0: \ P[|X_n - X| \geq \varepsilon] < \delta \\
\Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \ \forall k \geq 1 \ \exists N_k \ \forall n \geq N_k: \ P\left[|X_n - X| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Konstruiere eine Teilfolge $\left(X_{n_{\tilde{k}}}\right)_k$ von $(X_{n_k})_k$ durch

$$n_{\widetilde{k+1}} > N_{k+1} \geq n_{\tilde{k}}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
P\left[\sup_{n_{\tilde{k}}\geq n}|X_{n_{\tilde{k}}}-X|\geq\varepsilon\right] &= P\left[\bigcup_{n_{\tilde{k}}\geq n}\{|X_{n_{\tilde{k}}}-X|\geq\varepsilon\}\right]\\
&\leq \sum_{n_{\tilde{k}}\geq n} P\left[|X_{n_{\tilde{k}}}-X|\geq\varepsilon\right]\\
&\leq \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^2}\\
\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{n_{\tilde{k}}\geq n}|X_{n_{\tilde{k}}}-X|\geq\varepsilon\right] &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^2}=0\\
\lim_{\tilde{k}\to\infty} X_{n_{\tilde{k}}} &= X \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

**b)** $\Rightarrow$ **a)**: Zeige $\neg a) \Rightarrow \neg b)$: Wegen

$$\begin{aligned}
& X_n \text{ geht gegen X nach Wahrscheinlichkeit}\\
\iff\; & \forall\varepsilon,\delta>0\exists N\;\forall n\geq N:\; P\left[|X_n-X|\geq\varepsilon\right]<\delta
\end{aligned}$$

ergibt die Verneinung:

$$\begin{aligned}
& X_n \text{ geht nicht gegen X nach Wahrscheinlichkeit}\\
\iff\; & \exists\varepsilon,\delta>0\forall N\;\exists n\geq N:\; P\left[|X_n-X|\geq\varepsilon\right]\geq\delta
\end{aligned}$$

d.h. es gibt eine Teilfolge $(X_{n_k})_k$ mit

$$\forall k\in\mathbb{N}:\quad P\left[|X_{n_k}-X|\geq\varepsilon\right]\geq\delta$$

Dann gehen alle Teilfolgen von $(X_{n_k})_k$ nicht P-fast sicher gegen X. ■

**Satz 57.5** *a) Aus $X_n$ geht gegen X nach Wahrscheinlichkeit folgt **nicht** $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-fast sicher.*
*b) Aus $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-fast sicher folgt **nicht** $\lim_{n\to\infty} \| X_n - X \|_p = 0$.*
*c) Aus $X_n$ geht gehen X nach Wahrscheinlichkeit folgt **nicht** $\lim_{n\to\infty} \| X_n - X \|_p = 0$.*

**Beweis. a) Das wandernde Rechteck:** Seien $([0,1),\mathbb{B},l)$ und $A_{k,m} = [\frac{k-1}{m},\frac{k}{m})$, d.h.

$$\begin{aligned} A_1 &= [0,1) \\ A_{21} &= \left[0,\frac{1}{2}\right) \\ A_{22} &= \left[\frac{1}{2},1\right) \\ A_{31} &= \left[0,\frac{1}{3}\right) \\ A_{32} &= \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ldots \end{aligned}$$

Sei $(A_n)_n$ die Aufzählung der $(A_{k,m})_{1\le k\le m, m\in\mathbb{N}}$. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{k,m\to\infty} E[1_{A_{k,m}} - 0] &= \lim_{n\to\infty}\int 1_{A_{k,m}}dP \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m} = 0 \end{aligned}$$

gilt $X_n$ geht gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit.
Da das Rechteck immer wieder durch das Intervall wandert gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} X_n &= 1 \\ \liminf_{n\to\infty} X_n &= 0 \\ \left\{w\in W\ :\ \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right\} &= \emptyset \\ P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = X\right] &= 0 \end{aligned}$$

**b) und c)** Seien $([0,1],\mathbb{B}|_{[0,1]},l)$ und

$$\begin{aligned} X &\equiv 0 \\ X_n(w) &= (n+1)w^n \end{aligned}$$

Für $w\in[0,1)$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(n+1)w^n &= \lim_{n\to\infty} nw^n + \underbrace{\lim_{n\to\infty} w^n}_{=0,\text{ da } w<1} \\ &= \lim_{n\to\infty} n\exp(-n(-\ln w)) = 0 \end{aligned}$$

Für $w=1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)w^n = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Somit gilt $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-fast sicher.
Damit folgt $X_n$ geht gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit.
Aber für $p > 1$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (n+1)^p w^{np} dw \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{np+1} \\ &= \infty \neq 0\end{aligned}$$

■

# 58. Gleichgradige Integrierbarkeit

Sei im ganzen Kapitel $(W, S, m)$ mit $m[W] < \infty$.

**Satz 58.1** *Für $(X_i)_{i\in I}$ mit $X_i \in L^1$ sind gleichwertig:*

$$a) \qquad \lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int 1_{|X_i|>a} |X_i| dm = 0$$

$$b) \qquad K := \sup_{i\in I} \int |X_i| dm < \infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left( m[A] < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{i\in I} \int_A |X_i| dm \le \varepsilon \right)$$

*Ist die Menge A klein genug, so sind alle Integrale kleiner als $\varepsilon$. Dann heißt die Familie $(X_i)_i$* ***gleichgradig integrierbar****.*

**Beweis. a) $\Rightarrow$ b):** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$\exists a \in \mathbb{R} : \ \sup_{i\in I} \int_{|X_i|>a} |X_i| dm < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \sup_{i\in I} \int |X_i| dm \\
\le \ & \sup_{i\in I} \int |X_i| 1_{|X_i|>a} dm + \sup_{i\in I} \int \underbrace{|X_i|}_{\le a} 1_{|X_i|\le a} dm \\
< \ & \frac{\varepsilon}{2} + a \underbrace{m[W]}_{<\infty} < \infty
\end{aligned}$$

Für $m[A] < \dfrac{\varepsilon}{2a}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \sup_{i\in I} \int_A |X_i| dm \\
\le \ & \sup_{i\in I} \int_{A\cap\{|X_i|>a\}} |X_i| dm + \sup_{i\in I} \int_{A\cap\{|X_i|\le a\}} \underbrace{|X_i|}_{\le a} dm \\
\le \ & \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>a\}} |X_i| dm + a \underbrace{\sup_{i\in I} \int_A dm}_{=m[A]} \\
< \ & \frac{\varepsilon}{2} + a \frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon
\end{aligned}$$

**b)⇒ a):**

$$\begin{aligned}
\forall i \in I: \; K &\geq \int_W |X_i| dm \\
&\geq \int_{\{|X_i| \geq a\}} \underbrace{|X_i|}_{\geq a} dm \\
&\geq a \cdot m\left[|X_i| \geq a\right]
\end{aligned}$$

Wählt man $a$ groß genug, so gilt

$$\forall i \in I: \quad m\left[|X_i| \geq a\right] \leq \frac{K}{a} < \delta$$

und somit

$$\sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| \geq a\}} |X_i| dm < \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| \geq a\}} |X_i| dm = 0$$

■

**Satz 58.2** *a) $f \in L^1$ ist gleichgradig integrierbar.*
*b) Sind $f_1, \ldots, f_k \in L^1(m)$, so ist $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ gleichgradig integrierbar.*
*c) Ist $(f_i)_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar, so ist $(|f_i|)_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar.*
*d) Ist $(f_i)_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar und gilt*

$$\forall g_j \; \exists f_i : \; |g_j| \leq |f_i|$$

*so ist $(g_j)_{j \in J}$ gleichgradig integrierbar.*

**Beweis. a)** Sei $(a_n)_n$ eine monoton steigende Folge in $[0, \infty)$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Wegen

$$\begin{aligned}
x \in \{|f| > a_{n+1}\} \quad &\iff \quad |f(x)| > a_{n+1} \\
&\Rightarrow \quad |f(x)| > a_n \\
&\iff \quad x \in \{|f| > a_n\}
\end{aligned}$$

ist $(\{|f| > a_n\})_n$ monoton fallend und somit

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} m\left[\{|f| > a_n\}\right] \\
= \quad & m\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\{|f| > a_n\}\right] \\
\overset{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}{=} \quad & m[|f| = \infty] \\
\overset{f\in L^1}{=} \quad & 0
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \int |f| 1_{|f|>a_n} dm \\
\overset{|f|1_{|f|>a_n} \le |f| \in L^1}{=} \quad & \int \lim_{n\to\infty} |f| 1_{|f|>a_n} dm \\
= \quad & \int \underbrace{1_{|f|=\infty}}_{=0 \text{ m-fast sicher}} |f| dm \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

**b)** Nach a) gilt:

$$\forall 1 \le i \le k \ \exists a_{n_i} : \int_{\{|f_i|>a_{n_i}\}} |f_i| dm < \varepsilon$$

Für $a = \max_{i=1}^{n} a_{n_i}$ gilt

$$\sup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \int_{\{|f_i|>a\}} |f_i| dm < \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\ge a\}} |f_i| dm = 0$$

**c)** Da in der Definition nur Beträge $|f_i|$ stehen.
**d)** Wegen

$$\begin{aligned}
|g_j| > a \quad & \Rightarrow \quad |f_i| \ge |g_j| > a \\
\{w \in W : \ |g_j(w)| > a\} \quad & \subset \quad \{w \in W : \ |f_i(w)| > a\} \\
1_{|g_j|>a} \quad & \le \quad 1_{|f_i|>a}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\int |g_j| 1_{|g_j|>a} dm &\leq \int |f_i| 1_{|f_i|>a} dm \\
\lim_{a\to\infty} \sup_{j\in J} \int |g_j| 1_{|g_j|>a} dm &\leq \lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int |f_i| 1_{|f_i|>a} dm \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

**Satz 58.3** *a) Sind $(f_i)_{i\in I}, (g_j)_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar, so sind auch*

$$(f_i + g_j)_{i,j}, (f_i - g_j)_{i,j}$$

*gleichgradig integrierbar.*
*b) Ist $f \in L^1$ und $(f_i)_i$ gleichgradig integrierbar, so ist*

$$(f_i - f)_i$$

*gleichgradig integrierbar.*

**Beweis. a)**

$$\begin{aligned}
\sup_{i,j} \int |f_i \pm g_j| dm &\leq \sup_{i,j} \int |f_i| dm + \sup_{i,j} \int |g_j| dm \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
P[A] < \delta_1 &\Rightarrow \sup_{i\in I} \int_A |f_i| dm < \frac{\varepsilon}{2} \\
P[A] < \delta_2 &\Rightarrow \sup_{j\in J} \int_A |g_j| dm < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Dann gilt für $P[A] < \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\begin{aligned}
\sup_{i,j} \int_A |f_i \pm g_j| dm &\leq \sup_{i,j} \int_A |f_i| dm + \sup_{i,j} \int_A |g_j| dm \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

**b)** f ist gleichgradig integrierbar.
Mit a) ist $(f - f_i)_i$ gleichgradig integrierbar. ■

**Satz 58.4** *Sei $b > 0$.*

$$g : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto (x - b) 1_{\{x \geq b\}}$$

*ist konvex.*

**Beweis. 1. Fall:** $x, y \in (-\infty, b]$ oder $x, y \in [b, \infty)$. Wegen

$$\begin{aligned} g''|_{(-\infty,b]} &= 0 \\ g''|_{[b,\infty)} &= 0 \end{aligned}$$

ist g konvex auf $(-\infty, b]$ und auf $[b, \infty)$.
**2. Fall:** Sei $x < b < y$ und $z \in [b, y)$. Für

$$c := \frac{y-z}{y-x} \in [0,1]$$

gilt

$$\begin{aligned} & cx + (1-c)y \\ = \; & \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y \\ = \; & \frac{z(y-x)}{y-x} = z \end{aligned}$$

Wegen $x < b \leq z < y$ und

$$\begin{aligned} & z - b \leq \frac{z-x}{y-x}(y-b) \\ \iff \; & (z-b)(y-x) \leq (z-x)(y-b) \\ \iff \; & zy - zx - by + bx \leq zy - zb - xy + bx \\ \iff \; & zx + by - zb - xy \geq 0 \\ \iff \; & (z-y)(x-b) \geq 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} g(cx + (1-c)y) &= g(z) = z - b \\ &\leq \frac{z-x}{y-x}(y-b) \\ &= c\underbrace{g(x)}_{=0} + (1-c)\underbrace{g(y)}_{=y-b} \end{aligned}$$

**3. Fall:** Sei $x < b < y$ und $z \in (x, b]$ und $c$ wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(cx + (1-c)y) &= g(z) = 0 \\ &\leq c\underbrace{g(x)}_{=0} + \underbrace{(1-c)}_{\geq 0}\underbrace{g(y)}_{=y-b>0} \end{aligned}$$

■

**Satz 58.5** *a)* $(f_i)_i$ *ist gleichgradig integrierbar* $\iff$
$\exists H : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *mit*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x} &= \infty \\ c := \sup_{i\in I} \int H(|f_i|)dm &< \infty \end{aligned}$$

*b)* $H$ *kann in* $'' \Rightarrow ''$ *monoton wachsend und konvex gewählt werden.*

**Beweis.** "$\Leftarrow$": Sei

$$K_a := \inf_{x>a} \frac{H(x)}{x} < \infty$$

Wegen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x} = \infty$$

gilt

$$\lim_{a\uparrow\infty} K_a = \lim_{a\uparrow\infty} \inf_{x>a} \frac{H(x)}{x} = \infty$$

Wegen

$$\forall x > a : \ \frac{H(x)}{x} \geq \inf_{x>a} \frac{H(x)}{x} = K_a$$

gilt

$$\begin{aligned} \forall |f_i(x)| > a : \ \frac{H(|f_i(x)|)}{|f_i(x)|} &\geq K_a \\ 1_{|f_i|>a}|f_i| &\leq \frac{H(|f_i|)}{K_a} 1_{|f_i|>a} \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int 1_{|f_i|>a}|f_i|dm \\ &\leq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{K_a} \sup_{i\in I} \int_{|f_i|>a} \underbrace{H(|f_i|)}_{\geq 0} dm \\ &\leq \underbrace{\left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{K_a}\right)}_{=0} \underbrace{\sup_{i\in I} \int H(|f_i|)dm}_{=c<\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

"⇒": Wegen

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{i\in I}\int |f_i| 1_{|f_i|>a_n} dm = 0$$

gilt: Es gibt eine Folge $0 \leq a_n \uparrow \infty$ mit

$$\begin{aligned} & \sup_{i\in I}\int (|f_i| - a_n) 1_{|f_i|>a_n} dm \\ \overset{0\leq a_n<|f_i(x)|}{\leq} & \sup_{i\in I}\int |f_i| 1_{|f_i|>a_n} dm \\ < & 2^{-n} \end{aligned}$$

Setze

$$H : [0,\infty) \to [0,\infty), x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (x - a_n) 1_{x\geq a_n}$$

**H ist endlich:** Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt

$$\forall x\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ a_n > x$$

und die Summe bricht ab.
**H ist konvex:** Da $(x - a_n)1_{x\geq a_n}$ konvex ist, ist die positive Linearkombination

$$\sum_{n=1}^{N} (x - a_n) 1_{x\geq a_n}$$

konvex und die kleinste obere Schranke

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x - a_n) 1_{x\geq a_n}$$

konvexer Funktionen ist konvex.
Es gilt $\forall x \geq 2a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{H(x)}{x} & = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_k}{x}\right) 1_{x\geq a_k} \\ & \geq \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_k}{x}\right) 1_{x\geq a_k} \\ & \overset{x\geq 2a_n\geq 2a_k}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(1 - \frac{a_k}{a_n}\right)}_{\geq 1/2} 1_{x\geq a_k} \\ & \geq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x} = \infty$$

Da $\left(\sum_{k=1}^N (|f_i| - a_k) 1_{|f_i|>a_k}\right)_N$ monoton steigt und $\geq 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} & \int H(|f_i|)dm \\ = & \int \sum_{n=1}^{\infty} (|f_i| - a_n) 1_{|f_i|>a_n} dm \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \int (|f_i| - a_n) 1_{|f_i|>a_n} dm \\ \leq & \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \end{aligned}$$

d.h.

$$\sup_{i\in I} \int H(|f_i|)dm \leq 1 < \infty$$

■

**Satz 58.6** *Gilt für* $(f_i)_i$

$$\begin{aligned} a) \quad & \sup_{i\in I} \| f_i \|_p < \infty \textit{ für } p > 1 \\ \textit{oder } b) \quad & \sup_{i\in I} \int |f_i| \log |f_i| dm < \infty \end{aligned}$$

*so ist* $(f_i)_{i\in I}$ *gleichgradig integrierbar.*

**Beweis.** a) Für

$$H : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^p$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{p-1} = \infty \\ c &:= \sup_{i\in I} \int H(|f_i|)dm = \sup_{i\in I} \int |f_i|^p dm < \infty \end{aligned}$$

b) Für

$$H : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto |x \log x|$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{H(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\log x}{x} = \infty \\
c &:= \sup_{i\in I}\int H(|f_i|)dm = \int |f_i|\log|f_i|dm < \infty
\end{aligned}
$$

und $|f_i|$ ist gleichgradig integrierbar. ■

**Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsmaße**

**Satz 58.7** *Seien* $X_i : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *mit*

$$
\begin{aligned}
\sup_{i\in I}|E[X_i]| &< \infty \\
\sup_{i\in I} Var[X_i] &< \infty
\end{aligned}
$$

*Dann ist* $(X_i)_i$ *gleichgradig integrierbar.*

**Beweis.** Da die Wurzel stetig ist, gilt

$$
\begin{aligned}
E[X_i^2] &= E[X_i]^2 + Var(X_i) \\
\sup_{i\in I} E[X_i^2] &\leq \left(\sup_{i\in I} E[X_i]\right)^2 + \sup_{i\in I} Var(X_i) < \infty \\
\sup_{i\in I} \parallel X_i \parallel_2 &= \sqrt{\sup_{i\in I} E[X_i^2]} < \infty
\end{aligned}
$$

und $(X_i)_i$ ist gleichgradig integrierbar. ■

**Satz 58.8** *Seien* $X, X_n \in L^p(W, S, P)$ *für* $n \in \mathbb{N}$*. Dann sind gleichwertig:*
*a)* $\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0$.
*b)* $X_n$ *geht gegen* $X$ *nach Wahrscheinlichkeit und* $(|X_n - X|^p)_n$ *ist gleichgradig integrierbar.*

**Beweis. b) $\Rightarrow$ a):** Da $|X_n - X|^p$ gleichgradig integrierbar ist, wähle $a$ sodaß

$$
\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{|X_n - X|^p \geq a} |X_n - X|^p dP < \frac{\varepsilon}{3}
$$

Da $X_n$ geht gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit, gilt

$$
\exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ P\left[|X_n - X|^p \geq \frac{\varepsilon}{3}\right] < \frac{\varepsilon}{3a}
$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
& \int_W |X_n - X|^p dP \\
= \; & \underbrace{\int_{\{|X_n - X|^p \geq a\}} |X_n - X|^p dP}_{<\varepsilon/3, \text{ da gleichgradig integrierbar}} + \int_{\{\varepsilon/3 \leq |X_n - X|^p < a\}} \underbrace{|X_n - X|^p}_{<a} dP \\
& + \int_{\{|X_n - X|^p < \varepsilon/3\}} \underbrace{|X_n - X|^p}_{<\varepsilon/3} dP \\
< \; & \frac{\varepsilon}{3} + aP\left[|X_n - X|^p \geq \frac{\varepsilon}{3}\right] + \frac{\varepsilon}{3} \\
< \; & \varepsilon
\end{aligned}$$

**a) $\Rightarrow$ b): $X_n$ geht gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit.**
Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$ gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N: \; 0 \leq \int_W |X_n - X|^p dP < \varepsilon^p \delta$$

Das ergibt $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon^p \; &> \; \int_{|X_n - X| \geq \varepsilon} \underbrace{|X_n - X|^p}_{\geq \varepsilon^p} dP \\
&\geq \; \varepsilon^p \int_{|X_n - X| \geq \varepsilon} dP \\
&= \; \varepsilon^p P[|X_n - X| \geq \varepsilon]
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; P[|X_n - X| \geq \varepsilon] < \delta$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0$$

**$|X_n - X|^p$ ist gleichgradig integrierbar:** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \| X_n - X \|_p = 0 \\
\Rightarrow \; & \exists N \; \forall n \geq N: \; \int |X_n - X|^p dP < \varepsilon \\
\Rightarrow \; & \forall n \geq N: \; \int |X_n - X|^p 1_{|X_n - X|^p \geq a} dP < \varepsilon
\end{aligned}$$

Wegen $|X_n - X|^p < \infty$ P-fast sicher $a \to \infty$

$$|X_n - X|^p 1_{|X_n - X|^p < a} \uparrow |X_n - X|^p \text{ P-fast sicher}$$

und somit

$$\lim_{a \to \infty} \int_W |X_n - X|^p 1_{|X_n - X|^p < a} dP = \int_W |X_n - X|^p dP = K < \infty$$

Da die linke monoton steigende Zahlenfolge beschränkt ist, folgt

$$\forall 1 \leq n \leq N \ \exists a_0(n) \ \forall a \geq a_0(n) : \int |X_n - X|^p 1_{|X_n - X|^p \geq a} dP < \varepsilon$$

Mit

$$A_0 = \max_{n=1}^{N} a_0(n)$$

gilt

$$\forall a \geq A_0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \int |X_n - X|^p 1_{|X_n - X|^p \geq a} dP < \varepsilon$$

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int |X_n - X|^p 1_{|X_n - X|^p \geq a} dP = 0$$

■

**Satz 58.9** *Sei $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar und $X \in L^1$.*
*a) Für $X_n$ geht gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit, gilt*

$$\lim_{n \to \infty} E[|X_n - X|] = 0$$

*b) Für $\lim_{n \to \infty} X_n = X$ P-fast sicher gilt*

$$\lim_{n \to \infty} E[|X_n - X|] = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} E[X_n] = E\left[\lim_{n \to \infty} X_n\right]$$

*d.h. man kann den Grenzwert aus dem Integral ziehen.*

**Beweis. a)** Da $(X_n)_n$ und X gleichgradig integrierbar sind, ist $(|X_n - X|)_n$ gleichgradig integrierbar.
Da $X_n$ gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit geht, folgt mit $p = 1$ und dem letzten Satz

$$\lim_{n \to \infty} E[|X_n - X|] = 0$$

**b)** Aus $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-fast sicher folgt $X_n$ geht gegen $X$ nach Wahrscheinlichkeit und mit a)

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] = 0$$

Wegen $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ P-fast sicher gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\to\infty} \left| E[X_n] - E\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] \right| \\
&\overset{X=\lim_{n\to\infty} X_n \text{ P-fast sicher}}{=} \lim_{n\to\infty} |E[X_n] - E[X]| \\
&= \lim_{n\to\infty} |E\left[X_n - X\right]| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] \\
&= 0 \\
\lim_{n\to\infty} E\left[X_n\right] &= E\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right]
\end{aligned}$$

■

# 59. Maße und Dichten

Im ganzen Kapitel seien $m, p$ Maße auf $(W, S)$.

**Definition 59.1** *a) Ein Maß m auf $(W, S)$ heißt **abzählbar endlich** $\iff$ $\exists$ Folge $(E_n)_n$ in $S$ mit $E_n \uparrow W$ und $\forall n \in \mathbb{N}: \ m(E_n) < \infty$*
*b) Das Mass p auf $(W, S)$ hat eine **Dichte f bezüglich m** $\iff$*

$$\exists \text{ messbares } f : W \to [0, \infty] \ \forall A \in S : p[A] = \int_A f dm$$

**Beweis.** Wir haben in der Einführung gezeigt

$$S \to [0, \infty), A \mapsto \int_A f dm$$

ist ein Maß. ■

**Satz 59.2 (Eindeutigkeit der Dichte)** *Seien $f, g \in T^*$.*
*a) $f = g$ m- fast überall $\Rightarrow \forall A \in S : \int_A f dm = \int_A g dm$*
*b) "$\Leftarrow$" gilt im Allgemeinen nicht.*
*c) Sind f oder g integrierbar, gilt*

$$f = g \text{ m- fast überall} \iff \forall A \in S : \int_A f dm = \int_A g dm$$

**Beweis. a)** Da $f = g$ m-fast überall gilt $f 1_A = g 1_A$ m-fast überall.
Im Kapitel über fast überall geltende Eigenschaften haben wir gezeigt, dass dann gilt

$$\int_A f dm = \int_A g dm$$

**b)** Für

$$\begin{aligned}
&W = \mathbb{R} \\
&S = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ oder } A^C \text{ sind abzählbar}\} \\
&m : S \to [0, \infty], A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für A abzählbar} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \\
&f \equiv 1 \\
&g \equiv 2
\end{aligned}$$

und

$$\forall A \in S : \int_A f dm = \int_A g dm$$

**1.) S ist eine abzählbare Algebra:**
$\mathbb{R} \in S$, da $\mathbb{R}^C = \emptyset$ abzählbar

Aus $A \in S$ folgt $A^C \in S$: Nach Definition von S ist A oder $A^C$ abzählbar.
Aus $A_i \in S$ folgt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$:
1. Fall: $\forall i$ gilt: $A_i$ ist abzählbar. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ abzählbar und somit

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$$

2. Fall: $\exists j \in \mathbb{N}$ mit $A_j^C$ ist abzählbar. Dann ist

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^C \subset A_j$$

abzählbar und somit

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$$

**2.) m ist ein Maß auf (W,S):**
$m[A] \in \{0, \infty\} \geq 0$.
$m[\emptyset] = 0$, da $\emptyset$ abzählbar.

$$\begin{aligned} m\left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right] &= \begin{cases} 0 & \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{ ist abzählbar} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \forall i \in \mathbb{N}: \ A_i \text{ ist abzählbar} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m\left[A_i\right] \end{aligned}$$

Wegen $m[A] \in \{0, \infty\}$ gilt

$$\forall A \in S: \ \int_A f dm = m[A] = 2m[A] = \int_A g dm$$

Wegen

$$m[f \neq g] = m[W] = \infty$$

gilt

$$f \neq g \text{ m-fast überall}$$

**c)** Sei f integrierbar. Wegen

$$\int_W g dm \overset{Vor}{=} \int_W f dm < \infty$$

ist g integrierbar. Mit

$$N := \{f > g\} \in S$$

gilt

$$f1_N - g1_N = \underbrace{(f-g)}_{>0 \text{ auf } N} 1_N \geq 0$$

Da nach Voraussetzung

$$\int f1_N dm = \int g1_N dm$$

gilt

$$\int \underbrace{(f-g)}_{>0 \text{ auf N}} 1_N dm = \int f1_N dm - \int g1_N dm = 0$$

Somit

$$m[N] = m[f > g] = 0$$

Analog gilt

$$m[f < g] = 0$$

und mit

$$m[f \neq g] = m[f < g] + m[f > g] = 0$$

folgt $f = g$ m-fast überall. ■

**Satz 59.3** *Seien s,t Maße auf* $(W, S)$ *mit* $s[W] < t[W] < \infty$*. Dann gibt es ein* $W^* \in S$ *mit*

$$\begin{array}{rrcl} & s[W^*] & < & t[W^*] \\ \forall A \in S, A \subset W^*: & s[A] & \leq & t[A] \end{array}$$

**Beweis.** Man schneidet schrittweise Teile aus W heraus.
Setze $u := t - s$. Da $t, s \geq 0$ gilt $\forall A \in S$:

$$\begin{array}{rcl} -s[A] & \leq & t[A] - s[A] \leq t[A] \\ -s[A] & \leq & u[A] \leq t[A] \end{array}$$

d.h. $u$ ist beschränkt.
Setze $A_1 = \emptyset, W_1 = W$ und $W_{n+1} = W_n \backslash B_{n+1}$, wobei die $B_{n+1}$ wie folgt aus den $W_n$ konstruiert werden: Sei

$$c_n := \inf \{u[A] : A \in S, A \subset W_n\}$$

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$c_n \overset{\inf}{\leq} u[\emptyset] = t[\emptyset] - s[\emptyset] = 0$$

**1. Fall:** $c_n = 0$. Dann ist $\forall A \in S, A \subset W_n$

$$t[A] - s[A] = u[A] \geq 0$$

Das Verfahren bricht ab, indem man $W^* = W_n$ setzt, denn

$$s[W^*] = s[W_n] < t[W_n] = t[W^*]$$

und

$$\forall A \in S, A \subset W^* : s[A] \leq t[A]$$

**2. Fall:** $c_n < 0$. Da $c_n$ größte untere Schranke ist, gilt

$$\exists B_{n+1} \in S, B_{n+1} \subset W_n : \ u(B_{n+1}) < \frac{c_n}{2}$$

Setze

$$W_{n+1} = W_n \backslash B_{n+1}$$

und setze das Verfahren fort.
Nach Konstruktion sind die $B_n$ schnittleer. Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |u[B_n]| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} t[B_n] + \sum_{n=1}^{\infty} s[B_n] \\
&= t\left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right] + s\left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right] \\
&= t[W] + s[W] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} u[B_n] = 0$$

Wegen

$$0 \geq \frac{c_n}{2} > u[B_n]$$

folgt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$,
Setze $W^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$. Da $W_{n+1} \subset W_n$, gilt

$$W_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = W^*$$

Wegen

$$\begin{aligned}
u[W^*] &= t\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n\right] - s\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n\right] \\
&\overset{\text{stetig von oben}}{=} \lim_{n\to\infty} t[W_n] - \lim_{n\to\infty} s[W_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} u[W_n] \\
u[W_{n+1}] &= u[W_n]
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
t[W^*] - s[W^*] &= u[W^*] = \lim_{n\to\infty} u[W_n] \\
&\geq u[W_1] > 0
\end{aligned}$$

d.h.

$$s[W^*] < t[W^*]$$

Sei $A \in S, A \subset W^*$. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : A \subset W_n$$

Da $c_n$ die größte untere Schranke ist, gilt

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} : \; u[A] &\geq c_n \\
u[A] \geq \lim_{n\to\infty} c_n &= 0 \\
t[A] &\leq s[A]
\end{aligned}$$

■

**Definition 59.4** *Seien m,p Maße. m heißt* ***absolut stetig*** *bzgl. p* $\iff$

$$\forall A \in S : m[A] = 0 \Rightarrow p[A] = 0$$

*Schreibweise:* $p << m$.

**Satz 59.5** *Seien m, p abzählbar endliche Maße auf* $(W, S)$*. Dann gilt*

$$p \text{ hat eine Dichte bezüglich } m \iff p << m$$

**Beweis.** "$\Rightarrow$": Gilt $m[A] = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
p[A] &\overset{Def}{=} \int_A f dm = \int \underbrace{f 1_A}_{=0 \text{ m-f.s.}} dm \\
&= \int 0 dm = 0
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": **1.Fall: Seien p,m endlich.** Setze

$$G := \left\{ g \in T^* \;\middle|\; \forall A \in S : \int_A gdm \leq p[A] \right\}$$

Das Ziel ist

$$\int_A gdm = p[A]$$

Wegen $g \equiv 0 \in G$ gilt

$$G \neq \emptyset$$

Aus $g, h \in G$ folgt $\max(g, h) \in G$:

$$\begin{aligned} \int_A \max(g,h)dm &= \int_{A \cap \{g \geq h\}} gdm + \int_{A \cap \{g < h\}} hdm \\ &\leq p[A \cap \{g \geq h\}] + p[A \cap \{g < h\}] \\ &= p[A] \end{aligned}$$

Damit gilt im Grenzwert

$$c := \sup_{g \in G} \int gdm \leq p[W] < \infty$$

Sei $(g_n^*)_n$ eine Folge in G, die die kleinste obere Schranke c erreicht, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n^* dm = c$$

Durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : g_n := \max(g_1^*, \ldots, g_n^*) \in G$$

erhält man eine monoton steigende Folge $(g_n)_n$ in G mit

$$\int g_n^* dm \overset{g_n^* \leq g_n}{\leq} \int g_n dm \overset{\sup}{\leq} c$$

Im Grenzwert gilt

$$c = \lim_{n \to \infty} \int g_n^* dm \leq \lim_{n \to \infty} \int g_n dm \leq c$$

Setzt man

$$f := \lim_{n \to \infty} g_n$$

erhält man

$$\int_A f dm = \int_A \lim_{n \to \infty} g_n dm \overset{0 \leq g_n \uparrow f}{=} \lim_{n \to \infty} \int_A g_n dm \leq p[A]$$

und $f \in G$.
**f ist eine Dichte von p bezüglich m:**
Setze $\forall A \in S$

$$t[A] := p[A] - \int_A f dm \geq 0$$

Das soll eigentlich Null werden.
Wegen $t[W] \leq p[W]$ ist t ein endliches Maß.
Sei $m(A) = 0$. Nach Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned} p(A) &= 0 \\ t[A] &= p[A] - \int_A f dm \\ &\overset{Vor}{=} 0 - \int_W \underbrace{1_A f}_{=0m-\text{f.ü.}} dm = 0 \end{aligned}$$

Annahme: Sei $t[W] > 0$. Wegen $m[W] > 0$ setze

$$q := \frac{t[W]}{2m[W]} > 0$$

Für $q \cdot m$ gilt

$$\begin{aligned} q \cdot m[W] &= \frac{t[W]}{2m[W]} m[W] \\ &= \frac{1}{2} t[W] < t[W] \end{aligned}$$

Wir haben schon gezeigt, daß dann ein $W^* \in S$ existiert mit

$$\begin{aligned} t[W^*] &> q \cdot m[W^*] \\ \forall A \in S, A \subset W^* : \quad t[A] &\geq q \cdot m[A] \end{aligned}$$

Damit läßt sich aus f eine größere Funktion $f^*$ konstruieren. Setzt man

$$f^* := f + q 1_{W^*}$$

folgt für alle $A \in S$:

$$\begin{aligned} \int_A f^* dm &= \int_A f dm + q \cdot m[A \cap W^*] \\ &\leq \int_A f dm + t[A] \\ &= p[A] \end{aligned}$$

d.h. $f^* \in G$. Da $0 < q \cdot m[W^*]$ folgt der Widerspruch

$$\begin{aligned} c \overset{\sup}{\geq} \int f^* dm &= \underbrace{\int f dm}_{=c} + \underbrace{q \cdot m[W^*]}_{>0} \\ &> c \end{aligned}$$

Also gilt $\forall A \in S$

$$t[A] = p[A] - \int f dm = 0$$

**2. Fall: Seien p,m abzählbar endlich.** Dann gibt es Folgen $(A_i)_i, (B_i)_i$ in S mit $A_i \uparrow W, B_i \uparrow W$ und $m[A_i], p[B_i] < \infty$
Sei $C_i := A_i \cap B_i$. Mit

$$\begin{aligned} &\forall w \in W \ \exists i_1 \ \forall i \geq i_1 : w \in A_i \\ &\forall w \in W \ \exists i_2 \ \forall i \geq i_2 : w \in B_i \end{aligned}$$

folgt für $i_0 := \max(i_1, i_2)$

$$\forall w \in W \ \exists i_0 \ \forall i \geq i_0 : w \in C_i = A_i \cap B_i$$

d.h.

$$\begin{aligned} C_i &\uparrow W \\ m[C_i] &= m[A_i \cap B_i] \leq m[A_i] < \infty \\ p[C_i] &= p[A_i \cap B_i] \leq p[B_i] < \infty \end{aligned}$$

Setze $E_n := C_n \backslash C_{n-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_i &:= \sum_{k=1}^{i} E_k \uparrow W \\ m[E_i] &\leq m[C_i] < \infty \\ p[E_i] &\leq p[C_i] < \infty \end{aligned}$$

Definiere deshalb die endlichen Maße

$$\begin{aligned} &p_i : (W, S) \to [0, \infty), A \mapsto p[A \cap E_i] \\ &m_i : (W, S) \to [0, \infty), A \mapsto m[A \cap E_i] \end{aligned}$$

Sei $m_i[A_i] = m[A \cap E_i] = 0$. Wegen $p << m$ gilt

$$p_i[A] = p[A \cap E_i] = 0$$

und es folgt

$$p_i << m_i$$

Nach dem 1. Fall existieren $f_i \geq 0$ mit

$$p_i[A] = \int f_i dm_i$$

Sei $g = 1_B$.

$$\int g dm_i = m_i[B] = m[B \cap E_i] = \int 1_{E_i} 1_B dm$$

Mit Linearität und dem Grenzwert monotoner positiver Funktionen folgt

$$\int g dm_i = \int 1_{E_i} g dm$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} p[A] &= p\left[A \cap \sum_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} p[A \cap E_i] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i[A] \\ &\overset{1.\text{ Fall}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_i dm_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A 1_{E_i} f_i dm \\ &\overset{1_{E_i} f_i \geq 0}{=} \int_A \sum_{i=1}^{\infty} f_i 1_{E_i} dm \end{aligned}$$

Mit

$$f := \sum_{i=1}^{\infty} f_i 1_{E_i}$$

folgt die Behauptung. ■

**Satz 59.6 (Zerlegung von Maßen)** *Seien p,m Maße auf $(W,S)$ und* ***p endlich****. Dann gibt es eindeutig bestimmte Maße $p_1, p_2$ auf $(W,S)$ mit*
*i)* $p = p_1 + p_2$
*ii)* $p_1 << m$
*iii)* $\exists B \in S : p_2[B^C] = 0$ *und* $m[B] = 0$

**Beweis. Existenz:** Seien

$$\begin{aligned} N_m &:= \{B \in S : m[B] = 0\} \\ c &:= \sup\{p[B] \mid m[B] = 0, B \in S\} \\ &\leq p[W] < \infty \end{aligned}$$

Sei $(B_i)_i$ eine Folge in $N_m$, die die kleinste obere Schranke erreicht.

$$\lim_{i\to\infty} p[B_i] = c$$

Für $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ und $A \in S$ setze

$$\begin{array}{c} p_1 : (W,S) \to [0,\infty), A \mapsto p\left[A \cap B^C\right] \\ p_2 : (W,S) \to [0,\infty), A \mapsto p[A \cap B] \end{array}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} p[A] &= p\left[A \cap B + A \cap B^C\right] \\ &= p\left[A \cap B\right] + p[A \cap B^C\right] \\ &= p_1[A] + p_2[A] \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} m[B] &= m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right] \le \sum_{i=1}^{\infty} m[B_i] = 0 \\ p_2[B^C] &= p[B^C \cap B] = p[\emptyset] = 0 \end{aligned}$$

Sei $m[A] = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p\left[B + A \cap B^C\right] &= p[B] + p\left[A \cap B^C\right] \\ &\overset{Def}{=} c + p_1[A] \overset{\sup}{\le} c \end{aligned}$$

d.h.

$$p_1[A] = 0$$

**Eindeutigkeit**: Sei $A \in S$ beliebig. Gelte

$$p = p_1 + p_2 = p_1^* + p_2^*$$

Nach Voraussetzung gibt es $B, B^* \in S$ mit

$$\begin{aligned} m[B] &= 0 \text{ und } p_2\left[B^C\right] = 0 \\ m[B^*] &= 0 \text{ und } p_2^*\left[B^{*C}\right] = 0 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} p_1, p_1^* &<< m \\ m[B \cup B^*] &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& p_2^*[A] \\
= \; & p_2^*[A \cap (B \cup B^*)] + p_2^* \left[A \cap (B \cup B^*)^C\right] \\
= \; & (p - p_1^*) \left[A \cap (B \cup B^*)\right] + \underbrace{p_2^* \left[A \cap B^C \cap B^{*C}\right]}_{=0,\text{ da } p_2^*[B^{*C}]=0} \\
= \; & p[A \cap (B \cup B^*)] - \underbrace{p_1^* \left[A \cap (B \cup B^*)\right]}_{=0,\text{ da } m[B \cup B^*]=0} \\
= \; & p[A \cap (B \cup B^*)] - \underbrace{p_1 \left[A \cap (B \cup B^*)\right]}_{=0,\text{ da } m[B \cup B^*]=0} \\
= \; & (p - p_1) \left[A \cap (B \cup B^*)\right] + \underbrace{p_2 \left[A \cap B^C \cap B^{*C}\right]}_{=0,\text{ da } p_2[B^C]=0} \\
= \; & p_2[A \cap (B \cup B^*)] + p_2 \left[A \cap (B \cup B^*)^C\right] \\
= \; & p_2[A]
\end{aligned}
$$

d.h. $p_2 = p_2^*$ und damit

$$p_1 = p - p_2 = p - p_2^* = p_1^*$$

■

**Satz 59.7 (Zerlegung von Maßen)** *Seien p,m Maße auf $(W,S)$ und* ***p abzählbar endlich****. Dann gibt es eindeutig bestimmte Maße $p_1, p_2$ auf $(W,S)$ mit*
*i)* $p = p_1 + p_2$
*ii)* $p_1 << m$
*iii)* $\exists B \in S : p_2 \left[B^C\right] = 0$ *und* $m[B] = 0$

**Beweis.** Da p abzählbar endlich ist, gibt es eine Folge $C_i \uparrow W$ mit $p[C_i] < \infty$.
Setze

$$
\begin{aligned}
E_1 &= C_1 \\
C_i &= \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ mit } E_n = C_n \backslash C_{n-1}
\end{aligned}
$$

Wegen

$$p\left[A \cap E_i\right] \leq p[E_i] < \infty$$

sind

$$p_i : (W,S) \to [0,\infty), A \mapsto p[A \cap E_i]$$

endliche Maße. Damit gibt es $p_{1,i}, p_{2,i}$ mit

$$\begin{array}{rl} i) & p_{1,i} << m \\ ii) & \exists B_i' \in S : p_{2,i}[B_i'^C] = 0 \text{ und } m[B_i'] = 0 \\ iii) & p_i = p_{i,1} + p_{i,2} \end{array}$$

Für $B_i := B_i' \cap E_i$ gilt

$$\begin{aligned} p_{2,i}\left[B_i^C\right] &= p_{2,i}\left[B_i'^C \cup E_i^C\right] \\ &\leq \underbrace{p_{2,i}\left[B_i'^C\right]}_{=0} + p_{2,i}\left[E_i^C\right] \\ &\leq p_i\left[E_i^C\right] = p\left[E_i \cap E_i^C\right] \\ &= p[\emptyset] = 0 \\ m[B_i] &= m\left[B_i' \cap E_i\right] \leq m\left[B_i'\right] = 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{array}{rl} i) & p_{1,i} << m \\ ii) & \exists B_i \in S : B_i \subset E_i \text{ und } p_{2,i}[{B_i}^C] = 0 \text{ und } m[B_i] = 0 \\ iii) & p_i = p_{i,1} + p_{i,2} \end{array}$$

Wegen $B_i \subset E_i$ setze

$$B := \sum_{i=1}^{\infty} B_i.$$

$$p_1 : (W,S) \to [0,\infty), A \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} p_{1,i}[A]$$

$$p_2 : (W,S) \to [0,\infty), A \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} p_{2,i}[A]$$

i) Sei $m[A] = 0$. Dann gilt

$$p_1[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{p_{1,i}[A]}_{=0} = 0$$

ii)

$$\begin{aligned}
p_2[B^C] &= \sum_{i=1}^{\infty} p_{2,i}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p_{2,i}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^C\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{p_{2,i}\left[B_i^C\right]}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
p[A] &= p\left[A \cap \sum_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} p\left[A \cap E_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p_i\left[A\right] = \sum_{i=1}^{\infty} p_{1,i}\left[A\right] + \sum_{i=1}^{\infty} p_{2,i}\left[A\right] \\
&= p_1[A] + p_2[A]
\end{aligned}$$

■

Wenn p eine Dichte f hat, kann man gleich mit dieser integrieren.

**Satz 59.8** *Sei $f$ eine Dichte von $p$ bzgl. $m$, d.h. $p(A) = \int_A f dm$. Dann gilt a)*

$$\forall h \in T^* : \int h dp = \int h f dm$$

*b) Ist $h : W \to \mathbb{R}$ messbar, so gilt*

$$h \text{ ist } p\text{-integrierbar} \iff h \cdot f \text{ ist } m \text{ integrierbar}$$

*In diesem Fall gilt auch*

$$\int h dp = \int h f dm$$

**Beweis. a)** i) $h = 1_A$:

$$\int 1_A dp = \int_A dp = p[A] = \int_A f dm = \int 1_A f dm$$

ii) Sei $h = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i}$

$$\begin{aligned}\int hdp &= \sum_{i=1}^{n} c_i \int 1_{A_i} dp \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \int 1_{A_i} f dm \\ &= \int hf dm\end{aligned}$$

iii) Sei $h \in T^*$ und $h_n \in T$ mit $h_n \uparrow h$.
Dann gilt $h_n \cdot f \uparrow h \cdot f$ und

$$\int hdp \overset{h_n \uparrow h}{=} \lim_{n\to\infty} \int h_n dp \overset{i)}{=} \lim_{n\to\infty} \int h_n f dm \overset{h_n f \uparrow hf}{=} \int hf dm$$

**b)** mit a) folgt

$$\begin{aligned}\int h^+ dp &= \int h^+ f dm \\ \int h^- dp &= \int h^- f dm\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int h^{\pm} dp < \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \int h^{\pm} f dm < \infty \\ \int hdp \quad &= \quad \int h^+ dp - \int h^- dp \\ &= \quad \int h^+ f dm - \int h^- f dm \\ &= \quad \int hf dm\end{aligned}$$

■

**Beispiel 59.9** *Die tägliche Niederschlagsmenge $l$ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.*
*Sei $p$ ein Maß mit*

$$p[(-\infty, x]] = F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

*Finde eine Funktion $f \geq 0$ und ein Maß $m$ mit*

$$p[(-\infty, x]] = \int_{(-\infty, x]} f dm$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned} l[0] &= 0 \\ p[0] &= \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

ist p nicht absolut-stetig bezüglich $l$. Mit dem Punktmaß $\delta$ in 0 hat $p$ bezüglich

$$m := l + \frac{1}{2}\delta_{\{0\}}$$

die Dichte

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

denn für das Erzeugendensystem $(-\infty, x]$ mit $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x} f(t)m(dt) \\ = & \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt + \frac{1}{2} \cdot \delta_0[(-\infty, x]] \\ = & \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \\ = & \ p[(-\infty, x]] \end{aligned}$$

Da $p, m$ endlich sind, ist die Dichte eindeutig. ■

# 60. Ein 0-1-Gesetz

**Definition 60.1** *a) Seien* $(S_i)_{i\in I}$ *abzählbare Algebren. Die abzählbare Algebra*

$$S_\infty := \bigcap_{J\subset I, 0<|J|<\infty} S\left(\bigcup_{j\in I\setminus J} S_j\right)$$

*enthält die Ereignisse, deren Eintreten von keiner endlichen Teilmenge* $J \subset I$ *abhängt.*
*b) Für* $A_i \in S$ *setze* $S_i := \{\emptyset, A_i, A_i^C, W\}$ *und* $S_\infty$ *wie oben.*
*c) Für* $X_i : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *setze* $S_i := S(X_i)$ *und* $S_\infty$ *wie oben.*

**Beweis.** a) Der Schnitt abzählbarer Algebren ist eine abzählbare Algebra.
b) Wegen

$$\begin{aligned} & & \emptyset \in \{\emptyset, A_i, A_i^C, W\} \\ B \in \{\emptyset, A_i, A_i^C, W\} & \Rightarrow & B^C \in \{\emptyset, A_i, A_i^C, W\} \\ B_i \in \{\emptyset, A_i, A_i^C, W\} & \Rightarrow & \bigcup_{i\in I} B_i \in \{\emptyset, A_i, A_i^C, W\} \end{aligned}$$

gilt

$$S(A_i) = \{\emptyset, A_i, A_i^C, W\}$$

■

**Satz 60.2** *a) Sei I abzählbar und* $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *endlich mit* $J_n \subset J_{n+1}$ *und* $I = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$*. Dann gilt*

$$S_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty S\left(\bigcup_{m\in I\setminus J_n} S_m\right)$$

*b) Für* $\mathbb{N}$ *gilt*

$$S_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty S\left(\bigcup_{m=n}^\infty S_m\right)$$

**Beweis. a)** "$\subset$":

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J_n} S_m\right) \quad \subset \quad S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J_n} S_m\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \bigcap_{J \subset I, |J| < \infty} S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J} S_m\right) \quad \overset{|J_n| < \infty}{\subset} \quad S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J_n} S_m\right)$$

$$\bigcap_{J \subset I, |J| < \infty} S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J} S_m\right) \quad \subset \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J_n} S_m\right)$$

"$\supset$": Sei $J \subset I$ endlich. Wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = I$ und $J_n \subset J_{n+1}$ gilt

$$\forall j \in J \; \exists n_j : \; j \in J_{n_j}$$
$$J \subset J_{N := \max_{j \in J} n_j}$$

und

$$\forall |J| < \infty: \; \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J_n} S_m\right) \quad \subset \quad S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J_N} S_m\right)$$

$$\overset{J \subset J_N}{\subset} \quad S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J} S_m\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J_n} S_m\right) \quad \subset \quad \bigcap_{J \subset I, |J| < \infty} S\left(\bigcup_{m \in I \setminus J} S_m\right)$$

**b)** Für $J_n = \{1, \ldots, n-1\}$ gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus J_n} S_m\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} S_m\right)$$

■

**Satz 60.3** *Sei $R \subset Pot(W)$ ein Ring und $m$ ein Maß auf $S(R)$, das abzählbar endlich auf $R$ ist. Dann gilt*
$\forall A \in S(R)$ *mit* $m[A] < \infty \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \exists A_1, \ldots, A_n \in R:$

$$m\left[\left(A \setminus \sum_{i=1}^{n} A_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \setminus A\right)\right] < \varepsilon$$

**Beweis.** Wegen $A \in S(R)$ und $m[A] < \infty$ gilt

$$\begin{aligned} m[A] &= m^*[A] \\ &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m[B_i] \;:\; B_i \in R, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\} \end{aligned}$$

Somit

$$\exists B_i \in R : \left\{ \begin{array}{rcl} A & \subset & \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \\ \sum_{i=1}^{\infty} m[B_i] & \leq & m[A] + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists n \in \mathbb{N} : \sum_{i=n+1}^{\infty} m[B_i] & < & \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

Da $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ gilt

$$\begin{aligned} m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right] &= m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cap A^C\right] + m\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cap A\right] \\ &= m\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \backslash A\right] + m\,[A] \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & m\left[\left(A \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) + \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \backslash A\right)\right] \\ = \quad & m\left[A \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] + m\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i \backslash A\right] \\ \stackrel{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}{\leq} \quad & m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] + m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \backslash A\right] \\ \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \quad & m\left[\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i\right] + m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right] - m[A] \\ \leq \quad & \sum_{i=n+1}^{\infty} m\,[B_i] + \sum_{i=1}^{\infty} m\,[B_i] - m[A] \\ < \quad & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} B_i &= B_1 + \sum_{i=2}^{n} B_i \cap B_{i-1}^C \cap \ldots \cap B_1^C \\
&= B_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(B_i \cap B_{i-1}^C\right) \cap \ldots \cap \left(B_i \cap B_1^C\right) \\
&= B_1 + \sum_{i=2}^{n} \bigcap_{j=1}^{i-1} \underbrace{(B_i \backslash B_j)}_{\in R}
\end{aligned}$$

setze

$$\begin{aligned}
A_1 &:= B_1 \in R \\
A_i &:= \bigcap_{j=1}^{i-1} (B_i \backslash B_j) \in R
\end{aligned}$$

und es folgt

$$\exists k \in \mathbb{N}\ \exists A_1, \ldots, A_k \in R:\ m\left[\left(A \backslash \sum_{i=1}^{n} A_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \backslash A\right)\right] < \varepsilon$$

■

**Satz 60.4** *Seien $(S_n)_n$ abzählbare Algebren und*

$$\begin{aligned}
G_n &= \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} A_k : A_k \in S_k \right\} \\
R_n &= \left\{ \sum_{j=1}^{i} \bigcap_{k=1}^{n} A_{k,j} : A_k \in S_k \right\}
\end{aligned}$$

*Dann gilt*

1.) $A, B \in G_n \Rightarrow A \cap B \in G_n$

2.) $A, B \in G_n \Rightarrow A \backslash B = \sum_{j=1}^{m} C_j$ *mit* $C_j \in G_n$

3.) $A, B_1, \ldots, B_l \in G_n \Rightarrow A \backslash \bigcup_{i=1}^{l} B_i = \sum_{j=1}^{m} C_j$ *mit* $C_j \in G_n$

4.) $R_n$ *ist ein Ring*

5.) $R_n \subset R_{n+1}$

6.) $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$ *ist ein Ring*

7.) $S(R) = S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$

**Beweis. 1.)**

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \bigcap_{k=1}^{n} A_k \cap \bigcap_{k=1}^{n} B_k \\
&= \bigcap_{k=1}^{n} \underbrace{A_k \cap B_k}_{\in S_k} \in G_n
\end{aligned}
$$

**2.)** $n = 2$: Wegen

$$
\begin{aligned}
(B_1 \cap B_2)^C &= B_1^C \cup B_2^C \\
&= B_1^C + B_2^C \cap B_1
\end{aligned}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
A \backslash B &= A_1 \cap A_2 \cap (B_1 \cap B_2)^C \\
&= A_1 \cap A_2 \cap \left(B_1^C + B_2^C \cap B_1\right) \\
&= \underbrace{A_1 \cap B_1^C}_{\in S_1} \cap \underbrace{A_2}_{\in S_2} + \underbrace{A_1 \cap B_1}_{\in S_1} \cap \underbrace{A_2 \cap B_2^C}_{\in S_2}
\end{aligned}
$$

$n \to n+1$: Wegen

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right)^C &= \left(B_{n+1} \cap \bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)^C \\
&= B_{n+1}^C \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)^C \\
&= \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)^C + B_{n+1}^C \cap \bigcap_{k=1}^{n} B_k
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
A \backslash B &= \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right)^C \\
&= \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \cap \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)^C + B_{n+1}^C \cap \bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \\
&= \bigcap_{k=1}^{n} A_k \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)^C \cap A_{n+1} + \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cap B_k) \cap \underbrace{A_{n+1} \cap B_{n+1}^C}_{\in S_{n+1}} \\
&\overset{\text{Fall n}}{=} \left(\sum_{j=1}^{l} \underbrace{D_j}_{\in G_n}\right) \cap A_{n+1} + \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cap B_k) \cap \underbrace{A_{n+1} \cap B_{n+1}^C}_{\in S_{n+1}}
\end{aligned}$$

**3.)** $l = 1$: in 2.) gezeigt.
$l \to l+1$:

$$\begin{aligned}
A \setminus \bigcup_{i=1}^{l+1} B_i &= \left( A \cap \bigcap_{i=1}^{l} B_i^C \right) \cap B_{l+1}^C \\
&= \left( A \setminus \bigcup_{i=1}^{l} B_i \right) \cap B_{l+1}^C \\
&\overset{\text{Fall } l}{=} \left( \sum_{j=1}^{m} \underbrace{C_j}_{\in G_n} \right) \cap B_{l+1}^C \\
&\overset{2.)}{=} \sum_{j=1}^{m} C_j \setminus B_{l+1} \\
&\overset{\text{Fall } l=1}{=} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l_j} D_{kj} \text{ mit } D_{kj} \in G_n
\end{aligned}$$

**4.)**

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \bigcap_{k=1}^{n} \underbrace{\emptyset}_{\in S_k} \in R_n \\
A \setminus B &= \sum_{j=1}^{i} \underbrace{\bigcap_{k=1}^{n} A_{k,j}}_{=A_j} \setminus \sum_{s=1}^{t} \underbrace{\bigcap_{k=1}^{n} B_{k,s}}_{=B_s} \\
&= \sum_{j=1}^{i} \underbrace{A_j}_{\in G_n} \setminus \bigcup_{s=1}^{t} \underbrace{B_s}_{\in G_n} \\
&\overset{3.)}{=} \sum_{j=1}^{i} \sum_{u=1}^{v} \underbrace{C_{u,j}}_{\in G_n} \in R_n \\
A \cup B &= A \setminus B + B \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{C_j}_{\in G_n} + \sum_{s=1}^{t} \underbrace{B_s}_{\in G_n} \in R_n
\end{aligned}$$

**5.)**

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{i} \bigcap_{k=1}^{n} A_{k,j} \in R_n \\ \overset{W_{n+1} \in S_{n+1}}{\Rightarrow} \quad & \sum_{j=1}^{i} \left( W_{n+1} \cap \bigcap_{k=1}^{n} A_{k,j} \right) \in R_{n+1} \\ \Rightarrow \quad & R_n \subset R_{n+1} \end{aligned}$$

**6.)**

$$\begin{aligned} \emptyset \in R_n \quad & \Rightarrow \quad \emptyset \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \\ A, B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \quad & \Rightarrow \quad \exists m, n : A \in R_m, B \in R_n \\ & \overset{R_{\max(m,n)} \text{ ist Ring}}{\Rightarrow} \quad A \backslash B, A \cup B \in R_{\max(m,n)} \\ & \Rightarrow \quad A \backslash B, A \cup B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \end{aligned}$$

**7.)**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \; A_n \in S_n \quad & \Rightarrow \quad A_n \in R \\ \forall n \in \mathbb{N} : \; S_n \quad & \subset \quad S(R) \\ S\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) \quad & \subset \quad S(R) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \; R_n \subset S\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) \\ S\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right) \subset S\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) \end{aligned}$$

■

**Satz 60.5** *Seien $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$* ***unabhängige*** *abzählbare Algebren. Dann gilt*

$$\forall A \in S_\infty : \; P[A] \in \{0, 1\}$$

**Beweis.** Sei $\varepsilon > 0$.

$$A \in S_\infty \Rightarrow A \in S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = S(R)$$

Für

$$P : S(R) \to [0,1], A \mapsto P[A]$$

gilt

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \exists B_1, \ldots, B_N \in R :\ P\left[\left(A \backslash \sum_{i=1}^{N} B_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{N} B_i \backslash A\right)\right] < \varepsilon$$

Wegen $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ gilt

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{N} :\ B_1, \ldots, B_N &\in R_n \\ \sum_{i=1}^{N} B_i &\in R_n \end{aligned}$$

außerdem

$$A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} S_i\right) \Rightarrow A \in S\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right)$$

Setze

$$\begin{aligned} H_1 &:= \left\{A \cap B :\ A, B \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right\} \\ H_2 &:= \left\{A \cap B :\ A, B \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right\} \end{aligned}$$

Dann gilt mit $B = W$

$$\begin{aligned} &H_i \text{ ist durchschnittsstabil} \\ &S(H_1) = S\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \\ &S(H_2) = S\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{array}{rl} & (S_i)_i \text{ sind unabhängig} \\ \Rightarrow & H_1 \text{ und } H_2 \text{ sind unabhängig} \\ \overset{H_i \text{ durchschnittsstabil}}{\Rightarrow} & S(H_1), S(H_2) \text{ sind unabhängig} \\ \Rightarrow & S\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) \text{ und } S\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \text{ sind unabhängig} \\ \Rightarrow & A, B \text{ sind unabhängig} \end{array}$$

und mit

$$\begin{array}{rcl} P[B] & = & P[B \cap A^C] + P[B \cap A] \\ & \leq & P[B \backslash A] + P[A] \\ & \leq & P\left[(B \backslash A) + (A \backslash B)\right] + P[A] \\ & \leq & P[A] + \varepsilon \end{array}$$

folgt

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon & > & P\left[\left(A \backslash \sum_{i=1}^{N} B_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{N} B_i \backslash A\right)\right] \\ & \geq & P[A \backslash B] = P[A \cap B^C] \\ & = & P[A] - P[A \cap B] \\ & \overset{A,B \text{ unabhängig}}{=} & P[A] - P[A]P[B] \\ & = & P[A](1 - P[B]) \\ & \overset{\text{s.o.}}{\geq} & P[A](1 - P[A] - \varepsilon) \end{array}$$

Im Grenzwert $\varepsilon \downarrow 0$ gilt

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & P[A](1 - P[A]) \\ P[A] & = & 0 \text{ oder } P[A] = 1 \\ P[A] & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

■

**Beispiel 60.6** *a) Für* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gilt*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m, \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \in S_\infty$$

*b) Seien* $X_n : (W,S,P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$*. Dann gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} X_n, \limsup_{n\to\infty} X_n \text{ sind } S_\infty - \text{messbar}$$

*c) Seien* $X_n : (W,S,P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$*. Dann gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ sind } S_\infty - \text{messbar}$$

**Beweis. a)**

$$\begin{aligned}
\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m &\in S\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} S_m\right)\\
\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} S_m\right)\\
\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right)^C = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m^C &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} S_m\right)\\
\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} S_m\right)
\end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
& \left(\sup_{m\geq n} X_m\right)_n \text{ ist monoton fallend}\\
\Rightarrow\quad & \forall N \in \mathbb{N}: \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} X_m = \inf_{n\geq N}\sup_{m\geq n} X_m\\
\Rightarrow\quad & \forall N \in \mathbb{N}: \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} X_m \text{ ist } S\left((X_n)_{n\geq N}\right)\text{-messbar}\\
\Rightarrow\quad & \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} X_m \text{ ist } S_\infty\text{-messbar}
\end{aligned}$$

$\liminf_{n\to\infty} X_n$ genauso.
**c)** Wegen

$$\begin{aligned}
& \forall n \in \mathbb{N}: \;\; X_n(w) \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{N}: \;\; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} X_i = 0 \\
\Rightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{N}: \;\; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=N}^{n} X_i \\
\Rightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{N}: \;\; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ist } S\left((X_n)_{n\geq N}\right)\text{-messbar} \\
\Rightarrow \quad & \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ist } S_\infty\text{-messbar}
\end{aligned}$$

■

**Satz 60.7** *a) Seien $X_n : (W, S, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$* ***unabhängig****. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} X_n &= \textit{konstant } P\textit{-fast sicher} \\
\limsup_{n\to\infty} X_n &= \textit{konstant } P\textit{-fast sicher}
\end{aligned}$$

*b) Seien $X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$* ***unabhängig****. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i &= \textit{konstant } P\textit{-fast sicher} \\
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i &= \textit{konstant } P\textit{-fast sicher}
\end{aligned}$$

**Beweis.** Da die $X_n$ unabhängig sind, sind $(S(X_n))_n$ unabhängig, d.h.

$$\forall A \in S_\infty : \;\; P[A] \in \{0, 1\}$$

Da $\liminf_{n\to\infty}$ $S_\infty$-messbar ist, gilt

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} : \left\{ \liminf_{n\to\infty} X_n \leq x \right\} \in S_\infty$$

d.h.

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} : \;\; P\left[ \liminf_{n\to\infty} X_n \leq x \right] \in \{0, 1\}$$

Andere genauso. ■

# Teil V. Bedingte Erwartungswerte und Martingale

## 61. Bedingte Erwartungswerte

Sei $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ und $S_0 \subset S$ eine abzählbare Algebra von Ereignissen, von denen wir wissen, daß sie eingetreten sind oder nicht.
Ist X $S_0$-messbar, so ist

$$\forall c \in \mathbb{R} : \{X = c\} \in S_0$$

und wir kennen $X$.
Ist X nicht $S_0$-messbar, so suchen wir eine $S_0$-messbare Funktion $E[X|S_0]$, die eine **gut handhabbare Näherung von X** ist. Da wir oft Erwartungswerte betrachten, nähern wir in $L^1$.

### 1.) Ein Spezialfall

Im folgenden einfachen Fall läßt sich die gesuchte Funktion direkt angeben.

**Satz 61.1** *Sei $X \geq 0$, $W = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ und*

$$E[X|S_0] : W \to \mathbb{R}, w \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} E[X|A_i] 1_{A_i}(w) = \sum_{i:P[A_i]>0} \frac{E[X 1_{A_i}]}{P[A_i]} 1_{A_i}(w)$$

*Dann gilt*
*a) $S_0 = \left\{\sum_{i \in I} A_i : I \subset \mathbb{N}\right\}$ ist eine abzählbare Algebra.*
*b) $E[X|S_0]$ ist $S_0$ messbar.*
*c) Für alle $S_0$-messbaren $Y_0 \geq 0$ gilt*

$$E[XY_0] = E[E[X|S_0] \cdot Y_0\ ]$$

*d) Insbesondere gilt*

$$E[X] = E[\ E[X|S_0]\ ]$$

**Beweis.** Sei $P[A_i] > 0$. Dann ist $P[\cdot|A_i]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei $B \in S$.

$$\begin{aligned}
E[1_B|A_i] &\overset{Def}{=} \int 1_B dP[\cdot|A_i] \\
&\overset{Def}{=} P[B|A_i] \\
&\overset{Def}{=} \frac{P[B \cap A_i]}{P[A_i]} \\
&= \frac{1}{P[A_i]} \int 1_B 1_{A_i} dP \\
&\overset{Def}{=} \frac{E[1_B 1_{A_i}]}{P[A_i]}
\end{aligned}$$

Für $\sum_{k=1}^n b_k 1_{B_k} \in T(S)$ gilt

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{k=1}^n b_k 1_{B_k} |A_i\right] &= \int \sum_{k=1}^n b_k 1_{B_k} dP[\cdot|A_i] \\
&= \sum_{k=1}^n b_k \int 1_{B_k} dP[\cdot|A_i] \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{k=1}^n b_k \frac{E\left[1_{A_i} 1_{B_k}\right]}{P[A_i]} \\
&= \frac{E\left[\sum_{k=1}^n b_k 1_{B_k} 1_{A_i}\right]}{P[A_i]}
\end{aligned}$$

und für $X_n \in T$ mit $X_n \uparrow X \geq 0$.

$$\begin{aligned}
E\left[\lim_{n\to\infty} X_n |A_i\right] &= \int \lim_{n\to\infty} X_n dP[\cdot|A_i] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int X_n dP[\cdot|A_i] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{E\left[X_n 1_{A_i}\right]}{P[A_i]} \\
&= \frac{E\left[\lim_{n\to\infty} X_n 1_{A_i}\right]}{P[A_i]}
\end{aligned}$$

**a)** 1.) $W = \sum_{n=1}^\infty A_n \in S_0$
2.) Sei $B = \sum_{i \in I} A_i \in S_0$. Dann gilt

$$B^C = \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus I} A_i \in S_0$$

3.) Seien $B_j = \sum_{i \in I_j} A_i \in S_0$. Dann gilt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \sum_{i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j} A_i \in S_0$$

**b)** Da $A_i \in S_0$ ist $1_{A_i}$ $S_0$-messbar. Damit ist

$$E[X|S_0] = \sum_{i:P[A_i]>0} \underbrace{\frac{E[X1_{A_i}]}{P[A_i]}}_{\geq 0} 1_{A_i}(w)$$

$S_0$-messbar.
**c)** Sei $Y_0 = 1_{A_j}$ und $P[A_j] > 0$. Wegen

$$1_{A_i}1_{A_j} = \begin{cases} 1_{A_i} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

bleibt nur ein Term der Summe erhalten

$$\begin{aligned} E[\ E[X|S_0]\ 1_{A_j}] &= \int \sum_{i:P[A_i]>0} \frac{E[X1_{A_i}]}{P[A_i]} 1_{A_i}1_{A_j}\,dP \\ &= \int \frac{E[X1_{A_j}]}{P[A_j]} 1_{A_j}\,dP = \frac{E[X1_{A_j}]}{P[A_j]} \underbrace{\int 1_{A_j}\,dP}_{P[A_j]} \\ &= E[X1_{A_j}] \end{aligned}$$

Für $P[A_j] = 0$ gilt

$$E[\ \underbrace{E[X|S_0]}_{=0} 1_{A_j}\ ] = \int 0\,dP = 0 \overset{P[A_j]=0}{=} E[X1_{A_j}]$$

Seien $Y_n = \sum_{k=1}^{N_n} c_k 1_{A_k} \in T(S_0)$ mit $Y_n \uparrow Y_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
E[E[X|S_0]Y_0] &= \int \sum_{i:P[A_i]>0} \frac{E[X1_{A_i}]}{P[A_i]} 1_{A_i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} c_k 1_{A_k} dP \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{i:P[A_i]>0} \frac{E[X1_{A_i}]}{P[A_i]} 1_{A_i} \sum_{k=1}^{N_n} c_k 1_{A_k} dP \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} c_k \int \sum_{i:P[A_i]>0} \frac{E[X1_{A_i}]}{P[A_i]} 1_{A_i} 1_{A_k} dP \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} c_k E[X1_{A_k}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} c_k \int 1_{A_k} X dP \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{N_n} c_k 1_{A_k} X dP \\
&= \int \lim_{n\to\infty} Y_n X dP \\
&= E[XY_0]
\end{aligned}$$

**d)** Da $W \in S_0$ ist $Y_0 \equiv 1_W$ $S_0$-messbar und

$$\begin{aligned}
E[X \cdot 1_W] &= E[E[X|S_0] \cdot 1_W] \\
E[X] &= E[E[X|S_0]]
\end{aligned}$$

■

## 2.) Der allgemeine Fall

**Satz 61.2 (Existenz und Eindeutigkeit der bedingten Erwartung)**
*Sei $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $X \geq 0$ und $P[X < \infty] = 1$.*
*Dann existiert ein P-fast sicher eindeutiges $E[X|S_0] \geq 0$ mit*
*1.) $E[X|S_0]$ ist $S_0$-messbar.*
*2.) $\forall A \in S_0 : \; E[X1_A] = E[E[X|S_0]1_A]$*
*$E[X|S_0]$ heißt bedingte Erwartung von X bzgl. $S_0$*
*Schreibweise: $E[X|Y] := E[X|S(Y)]$*

**Beweis. Eindeutigkeit:**
Seien 1.) und 2.) für $E[X|S_0]$ und $\overline{E[X|S_0]}$ erfüllt.

Da $E[X|S_0] - \overline{E[X|S_0]}$ $S_0$-messbar ist, gilt

$$A_0 := \{E[X|S_0] > \overline{E[X|S_0]}\} \in S_0$$

Es folgt

$$\begin{aligned} E[E[X|S_0]1_{A_0}] &\overset{Vor}{=} E[X1_{A_0}] \\ &\overset{Vor}{=} E[\overline{E[X|S_0]}1_{A_0}] \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E[\underbrace{(E[X|S_0] - \overline{E[X|S_0]})}_{>0 \text{ auf } A_0} 1_{A_0}] &= 0 \\ P[A_0] &= 0 \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich

$$\begin{aligned} P[E[X|S_0] < \overline{E[X|S_0]}] &= 0 \\ P[E[X|S_0] \neq \overline{E[X|S_0]}] &= 0 \\ E[X|S_0] &= \overline{E[X|S_0]} \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

**Existenz:** Seien $A_i \in S_0$ und

$$Q : (W, S_0) \to [0, \infty], A \mapsto E\left[X1_A\right]$$

**1.) Q ist ein Maß** auf $(W, S_0)$, da

$$\begin{aligned} Q[\emptyset] &= E[X1_\emptyset] = E[0] = 0 \\ Q[A_0] &= E[X1_{A_0}] \geq 0 \\ Q\left[\sum_{i=1}^\infty A_i\right] &= E\left[X1_{\sum_{i=1}^\infty A_i}\right] = E\left[X\sum_{i=1}^\infty 1_{A_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^\infty E[X1_{A_i}] = \sum_{i=1}^\infty Q[A_i] \end{aligned}$$

**2.) Q ist absolut stetig bzgl. P:** Da für $P[A_0] = 0$ gilt

$$Q[A_0] = \int X1_{A_0} dP = 0$$

**3.) Q ist abzählbar endlich:** Wegen

$$\begin{aligned} 1 &= P[X < \infty] \\ &= P\left[\bigcup_{n=1}^\infty \{X \leq n\}\right] \\ &\overset{\text{monoton}}{=} \lim_{n\to\infty} P[X \leq n] \end{aligned}$$

gilt

$$\{X \leq n\} \uparrow W \text{ P-fast sicher}$$

und

$$\begin{aligned} Q[X \leq n] &\overset{Def}{=} E[1_{\{X \leq n\}} X] \\ &= \int 1_{X \leq n} X dP \\ &\leq nP[X \leq n] \leq n \end{aligned}$$

**4.) Damit existiert eine $S_0$-messbare Dichte** $Y \geq 0$, sodaß

$$\forall A_0 \in S_0 : \ Q[A_0] = \int_{A_0} Y dP$$

Mit

$$E[X 1_{A_0}] \overset{\text{Def}}{=} Q[A_0] = E[Y 1_{A_0}]$$

gilt

$$E[X|S_0] = Y \geq 0 \text{ P-fast sicher}$$

■

**Satz 61.3** *Gleichwertig zu 2.) ist*

$$\forall S_0\text{-}\textit{messbaren } Y_0 \geq 0 : \ E[XY_0] \quad = \quad E[E[X|S_0]Y_0]$$

**Beweis.** $'' \Rightarrow''$: $1_A$ ist $S_0$-messbar für $A \in S_0$
$'' \Leftarrow''$: Seien $\sum_{i=1}^n c_1 1_{A_i} \in T(S_0)$, d.h. $A_i \in S_0$

$$\begin{aligned} E\left[X \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}\right] &= \sum_{i=1}^n c_i E\left[X 1_{A_i}\right] \\ &\overset{\text{Vor}}{=} \sum_{i=1}^n c_i E\left[E[X|S_0] 1_{A_i}\right] \\ &= E\left[E[X|S_0] \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}\right] \end{aligned}$$

Sei $Z_n \in T(S_0)$ mit $Z_n \uparrow Y_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E\left[XY_0\right] &= E\left[X \lim_{n\to\infty} Z_n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[XZ_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[E[X|S_0] Z_n\right] \\ &\overset{Z_n \uparrow Y_0}{=} E\left[E[X|S_0] \lim_{n\to\infty} Z_n\right] \\ &= E\left[E[X|S_0] Y\right] \end{aligned}$$

■

**Definition 61.4** *Sei $X = X^+ - X^-$ mit $E[X^+] < \infty$ oder $E[X^-] < \infty$. Setze*

$$E[X|S_0] = E[X^+|S_0] - E[X^-|S_0]$$

**Satz 61.5** *a) Ist $E[X^+] < \infty$ oder $E[X^-] < \infty$ so gilt*

$$E[X] = E[E[X|S_0]]$$

*b) Für $X_1, X_2 \in L^1$ gilt*

$$\begin{aligned} E[cX_1|S_0] &= cE[X_1|S_0] \text{ } P\text{-fast sicher} \\ E[X_1 + X_2|S_0] &= E[X_1|S_0] + E[X_2|S_0] \text{ } P\text{-fast sicher} \end{aligned}$$

*c) Aus $X_1 \leq X_2$ P-fast sicher folgt*

$$E[X_1|S_0] \leq E[X_2|S_0] \text{ } P\text{-fast sicher}$$

*d)*

$$|E[X|S_0]| \leq E[|X| \; |S_0]$$

*e) Für P-fast sicher monoton steigende $X_n \geq 0$ gilt*

$$E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ } P\text{-fast sicher}$$

*f) $\lim_{n\to\infty} X_n$ existiert P-fast sicher, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ existiert } P\text{-fast sicher}$$

**Beweis.** Sei $Y_0 \geq 0$ $S_0$-messbar.
**a)** $Y_0 \equiv 1$ ist $S_0$-messbar. Mit

$$\begin{aligned} E[E[X|S_0]^{\pm}] &= E[E[X^{\pm}|S_0]Y_0] \\ &\overset{\text{bedingte Erwartungswerte}}{=} E[X^{\pm}Y_0] \\ &= E[X^{\pm}] \end{aligned}$$

gilt

$$E[X^+] - E[X^-] = E[E[X^+|S_0]] - E[E[X^-|S_0]]$$

**b) 1.)** Da $E[X_1|S_0]$ $S_0$-messbar ist, ist $cE[X_1|S_0]$ $S_0$-messbar.
Für $c \geq 0$:

$$\begin{aligned} E[cX_1^{\pm}Y_0] &= E[X_1^{\pm}(cY_0)] \\ &= E[E[X_1^{\pm}|S_0](cY_0)] \\ &= E[cE[X_1^{\pm}|S_0]Y_0] \end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeit gilt

$$E[cX_1^{\pm}|S_0] \quad = \quad cE[X_1^{\pm}|S_0] \text{ P-fast sicher}$$

Für $c < 0$:

$$\begin{aligned} E[cX_1^{\pm}Y_0] &= -E[X_1^{\pm}(-cY_0)] \\ &= -E[E[X_1^{\pm}|S_0](-cY_0)] \\ &= E[cE[X_1^{\pm}|S_0]Y_0] \end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeit gilt

$$E[cX_1^{\pm}|S_0] \quad = \quad cE[X_1^{\pm}|S_0] \text{ P-fast sicher}$$

**2.)** $E[X_1|S_0] + E[X_2|S_0]$ ist $S_0$-messbar. Mit

$$\begin{aligned} W &= \{X_1 \geq 0, X_2 \geq 0\} + \{X_1 < 0, X_2 < 0\} \\ &\quad +\{X_1 \geq 0, X_2 < 0, X_1^+ \geq X_2^-\} + \{X_1 \geq 0, X_2 < 0, X_1^+ < X_2^-\} \\ &\quad +\{X_1 < 0, X_2 \geq 0, X_2^+ \geq X_1^-\} + \{X_1 < 0, X_2 \geq 0, X_2^+ < X_1^-\} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 \geq 0 \text{ auf } A_1 := \{X_1 \geq 0, X_2 \geq 0\} \\ &X_1 + X_2 < 0 \text{ auf } A_2 := \{X_1 < 0, X_2 < 0\} \\ &X_1 + X_2 \geq 0 \text{ auf } A_3 := \{X_1 \geq 0, X_2 < 0, X_1^+ \geq X_2^-\} \\ &X_1 + X_2 < 0 \text{ auf } A_4 := \{X_1 \geq 0, X_2 < 0, X_1^+ < X_2^-\} \\ &X_1 + X_2 \geq 0 \text{ auf } A_5 := \{X_1 < 0, X_2 \geq 0, X_2^+ \geq X_1^-\} \\ &X_1 + X_2 < 0 \text{ auf } A_6 := \{X_1 < 0, X_2 \geq 0, X_2^+ < X_1^-\} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} E\left[X_1^+Y_0\right] &= E\left[X_1^+(1_{A_1} + 1_{A_3} + 1_{A_4})Y_0\right] \\ E\left[X_1^-Y_0\right] &= E\left[X_1^-(1_{A_2} + 1_{A_5} + 1_{A_6})Y_0\right] \\ E\left[X_2^+Y_0\right] &= E\left[X_2^+(1_{A_1} + 1_{A_5} + 1_{A_6})Y_0\right] \\ E\left[X_2^-Y_0\right] &= E\left[X_2^-(1_{A_2} + 1_{A_3} + 1_{A_4})Y_0\right] \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & E\left[(X_1 + X_2)Y_0\right] \\ \stackrel{\text{Def}}{=}\ & E\left[(X_1 + X_2)^+Y_0\right] - E\left[(X_1 + X_2)^-Y_0\right] \\ =\ & E\left[(X_1 + X_2)(1_{A_1} + 1_{A_3} + 1_{A_5})Y_0\right] \\ & -E\left[(X_1 + X_2)(1_{A_2} + 1_{A_4} + 1_{A_6})Y_0\right] \\ =\ & E\left[(X_1^+1_{A_1} + X_1^+1_{A_3} - X_1^-1_{A_5} + X_2^+1_{A_1} - X_2^-1_{A_3} + X_2^+1_{A_5})Y_0\right] \\ & -E\left[(X_1^-1_{A_2} - X_1^+1_{A_4} + X_1^-1_{A_6} + X_2^-1_{A_2} + X_2^-1_{A_4} - X_2^+1_{A_6})Y_0\right] \\ =\ & E\left[X_1^+Y_0\right] + E\left[X_2^+Y_0\right] - E\left[X_1^-Y_0\right] - E\left[X_2^-Y_0\right] \\ \stackrel{\text{Def}}{=}\ & E\left[X_1Y_0\right] - E\left[X_2Y_0\right] \end{aligned}$$

**c)** $E[X_1|S_0] - E[X_2|S_0]$ ist $S_0$-messbar. Mit

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{E[X_1|S_0] > E[X_2|S_0]\} \in S_0 \\
0 &\leq \int_{B_0} \underbrace{(E[X_1|S_0] - E[X_2|S_0])}_{>0 \text{ auf } B_0} dP \\
&= E[1_{B_0}(E[X_1|S_0] - E[X_2|S_0])] \\
&\overset{b)}{=} E[1_{B_0}(X_1 - X_2)] \\
&= \int_{B_0} \underbrace{(X_1 - X_2)}_{\leq 0 \text{ P-f.s.}} dP \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
P[B_0] &= 0 \\
E[X_1|S_0] &\leq E[X_2|S_0] \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

**d)**

$$\begin{aligned}
E[|X|\ |S_0] &= E[X^+ + X^-|S_0] \\
&= E[X^+|S_0] + E[X^-|S_0] \\
&\geq |E[X^+|S_0] - E[X^-|S_0]| \\
&= |E[X|S_0]|
\end{aligned}$$

**e)** Sei $Y_0 \geq 0$ $S_0$-messbar. Setze

$$\begin{aligned}
N_1 &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n < X_{n-1}\} \cup \{X_n < 0\} \\
N_2 &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{E[X_n|S_0] < E[X_{n-1}|S_0]\} \cup \{E[X_n|S_0] < 0\} \\
N &:= N_1 \cup N_2 \\
P[N] &= 0
\end{aligned}$$

Da $(E[X_n|S_0])_n$ und $(X_n)_n$ monoton steigend sind auf $N^C$, gilt

$$(\underbrace{Y_0 E[X_n|S_0]}_{\geq 0})_n, (\underbrace{Y_0 X_n}_{\geq 0})_n \text{ sind monoton steigend auf } N^C$$

Wegen

$$\begin{aligned}
E\left[Y_0 \lim_{n\to\infty} E[X_n|S_0]\right] &\overset{\text{monoton}}{=} \lim_{n\to\infty} E[Y_0 E[X_n|S_0]] \\
&= \lim_{n\to\infty} E[Y_0 X_n] \\
&\overset{\text{monoton}}{=} E\left[Y_0 \lim_{n\to\infty} X_n\right]
\end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n|S_0] = E\left[\lim_{n\to\infty} X_n \middle| S_0\right]$$

**f)**

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert P-fast sicher} \\
\Rightarrow\ & (X_n)_n \text{ ist P-fast sicher ein Cauchyfolge} \\
\Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \exists N\ \forall n, m \geq N : \\
& |E[X_n|S_0] - E[X_m|S_0]| \leq E[|X_n - X_m||S_0] < \varepsilon \\
\Rightarrow\ & (E[X_n|S_0])_n \text{ ist P-fast sicher ein Cauchyfolge in } \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ existiert P-fast sicher}
\end{aligned}$$

■

**Satz 61.6** *a) Sei $X$ messbar und $Z_0 \geq 0$ $S_0$-messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
E[Z_0 X|S_0] &= Z_0 E[X|S_0] \text{ P-fast sicher} \\
E[Z_0|S_0] &= Z_0 \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

*b) Seien $S(X), S_0$ unabhängig. Dann gilt*

$$E[X|S_0] = E[X] \text{ P-fast sicher}$$

*Wir haben keinerlei Information und die beste Vorhersage ist der Mittelwert.*
*c) Gilt $\forall A \in S_0 : P[A] \in \{0, 1\}$, so ist*

$$E[X|S_0] = E[X] \text{ P-fast sicher}$$

**Beweis. a)** Seien $Y_0, Z_0 \geq 0$ $S_0$-messbar.
Dann sind $Z_0 E[X|S_0]$ und $Z_0 Y_0$ $S_0$-messbar und wegen

$$\begin{aligned}
E[\underbrace{Y_0 Z_0}_{S_0-\text{messbar},\geq 0} E[X|S_0]^{\pm}] &= E[Y_0 Z_0 X^{\pm}] \\
&= E[Y_0 (Z_0 X)^{\pm}]
\end{aligned}$$

gilt

$$E[Z_0X|S_0] = Z_0E[X|S_0] \text{ P-fast sicher}$$

Mit $Y_0 = 1_W$ gilt

$$E[Z_0 1_W] = Z_0E[1_W] = Z_0$$

**b)** $E[X]$ ist $S_0$-messbar und wegen

$$\begin{aligned} E[Y_0X^\pm] &\overset{\text{unabhängig}}{=} E[Y_0]E[X^\pm] \\ &\overset{\text{E linear}}{=} E[Y_0E[X^\pm]] \end{aligned}$$

gilt

$$E[X|S_0] = E[X] \text{ P-fast sicher}$$

**c)** Sei $A \in S_0, B \in S(X)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P[A] = 0 &\quad\Rightarrow\quad P[A \cap B] = 0 = P[A]P[B] \\ P[A] = 1 &\quad\Rightarrow\quad P[A \cap B] = P[B] = P[A]P[B] \end{aligned}$$

und $S_0$ und $S(X)$ sind unabhängig. Mit b) folgt die Behauptung. ■

**Satz 61.7** *Sei* $\forall n \in \mathbb{N} : |X_n| \leq Y \in L^1$ *P-fast sicher. Dann gilt*

$$\begin{aligned} E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n \middle| S_0\right] &\leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ \textit{P-fast sicher}} \\ E\left[\limsup_{n\to\infty} X_n \middle| S_0\right] &\geq \limsup_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ \textit{P-fast sicher}} \end{aligned}$$

*Gilt* $\lim_{n\to\infty} X_n$ *existiert P-fast sicher in* $\mathbb{R}$, *folgt*

$$\begin{aligned} &E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ \textit{P-fast sicher}} \\ &\lim_{n\to\infty} E\left[\left|E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right] - E[X_n|S_0]\right|\right] = 0 \end{aligned}$$

**Beweis. a) 1. Fall:** Sei $X_n \geq 0$. Da $(\inf_{k\geq n} X_k)_n$ monoton steigend ist, gilt

$$\begin{array}{rcl}
\forall j \geq n:\ 0 \leq \inf\limits_{k\geq n} X_k & \leq & X_j \\
\forall j \geq n:\ E\left[\inf\limits_{k\geq n} X_k \middle| S_0\right] & \leq & E[X_j|S_0] \text{ P-fast sicher} \\
E\left[\inf\limits_{k\geq n} X_k \middle| S_0\right] & \leq & \inf\limits_{j\geq n} E[X_j|S_0] \text{ P-fast sicher} \\
\lim\limits_{n\to\infty} E\left[\underbrace{\inf\limits_{k\geq n} X_k}_{\geq 0 \text{ P-fast sicher}} \middle| S_0\right] & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} E[X_k|S_0] \text{ P-fast sicher} \\
E\left[\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} X_k \middle| S_0\right] & \overset{(\inf_{k\geq n} X_k)_n \uparrow}{\leq} & \liminf\limits_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ P-fast sicher}
\end{array}$$

**2. Fall:** Wegen $\forall n \in \mathbb{N}:\ |X_n| \leq Y$ gilt

$$\begin{array}{rl}
& Y \geq 0 \text{ P-fast sicher und } X_n \geq -Y \text{ P-fast sicher} \\
\Rightarrow & X_n + Y \geq 0 \text{ P-fast sicher} \\
& \left|\liminf\limits_{n\to\infty} X_n\right|, \left|\limsup\limits_{n\to\infty} X_n\right| \leq Y \\
\Rightarrow & \liminf\limits_{n\to\infty} X_n, \limsup\limits_{n\to\infty} X_n \in L^1
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{rl}
& E\left[\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} X_k \middle| S_0\right] \\
= & E\left[\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} (X_k + Y - Y) \middle| S_0\right] \text{ P-fast sicher} \\
= & E\left[\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} (X_k + Y) \middle| S_0\right] - E[Y|S_0] \text{ P-fast sicher} \\
\leq & \liminf\limits_{n\to\infty} E[X_n + Y|S_0] - E[Y|S_0] \text{ P-fast sicher} \\
= & \liminf\limits_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ P-fast sicher}
\end{array}$$

**b)**

$$\begin{array}{rcl}
E\left[\limsup\limits_{n\to\infty} X_n \middle| S_0\right] & = & -E\left[\liminf\limits_{n\to\infty}(-X_n) \middle| S_0\right] \text{ P-fast sicher} \\
& \geq & -\liminf\limits_{n\to\infty} E\left[(-X_n)|S_0\right] \text{ P-fast sicher} \\
& = & \limsup\limits_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ P-fast sicher}
\end{array}$$

**c)** Wegen

$$\begin{aligned} E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right] &\leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ P-fast sicher} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ P-fast sicher} \\ &\leq E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right] \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

gilt

$$E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|S_0] \text{ P-fast sicher}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} E\left[\left|E[X_n|S_0] - E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right]\right|\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\left|E\left[X_n - \lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right]\right|\right] \\ &\leq \lim_{n\to\infty} E\left[E\left[\left|X_n - \lim_{n\to\infty} X_n\right| |S_0\right]\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\left|X_n - \lim_{n\to\infty} X_n\right|\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \left|X_n - \lim_{n\to\infty} X_n\right| dP \\ &\overset{|X_n - \lim_{n\to\infty} X_n| \leq 2|Y| \in L^1}{=} \int \lim_{n\to\infty} |X_n - \lim_{n\to\infty} X_n| dP \\ &= \int 0 dP = 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|E[X_n|S_0] - E\left[\lim_{n\to\infty} X_n|S_0\right]\right|\right] = 0$$

■

**Satz 61.8 (Die kleinere abzählbare Algebra gewinnt)**
*Seien $S_0 \subset S_1 \subset S$ und $X \geq 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} E[E[X|S_1]|S_0] &= E[X|S_0] \\ E[E[X|S_0]|S_1] &= E[X|S_0] \end{aligned}$$

**Beweis.** 1.) Sei $Y_0 \geq 0$ $S_0$-messbar. Dann ist $Y_0$ $S_1$-messbar und es gilt

$$\begin{aligned} E\left[Y_0 E[X|S_1]\right] &\overset{Y_0\ S_1-\text{messbar}}{=} E[Y_0 X] \\ &\overset{Y_0\ S_0-\text{messbar}}{=} E[Y_0 E[X|S_0]] \end{aligned}$$

d.h.

$$E\left[E[X|S_1]|S_0\right] = E\left[X|S_0\right]$$

2.) $E[X|S_0]$ ist $S_0$-messbar und somit $S_1$-messbar und

$$E[E[X|S_0]|S_1] = E[X|S_0]\underbrace{E[1|S_1]}_{=1} = E[X|S_0]$$

■

**Satz 61.9** *Sei f konvex und $X \in L^1$. Dann gilt*

$$E[f(X)|S_0] \geq f(E[X|S_0]) \text{ P-fast sicher}$$

**Beweis.** Seien $u_n = a_n x + b_n \in L(f)$ mit

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E[f(X)|S_0] &\geq E[a_n X + b_n|S_0] \text{ P-fast sicher} \\ &= a_n E[X|S_0] + b_n \underbrace{E[1|S_0]}_{=1 \text{ da } P[W]=1} \text{ P-fast sicher} \\ &= u_n(E[X|S_0]) \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} E[f(X)|S_0] &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(E[X|S_0]) \text{ P-fast sicher} \\ &= f(E[X|S_0]) \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

■

**Satz 61.10** *Sei $p \in [1, \infty]$ und $S_0 \subset S$. Für*

$$L^p(W, S, P) \to L^p(W, S, P), X \mapsto E[X|S_0]$$

*gilt*

$$\| E[X|S_0] \|_p \leq \| X \|_p$$

*und die Abbildung ist stetig.*

**Beweis. a)** $p \in [1, \infty)$. Für

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^p$$

gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= px^{p-1} \geq 0 \\ f''(x) &= p(p-1)x^{p-2} \geq 0 \end{aligned}$$

Damit ist f konvex und monoton steigend und es gilt

$$|E[X|S_0]|^p \leq E[|X||S_0]^p \leq E[|X|^p|S_0]$$

und somit

$$E[|E[X|S_0]|^p] \quad \leq \quad E[|X|^p] < \infty$$

Da die p-te Wurzel monoton steigend ist, folgt

$$\begin{aligned} E[|E[X|S_0]|^p]^{\frac{1}{p}} &\leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \\ \| E[X|S_0] \|_p &\leq \| X \|_p \end{aligned}$$

**b)** $p = \infty$:

$$\begin{aligned} |E[X|S_0]| &\leq E[|X| \; |S_0] \\ &\leq E[\| X \|_\infty \; |S_0] \\ &= \| X \|_\infty \\ \| E[X|S_0] \|_\infty &\leq \| X \|_\infty \end{aligned}$$

**c)** Aus $\lim_{n\to\infty} \| X_n - X \|_p = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \| E[X_n|S_0] - E[X|S_0] \|_p &= \lim_{n\to\infty} \| E[X_n - X|S_0] \|_p \\ &\overset{a),b)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \| X_n - X \|_p = 0 \end{aligned}$$

■

**Satz 61.11** *Sei $X \in L^2$. Dann gilt für alle $S_0$-messbaren $Y_0 \in L^2$:*

$$E\left[(X - E[X|S_0])^2\right] \leq E\left[(X - Y_0)^2\right]$$

*und*

$$\begin{aligned} & E\left[(X - E[X|S_0])^2\right] = E\left[(X - Y_0)^2\right] \\ \iff \quad & Y_0 = E[X|S_0] \; \textit{P-fast sicher} \end{aligned}$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
& E\left[(X-E[X|S_0])^2\right]+E[\underbrace{(E[X|S_0]-Y_0)^2}_{\geq 0}] \\
= \; & E\left[X^2\right]-2\underbrace{E\left[XE[X|S_0]\right]}_{=E[E[X|S_0]^2]}+E\left[E[X|S_0]^2\right] \\
& +E\left[E[X|S_0]^2\right]-2\underbrace{E\left[Y_0E[X|S_0]\right]}_{=E[XY_0]}+E\left[Y_0^2\right] \\
= \; & E\left[(X-Y_0)^2\right]
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& E\left[(X-E[X|S_0])^2\right]=E\left[(X-Y_0)^2\right] \\
\iff \; & Y_0=E[X|S_0] \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

■

**Satz 61.12** *Sei $(X_i)_i$ gleichgradig integrierbar und $(S_j)_j$ abzählbare Algebren in $S$ und*

$$X_{i,j}:=E[X_i|S_j]$$

*Dann ist $(X_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ gleichgradig integrierbar.*
*Insbesondere ist für $X\in L^1$ auch $(E[X|S_j])_j$ gleichgradig integrierbar.*

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned}
E[|E[X_i|S_j]|] & \leq E[E[|X_i||S_j]] \\
& \leq E[|X_i|]<\infty
\end{aligned}$$

gilt $X_{i,j}\in L^1$.
Da $X_i$ gleichgradig integrierbar ist, gibt es eine monoton steigende konvexe Funktion $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ mit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$
$$c:=\sup_{i\in I}\int f(|X_i|)dP<\infty$$

d.h.

$$\sup_{i\in I}E[f(|X_i|)]<\infty$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\forall i,j \in I: \; E\left[f(|X_{i,j}|)\right] &\overset{Def}{=} E\left[f(|E[X_i|S_j]|)\right] \\
&\overset{f \text{ monoton steigend}}{\leq} E\left[f(E[|X_i||S_j])\right] \\
&\overset{f \text{ konvex}}{\leq} E\left[E[f(|X_i|)|S_j]\right] \\
&= E\left[f(|X_i|)\right] \\
\sup_{i,j} \int f(|X_{i,j}|)dP &= \sup_{i,j} E[f(|X_{i,j}|)] \\
&\leq \sup_{i \in I} E[f(|X_i|)] \overset{s.o.}{<} \infty
\end{aligned}
$$

ist $(X_{i,j})_{i,j}$ ist gleichgradig integrierbar. ■

# 62. Martingale und Stoppzeiten

Sei $I \subset \mathbb{R}$ abzählbar und $(W, S, P)$ mit einer aufsteigenden Folge $(S_n)_{n\in I}$ von abzählbaren Algebren in S, d.h.

$$\forall m < n : S_m \subset S_n$$

$S_n$ ist die Menge der Ereignisse, die bis zum Zeitpunkt n beobachtbar sind.

**Definition 62.1** *Sei* $\forall n \in \mathbb{N}: \ X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *mit*
*1.)* $X_n$ *ist* $S_n$*-messbar*
*2.)* $\forall n \in \mathbb{N}: \ X_n \in L^1$
*3.)* $(X_n)_n$ *heißt* ***Martingal***

$$\begin{aligned} &\iff \quad E[X_{n+1}|S_n] = X_n \\ &\iff \quad E[X_{n+1} - X_n|S_n] = 0 \end{aligned}$$

$(X_n)_n$ *heißt* ***Submartingal***

$$\begin{aligned} &\iff \quad E[X_{n+1}|S_n] \geq X_n \\ &\iff \quad E[X_{n+1} - X_n|S_n] \geq 0 \end{aligned}$$

$(X_n)_n$ *heißt* ***Supermartingal***

$$\begin{aligned} &\iff \quad E[X_{n+1}|S_n] \leq X_n \\ &\iff \quad E[X_{n+1} - X_n|S_n] \leq 0 \end{aligned}$$

**Beweis.** Da $X_n$ $S_n$-messbar ist, gilt

$$\begin{aligned} E[(X_{n+1} - X_n)|S_n] &= E[X_{n+1}|S_n] - E[X_n|S_n] \\ &= E[X_{n+1}|S_n] - X_n \end{aligned}$$

■

**Satz 62.2** *Aus* $E[X_{n+1}|S_n] =, \geq, \leq X_n$ *folgt*

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ E[X_{n+k}|S_n] =, \geq, \leq X_n$$

**Beweis.** Weil die kleinere abzählbare Algebra gewinnt, gilt

$$\begin{aligned} E[X_{n+k} - X_n|S_n] &= E\left[ \sum_{i=1}^{k} (X_{n+i} - X_{n+i-1}) \middle| S_n \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} E[X_{n+i} - X_{n+i-1}|S_n] \\ &= \sum_{i=1}^{k} E[\underbrace{E[X_{n+i} - X_{n+i-1}|S_{n+i-1}]}_{=,\geq,\leq 0}|S_n] \\ &=, \geq, \leq \quad 0 \end{aligned}$$

■

**Satz 62.3** *Sei* $X \in L^1(W,S,P)$ *und* $(S_n)_n$ *eine aufsteigende Folge von abzählbaren Algebren. Dann ist*

$$X_n := E[X|S_n]$$

*ein Martingal.*

**Beweis.** $X_n$ ist $S_n$ -messbar und $X_n \in L^1$ und da die kleinere abzählbare Algebra gewinnt, gilt

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}|S_n] &\stackrel{\text{Definition}}{=} E[E[X|S_{n+1}]|S_n] \\ &\stackrel{S_n \subset S_{n+1}}{=} E[X|S_n] \\ &= X_n \end{aligned}$$

■

**Satz 62.4** *a) Sind* $X, Y$ *Martingale und* $a, b \in \mathbb{R}$, *so ist* $aX{+}bY$ *ein Martingal.*
*b)* $X$ *ist Supermartingal* $\Longleftrightarrow$ *-*$X$ *ist Submartingal*
*c) Sind* $X, Y$ *Supermartingale und* $a, b \geq 0$ *so ist* $aX + bY$ *Supermartingal*
*d) Sind* $X, Y$ *Supermartingale, so ist*

$$\min(X_n, Y_n)$$

*ein Supermartingal*
*e) Ist* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein Supermartingal und*

$$\exists N \in \mathbb{N}: \ E[X_N] \geq E[X_0]$$

*so gilt*

$$\forall 0 \leq n \leq N: \ E[X_N|S_n] = X_n \ \textit{P-fast sicher}$$

*und* $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ *ist ein Martingal.*
*Gibt es eine Folge* $c_N \to \infty$ *mit* $E[X_{c_N}] \geq E[X_0]$ *so ist* $X$ *ein Martingal.*

**Beweis. a)** $aX_{n+1} + bY_{n+1}$ ist $S_{n+1}$-messbar und in $L^1$

$$\begin{aligned} E[aX_{n+1} + bY_{n+1}|S_n] &= aE[X_{n+1}|S_n] + bE[Y_{n+1}|S_n] \\ &= aX_n + bY_n \end{aligned}$$

**b)**

$$E[X_{n+1}|S_n] \leq X_n \iff E[-X_{n+1}|S_n] \geq -X_{n+1}$$

**c)** $aX_{n+1} + bY_{n+1} \in L^1$ ist $S_{n+1}$-messbar

$$\begin{aligned} E[aX_{n+1} + bY_{n+1}|S_n] &= aE[X_{n+1}|S_n] + bE[Y_{n+1}|S_n] \\ &\overset{a,b\geq 0}{\leq} aX_{n+1} + bY_{n+1} \end{aligned}$$

**d)** Es gilt

$$\begin{aligned} |\min(X_n, Y_n)| &\leq |X_n| + |Y_n| \\ E[|\min(X_n, Y_n)|] &\leq E[|X_n|] + E[|Y_n|] < \infty \\ \min(X_n, Y_n) &\in L^1 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} E[\min(X_{n+1}, Y_{n+1})|S_n] &\leq E[X_{n+1}|S_n] \leq X_n \\ E[\min(X_{n+1}, Y_{n+1})|S_n] &\leq E[Y_{n+1}|S_n] \leq Y_n \end{aligned}$$

gilt

$$E[\min(X_{n+1}, Y_{n+1})|S_n] \leq \min(X_n, Y_n)$$

**e)** Sei $0 \leq n \leq N$. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{Supermartingal}}{\geq} E\left[\underbrace{E[X_N|S_n] - X_n}_{\leq 0}\right] \\ &= E[X_N] - E[X_n] \\ &\overset{E[X_n]\leq E[X_0]}{\geq} E[X_N] - E[X_0] \\ &\overset{Vor}{\geq} 0 \end{aligned}$$

gilt

$$E[X_N|S_n] - X_n = 0 \text{ P-fast sicher}$$
$$X_n = E[X_N|S_n] \text{ P-fast sicher}$$

Da $(E[X_N|S_n])_{n=0}^N$ ein Martingal ist, ist

$$(X_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$$

ein Martingal.
Wegen $\lim_{N\to\infty} c_N = \infty$, gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : E[X_{n+1}|S_n] = X_n$$

und $(X_n)_n$ ist ein Martingal. ■

**Satz 62.5** *Seien $X_n \in L^1(W,S,P)$ $S_n$-messbar. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$X_n = M_n + A_n$$

*in ein Martingal und einen $S_{n-1}$-messbaren Prozess $(A_n)_n$. Diese ist*

$$\begin{aligned} M_n &= X_n - \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|S_{k-1}] \\ A_0 &= 0 \\ A_n &= \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|S_{k-1}] \end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen

$$A_{n-1} \text{ ist } S_{n-2} - \text{messbar} \overset{S_{n-2}\subseteq S_{n-1}}{\Rightarrow} A_{n-1} \text{ ist } S_{n-1} - \text{messbar}$$

und da $(M_n)_n$ ein Martingal werden soll, gilt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{M_n \text{ Martingal}}{=} E[M_n - M_{n-1}|S_{n-1}] \\ &\overset{\text{Definition}}{=} E[X_n - X_{n-1} - A_n + A_{n-1}|S_{n-1}] \\ &\overset{A_n\ S_{n-1}-\text{messbar}}{=} E[X_n - X_{n-1}|S_{n-1}] - A_n + A_{n-1} \end{aligned}$$

Mit $A_0 := 0$ folgt

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + E[X_n - X_{n-1}|S_{n-1}] \\ A_n &= \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|S_{k-1}] \end{aligned}$$

Das ergibt die Formeln für $A_n, M_n$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|S_{k-1}] \text{ ist } S_{n-1}\text{-messbar} \\ M_n &\overset{X_n\in L^1}{=} X_n - \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|S_{k-1}] \in L^1 \text{ ist } S_n\text{-messbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[M_{n+1} - M_n|S_n] &= E[X_{n+1} - X_n - E[X_{n+1} - X_n|S_n]|S_n] \\ &= E[X_{n+1} - X_n|S_n] - E[X_{n+1} - X_n|S_n] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

**Satz 62.6** *a)* $(X_n)_n$ *ist ein* ***Submartingal***
$\iff$ $(A_n)_n$ *ist P-fast sicher monoton wachsend.*
*b)* $(X_n)_n$ *ist ein* ***Supermartingal***
$\iff$ $(A_n)_n$ *ist P-fast sicher monoton fallend.*

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned} & E[X_{n+1} - X_n|S_n] \\ = \quad & \underbrace{E[M_{n+1} - M_n|S_n]}_{=0} + E[A_{n+1} - A_n|S_n] \\ \overset{A_{n+1}\ S_n-\text{messbar}}{=} \quad & A_{n+1} - A_n \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} E[X_{n+1} - X_n|S_n] \geq 0 \text{ P-fast sicher} \quad &\iff \quad A_n \leq A_{n+1} \text{ P-fast sicher} \\ E[X_{n+1} - X_n|S_n] \leq 0 \text{ P-fast sicher} \quad &\iff \quad A_n \geq A_{n+1} \text{ P-fast sicher} \end{aligned}$$

■

Sei $X_0$ das Startkapital und $X_k - X_{k-1}$ der Gewinn bzw. Verlust zum k-ten Zeitpunkt bei Einsatz 1. Sei $V_k$ der Einsatz zum Zeitpunkt k. Bei einem Spiel entscheidet man vorher, wieviel man setzt, d.h. $V_k$ ist $S_{k-1}$-messbar. Nach n Schritten gilt

$$X_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1})$$

**Satz 62.7** *Sei* $(X_n)_n$ *ein Martingal und* $\forall k \in \mathbb{N} : V_k$ $S_{k-1}$*-messbar mit*

$$V_k(X_k - X_{k-1}) \in L^1$$

*Dann ist*

$$X_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1})$$

*ein Martingal.*

**Beweis.** Da $L^1$ ein Vektorraum ist, gilt

$$X_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1}) \in L^1$$

Da $V_k$ $S_{k-1}$-messbar ist und $X_k$ $S_k$-messbar ist, ist $X_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1})$ $S_n$-messbar.

$$E\left[ X_0 + \sum_{k=1}^{n+1} V_k(X_k - X_{k-1}) - X_0 - \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1}) \middle| S_n \right]$$

$$\begin{aligned} &\overset{V_{n+1} S_n\text{-messbar}}{=} && E[V_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|S_n] \\ &= && V_{n+1} \cdot \underbrace{E[X_{n+1} - X_n|S_n]}_{=0,\text{ da Martingal}} \\ &= && 0 \end{aligned}$$

■

**Definition 62.8** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ abzählbar und $(S_n)_{n \in I}$ eine aufsteigende Folge von abzählbaren Algebren in S.*

$$T : (W, S, P) \to I \cup \{\infty\}$$

*heißt **Stoppzeit** $\Longleftrightarrow$ Eine der gleichwertigen Bedingungen gilt:*

$$\begin{aligned} &1.) && \forall n \in I : \{T = n\} \in S_n \\ &2.) && \forall n \in I : \{T \leq n\} \in S_n \end{aligned}$$

*Die Entscheidung für den Stopp soll also nur abhängig sein von den bisher beobachteten Ereignissen $S_n$.*

**Beweis.** "$\Rightarrow$":

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{m \leq n} \underbrace{\{T = m\}}_{\in S_m \subset S_n} \in S_n$$

Da I abzählbar ist, ist die Vereinigung abzählbar.
"$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned} \{T = n\} &= \{T \leq n\} \cap \{T \leq n-1\}^C \\ &= \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in S_n} \cap \underbrace{\{T > n-1\}}_{\in S_{n-1} \subset S_n} \in S_n \end{aligned}$$

■

**Satz 62.9** *Seien $T_1, T_2$ Stoppzeiten. Dann gilt*
*a)* $\max(T_1, T_2)$ *und* $\min(T_1, T_2)$ *sind Stoppzeiten.*
*b)* $\max(T_1, n)$ *und* $\min(T_1, n)$ *sind Stoppzeiten.*
*c) Für $T_2 \geq 0$ ist $T_1 + T_2$ eine Stoppzeit.*
*$T_1 + T_2$ schaut um $T_2$ in die Vergangenheit.*
*d) Im Allgemeinen ist $T_1 - T_2$ keine Stoppzeit.*
*$T_1 - T_2$ schaut um $T_2$ in die Zukunft.*

**Beweis. a)**

$$\{\min(T_1,T_2)\le n\} = \{T_1\le n\}\cup\{T_2\le n\}\in S_n$$
$$\{\max(T_1,T_2)\le n\} = \{T_1\le n\}\cap\{T_2\le n\}\in S_n$$

**b)**

$$\{\min(T_1,n)\le n\} = \{T_1\le n\}\cup\underbrace{\{n\le n\}}_{=W}\in S_n$$
$$\{\max(T_1,n)\le n\} = \{T_1\le n\}\cap\underbrace{\{n\le n\}}_{=W}\in S_n$$

**c)**

$$\begin{aligned}\{T_1+T_2\le n\} \quad &= \quad \bigcup_{k\le n}\underbrace{\{T_1\le n-k\}}_{\in S_{n-k}\subset S_n}\cap\underbrace{\{T_2=k\}}_{\in S_k\subset S_n}\in S_n\\ &\overset{T_2\ge 0}{=} \quad \bigcup_{0\le k\le n}\underbrace{\{T_1\le n-k\}}_{\in S_{n-k}\subset S_n}\cap\underbrace{\{T_2=k\}}_{\in S_k\subset S_n}\in S_n\end{aligned}$$

**d)**

$$\{T_1-m\le n\} = \{T_1\le n+m\}\in S_{n+m}$$

Aber im Allgemeinen ist $S_n \subsetneqq S_{n+m}$, d.h.

$$\{T_1\le n+m\}\notin S_n$$

und $T_1-T_2$ ist keine Stoppzeit. ■

**Satz 62.10** *Seien $X_n$ $S_n$-messbar. Die* ***erste Eintrittszeit*** *in $A\in\mathbb{B}$*

$$T_A(w)=\begin{cases}\min\{n\ge 0: X_n(w)\in A\} & \textit{wenn der Prozess stoppt}\\ \infty & \textit{wenn der Prozess nicht stoppt}\end{cases}$$

*ist eine Stoppzeit.*

**Beweis.** Die erste Eintrittszeit ist

$$\{T_A=n\}=\{X_n\in A\}\cap\underbrace{\{X_{n-1}\in A^C\}}_{\in S_{n-1}\subset S_n}\cap\ldots\cap\underbrace{\{X_0\in A^C\}}_{\in S_0\subset S_n}\in S_n$$

■

**Bemerkung 62.11** *Die letzte Besuchszeit von $A$*

$$L_A(w)=\begin{cases}\max\{n\ge 0: X_n(w)\in A\} & \textit{A wird nur endlich oft besucht}\\ \infty & \textit{A wird unendlich oft besucht}\end{cases}$$

*ist i.a. keine Stoppzeit.*

**Beweis.** Zum Zeitpunkt n kann im Allgemeinen nicht entschieden werden, wann der Prozess die Menge A zum letzten Mal besucht. ■

**Satz 62.12** *Sei $T$ eine Stoppzeit und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal.*

$$\begin{aligned} X_{\min(T,n)} &= X_0 + \sum_{k=1}^{\min(T,n)} (X_k - X_{k-1}) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{n} 1_{\{T\geq k\}}(w)(X_k - X_{k-1})(w) \end{aligned}$$

*heißt das* ***gestoppte Martingal****.*

**Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} \min(T(w),n) = n &\iff T(w) \geq n \\ &\iff \forall\ 1 \leq k \leq n : T(w) \geq k \\ &\iff 1_{T\geq k}(w) = 1 \end{aligned}$$

und für $1 \leq r \leq n$

$$\begin{aligned} \min(T(w),n) = r &\iff T(w) = r \\ &\iff \forall\ 1 \leq k \leq r : T(w) \geq k \\ &\phantom{\iff} \forall\ r+1 \leq k \leq n : T(w) < k \\ &\iff \forall\ 1 \leq k \leq r : 1_{T\geq k}(w) = 1 \\ &\phantom{\iff} \forall\ r+1 \leq k \leq n : 1_{T\geq k}(w) = 0 \end{aligned}$$

Damit sind die Summen gleich:

$$\sum_{k=1}^{\min(T,n)} (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{T\geq k\}}(X_k - X_{k-1})$$

Wegen $\{T \leq k-1\} \in S_{k-1}$ gilt

$$\begin{aligned} 1_{T\geq k} &= 1_{T>k-1} \\ &= 1 - 1_{T\leq k-1} \text{ ist } S_{k-1}\text{-messbar} \end{aligned}$$

und

$$X_0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{1_{\{T\geq k\}}(X_k - X_{k-1})}_{\in L^1} \in L^1$$

ist ein Martingal. ■

**Satz 62.13** *Sei $(X_n)_n$ ein Martingal, $T$ eine Stoppzeit und*

$$X_T = X_0 + \sum_{k=1}^{T}(X_k - X_{k-1})$$

*a) Für*

$$\exists N < \infty : \ P[T \leq N] = 1$$

*gilt*

$$E[X_T] = E[X_0]$$

*b) Ist $\left(X_{\min(T,n)}\right)_n$ gleichgradig integrierbar und $P[T < \infty] = 1$, so gilt*

$$E[X_T] = E[X_0]$$

*c) Sei $(X_n)_n$ ein Supermartingal. Seien $S, T$ Stoppzeiten mit $S \leq T \leq N \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} E[X_S] &\geq E[X_T] \text{ für ein Supermartingal} \\ E[X_S] &\leq E[X_T] \text{ für ein Submartingal} \end{aligned}$$

**Beweis. a)** Da $P[T \leq N] = 1$ gilt

$$X_T = X_{\min(T,N)} \text{ P-fast sicher}$$

Da $X_{\min(T,N)}$ ein Martingal ist, gilt

$$\begin{aligned} E[X_0] &= E[X_{\min(T,N)}] \\ &\overset{X_T = X_{\min(T,N)} \text{ P-f.s.}}{=} E[X_T] \end{aligned}$$

**b)** Sei $w \in \{T < \infty\}$.
Da das Martingal stoppt, bricht die Summe bei $T(w)$ ab.

$$\lim_{n \to \infty} X_{\min(T,n)}(w) = X_T(w) \text{ P-fast sicher}$$

Aber für jedes $w \in \{T < \infty\}$ stoppt es zu einem anderen Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$.
Da $X_{\min(T,n)}$ ein Martingal ist, gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ E[X_0] = E[X_{\min(T,n)}]$$

Mit der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt

$$\begin{aligned} E[X_0] &= \lim_{n \to \infty} E[X_{\min(T,n)}] \\ &\overset{\text{gleichgradig integrierbar}}{=} E\left[\lim_{n \to \infty} X_{\min(T,n)}\right] \\ &\overset{\lim_{n \to \infty} X_{\min(T,n)} = X_T \text{ P-f.s.}}{=} E[X_T] \end{aligned}$$

**c)** Wegen

$$\begin{aligned}
X_S &= X_0 + \sum_{k=1}^{\min(S,N)} (X_k - X_{k-1}) \\
X_T &= X_0 + \sum_{k=1}^{\min(T,N)} (X_k - X_{k-1}) \\
E[X_k - X_{k-1}] &\leq 0 \text{ für ein Supermartingal} \\
E[X_k - X_{k-1}] &\geq 0 \text{ für ein Submartingal}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
E[X_T - X_S] &= \sum_{k=\min(S,N)}^{\min(T,N)} E[X_k - X_{k-1}] \\
E[X_T - X_S] &\leq 0 \text{ für ein Supermartingal} \\
E[X_T - X_S] &\geq 0 \text{ für ein Submartingal}
\end{aligned}$$

■

# 63. Martingal Grenzwertsätze

Sei $(S_n)_n$ eine aufsteigende Familie von abzählbaren Algebren.
Seien $X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ $S_n$-messbar und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Wir untersuchen, wie oft $[a, b]$ von $(X_n)_n$ aufwärts gekreuzt wird.

$$\begin{aligned}
Q_0 &= 0 \\
Q_k(w) &= \min\{n \geq T_{k-1}(w) : X_n(w) \leq a\} \\
T_0 &= 0 \\
T_k(w) &= \min\{n \geq Q_k(w) : X_n(w) \geq b\}
\end{aligned}$$

d.h. $Q_1$ ist der erste Zeitpunkt, zu dem man a unterschreitet.
$T_k$ ist der erste Zeitpunkt, zu dem man b überschreitet, nachdem man zum Zeitpunkt $Q_{k-1}$ a unterschritten hat.
$Q_k$ ist der erste Zeitpunkt zu dem man a unterschreitet, nachdem man zum Zeitpunkt $T_{k-1}$ b überschritten hat.
$(X_n)_n$ hat zwischen $Q_k$ und $T_k$ die k-te Aufkreuzung über $[a, b]$ $\iff$

$$T_k < \infty$$

Die Anzahl Überquerungen von $[a, b]$ im Zeitraum $[0, N]$ in aufsteigender Richtung ist

$$U_{a,b}^N(w) = \max\{k : T_k(w) \leq N\}$$

Die Gesamtzahl aufsteigender Überquerungen von $[a, b]$ ist

$$U_{a,b} = \lim_{N \to \infty} U_{a,b}^N$$

Wird **jedes** Intervall nur endlich oft aufwärts gekreuzt, muss der Prozess einen Grenzwert haben.

**Satz 63.1** *a) $Q_k, T_k$ sind Stoppzeiten.*
*b) Aus $T_{k-1} = \infty$ folgt $Q_k = \infty$*
*c) Aus $Q_k = \infty$ folgt $T_k = \infty$*
*d) $U_{a,b}^N$ ist $S\left(\bigcup_{n=1}^\infty S_n\right)$-messbar.*

**Beweis. a)** Wegen

$$\begin{aligned}
Q_k(w) = j \quad &\iff \quad \min\{n \geq T_{k-1}(w) : \; X_n(w) \leq a\} = j \\
&\iff \quad T_{k-1}(w) = m < j, X_{m+1}(w) > a \\
&\qquad\quad , \ldots, X_{j-1}(w) > a, X_j(w) \leq a
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\{Q_k = j\} &= \underbrace{\{T_{k-1} = m < j\}}_{\in S_m} \cap \underbrace{\{X_{m+1} > a\}}_{\in S_{m+1}} \\ &\quad \cap \ldots \cap \underbrace{\{X_{j-1} > a\}}_{\in S_{j-1}} \cap \underbrace{\{X_j \le a\}}_{\in S_j} \in S_j\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}& T_k(w) = j \\ \iff & \max\{n \ge Q_k(w) : X_n(w) \ge b\} = j \\ \iff & Q_{k-1}(w) = m < j, X_{m+1}(w) < b, \ldots, X_{j-1}(w) < b, X_j(w) \ge b\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\{T_k = j\} &= \underbrace{\{Q_{k-1} = m < j\}}_{\in S_m} \cap \underbrace{\{X_{m+1} < b\}}_{\in S_{m+1}} \\ &\quad \cap \ldots \cap \underbrace{\{X_{j-1} < b\}}_{\in S_{j-1}} \cap \underbrace{\{X_j \ge b\}}_{\in S_j} \in S_j\end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}& T_{k-1} = \infty \\ \Rightarrow\ & Q_k = \inf\{n \ge T_{k-1} : X_n \le a\} = \infty\end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned}& Q_k = \infty \\ \Rightarrow\ & T_k = \inf\{n \ge Q_k : X_n \le a\} = \infty\end{aligned}$$

**d)** Wegen

$$U_{a,b}^N = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k \le N}$$

ist $U_{a,b}^N$ $S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$-messbar. ■

**Satz 63.2** *Sei $(X_n)_n$ ein Supermartingal. Dann gilt*

$$\begin{aligned}a) \qquad & E\left[U_{a,b}^N\right] \le \frac{1}{b-a} E[(X_N - a)^-] \\ b) \qquad & E[U_{a,b}] \le \frac{1}{b-a} \sup_N E[(X_N - a)^-]\end{aligned}$$

*Eventuell sind beide Seiten in b) unendlich.*

**Beweis. a)** Man betrachtet nur die Zeitpunkte, zu denen eine Überquerung stattfindet und zieht die Werte voneinander ab.

$$Z := \sum_{k=1}^{\infty} \left( X_{\min(T_k,N)} - X_{\min(Q_k,N)} \right)$$

Sei $T_{n+1} \geq N > T_n$, d.h. $[a,b]$ wird im Zeitraum $[0,N]$ $n-1$-mal oder $n$-mal gekreuzt.
Für $Q_{n+1} < N$ gilt

$$\begin{aligned} X_{\min(Q_{n+1},N)} - X_{\min(T_{n+1},N)} &= X_{Q_{n+1}} - X_N \\ &\leq a - X_N \end{aligned}$$

Für $Q_{n+1} \geq N$ gilt

$$X_{\min(Q_{n+1},N)} - X_{\min(T_{n+1},N)} \quad = \quad X_N - X_N = 0$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} X_{\min(Q_{n+1},N)} - X_{\min(T_{n+1},N)} &\leq \max(0, -(X_N - a)) \\ &= (X_N - a)^- \end{aligned}$$

Für $m \geq 2$ gilt

$$X_{\min(Q_{n+m},N)} - X_{\min(T_{n+m},N)} = X_N - X_N = 0$$

und die Summe in $Z$ bricht bei $n+1$ ab.
Da bei jeder Überquerung ein Term $\geq (b-a)$ auftritt, gilt

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( X_{\min(T_k,N)} - X_{\min(Q_k,N)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left( X_{\min(T_k,N)} - X_{\min(Q_k,N)} \right) \\ &\geq (b-a) \cdot U_{a,b}^N + X_{\min(T_{n+1},N)} - X_{\min(Q_{n+1},N)} \\ (b-a)U_{a,b}^N &\leq Z + X_{\min(Q_{n+1},N)} - X_{\min(T_{n+1},N)} \\ &\leq Z + (X_N - a)^- \end{aligned}$$

Da $\min(T_k, N) \geq \min(Q_k, N)$ beschränkte Stoppzeiten sind und $(X_n)_n$ ein Supermartingal ist, gilt

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left( E[X_{\min(T_k,N)}] - E[X_{\min(Q_k,N)}] \right)}_{\leq 0} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
E\left[U_{a,b}^N\right] &\leq \underbrace{\frac{E[Z]}{b-a}}_{\leq 0} + \frac{E\left[(X_N-a)^-\right]}{b-a} \\
&\leq \frac{E[(X_N-a)^-]}{b-a}
\end{aligned}$$

**b)** Da $U_{a,b}^N \geq 0$ monoton steigend in $N$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
E[U_{a,b}] &= E\left[\lim_{N\to\infty} U_{a,b}^N\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} E[U_{a,b}^N] \\
&\leq \frac{1}{b-a} \sup_{N\in\mathbb{N}} E[(X_N-a)^-]
\end{aligned}$$

■

**Satz 63.3** *Für ein Supermartingal gilt*

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} E[(X_n-a)^-] < \infty &\iff \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-] < \infty \\
&\iff \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty
\end{aligned}$$

**Beweis. a)** Wegen

$$\begin{aligned}
\forall a \geq 0: \ \max(0,-(X_n-a)) &= a + \max(-a,-X_n) \\
&\leq a + \max(0,-X_n) \\
\forall a < 0: \ \max(0,-(X_n-a)) &= \max(0, a - X_n) \\
&\leq \max(0,-X_n)
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\max(0,-(X_n-a)) &\leq \max(0,-X_n) + |a| \\
(X_n-a)^- &\leq X_n^- + |a|
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\forall a \geq 0: \ \max(0,-X_n) &\leq \max(0,-X_n+a) \\
\forall a < 0: \ \max(0,-X_n) &= \max(a,-X_n+a) - a \\
&\overset{a<0}{\leq} \max(0,-X_n+a) + |a|
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \max(0, -X_n) &\leq \max(0, -X_n + a) + |a| \\ X_n^- &\leq (X_n - a)^- + |a| \end{aligned}$$

d.h. mit $E[|a|] = |a| < \infty$ folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[(X_n - a)^-] < \infty \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-] < \infty$$

**b)** Wegen

$$\begin{aligned} E[X_n^+] - E[X_n^-] &= E[X_n] \\ &\leq E[X_0] = \text{ konstant} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} E[|X_n|] &= E[X_n^+ + X_n^-] \\ &= E[X_n^+] + E[X_n^-] \\ &\leq 2E[X_n^-] + E[X_0] \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} 2E[X_n^-] + E[X_0] < \infty \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_n^- &\leq |X_n| \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-] &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty \end{aligned}$$

d.h.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-] < \infty \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$$

■

**Satz 63.4** *Für ein Supermartingal $(X_n)_n$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-] < \infty$$

*gilt*

1.) $\lim_{n\to\infty} X_n$ *existiert P-fast sicher*

2.) $\lim_{n\to\infty} X_n \in L^1$ *ist* $S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$ *-messbar*

*Insbesondere ist* $\lim_{n\to\infty} X_n$ *fast überall endlich.*

**Beweis. 1.)** Es gilt

$$\begin{array}{rcl}
\underbrace{E[U_{a,b}]}_{\geq 0} & \leq & \frac{1}{b-a}\sup_{n\in\mathbb{N}} E[(X_n-a)^-] \\
& \overset{\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-]<\infty}{<} & \infty \\
P[U_{a,b}=\infty] & = & 0
\end{array}$$

Wenn der Grenzwert nicht existiert, dann gibt es ein Intervall [a,b], das unendlich oft gekreuzt wird, d.h.

$$\begin{array}{rcl}
\left\{\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\right\} & \subset & \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \{U_{a,b}=\infty\} \\
P\left[\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\right] & \leq & P\left[\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \{U_{a,b}=\infty\}\right] \\
& \leq & \sum_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} P\left[U_{a,b}=\infty\right] \\
& = & 0
\end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist Null, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert P-fast sicher}$$

**2.)** Es folgt

$$\begin{array}{rcl}
E\left[\left|\lim_{n\to\infty} X_n\right|\right] & = & E\left[\liminf_{n\to\infty} |X_n|\right] \\
& \leq & \liminf_{n\to\infty} E[|X_n|] \\
& \leq & \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] \\
& \overset{\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-]<\infty}{<} & \infty
\end{array}$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} X_n \in L^1$$

Da alle $X_n$ $S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$-messbar sind, ist der Grenzwert $S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$-messbar.
■

**Satz 63.5** *Ist $(X_n)_n$ ein* ***gleichgradig integrierbares*** *Supermartingal, so* *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} X_n \textit{ existiert P-fast sicher}$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n \in L^1 \textit{ ist } S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) - \textit{messbar}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|X_n - \lim_{n\to\infty} X_n\right|\right] = 0$$

$$E\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

*und*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; X_n = E\left[\lim_{k\to\infty} X_k \middle| S_n\right] \qquad \textit{falls } (X_n)_n \textit{ ein Martingal ist}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; X_n \geq E\left[\lim_{k\to\infty} X_k \middle| S_n\right] \qquad \textit{falls } (X_n)_n \textit{ ein Supermartingal ist}$$

**Beweis. a)** Da X gleichgradig integrierbar ist, gilt

$$\sup_{n\geq 0} E[|X_n|] < \infty$$

und da $(X_n)_n$ ein Supermartingal ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert P-fast sicher}$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n \in L^1 \text{ ist } S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) - \text{messbar}$$

Da $X_n$ gleichgradig integrierbar ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|X_n - \lim_{n\to\infty} X_n\right|\right] = 0$$

$$E\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

**b)** Da $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar ist und $\lim_{n\to\infty} X_n$ P-fast sicher existiert, gilt $\forall A \in S_n$

$$(X_{n+k} 1_A)_k \text{ ist gleichgradig integrierbar}$$

$$\lim_{k\to\infty} X_{n+k} 1_A \text{ existiert P-fast sicher}$$

$$(E\left[X_{n+k}|S_n\right] 1_A)_k \text{ ist gleichgradig integrierbar}$$

$$\lim_{k\to\infty} E\left[X_{n+k}|S_n\right] 1_A \text{ existiert P-fast sicher}$$

und somit

$$\begin{aligned} E\left[\lim_{k\to\infty} E\left[X_{n+k}|S_n\right]1_A\right] &\overset{\text{gleichgradig}}{=} \lim_{k\to\infty} E[E[X_{n+k}|S_n]1_A] \\ &= \lim_{k\to\infty} E[X_{n+k}1_A] \\ &\overset{\text{gleichgradig}}{=} E\left[\lim_{k\to\infty} X_{n+k}1_A\right] \end{aligned}$$

d.h.

$$E\left[\lim_{k\to\infty} X_{n+k}|S_n\right] = \lim_{k\to\infty} E\left[X_{n+k}|S_n\right]$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} E\left[X_{n+1}|S_n\right] &\overset{\text{Supermartingal}}{\leq} X_n \\ \forall k\in\mathbb{N}:\ E\left[X_{n+k}|S_n\right] &\leq X_n \\ \lim_{k\to\infty} E\left[X_{n+k}|S_n\right] &\leq X_n \\ E\left[\lim_{k\to\infty} X_{n+k}|S_n\right] &\leq X_n \\ E\left[\lim_{k\to\infty} X_k|S_n\right] &\leq X_n \end{aligned}$$

■

# 64. Rückwärtsmartingale

**Definition 64.1** *Sei* $(S_n)_{n\leq 0}$ *eine aufsteigende Folge von abzählbaren Algebren in (W,S,P), d.h.*

$$\ldots \subset S_{-1} \subset S_0 \subset S$$

$(M_{-n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *heißt* ***Rückwärtsmartingal*** *bzgl.* $(S_{-n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ $\Longleftrightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}_0:\ M_{-n}$ *ist* $S_{-n}$*-messbar*
$\forall n \in \mathbb{N}_0:\ M_{-n} \in L^1$
$\forall n \in \mathbb{N}:\ E[M_{-n+1}|S_{-n}] = M_{-n}$ *P-fast sicher.*

**Satz 64.2** *Sei* $(M_{-n})_n$ *ein Rückwärtsmartingal. Dann gilt*

$$\begin{array}{ll} a) & \forall n \in \mathbb{N}_0:\ M_{-n} = E[M_0|S_{-n}] \\ b) & (M_{-n})_n \text{ ist gleichgradig integrierbar} \end{array}$$

**Beweis. a)** Weil die kleinere abzählbare Algebra gewinnt, gilt

$$\begin{aligned} E[M_0|S_{-n}] - M_{-n} &= E[M_0 - M_{-n}|S_{-n}] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{0-i} - M_{-1-i})\middle| S_{-n}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[M_{0-i} - M_{-1-i}|S_{-n}\right] \\ &\overset{S_{-n}\subset S_{-1-i}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} E\left[E[M_{0-i} - M_{-1-i}|S_{-1-i}]|S_{-n}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\underbrace{M_{-1-i} - M_{-1-i}}_{=0}|S_{-n}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

**b)** Wir haben schon gezeigt: $(E[M_0|S_{-n}])_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar.
■

Sei $a < b$ und $N \in \mathbb{N}$.
$U_{a,b}^{-N}$ ist die Anzahl Aufwärtskreuzungen von $(X_n)_n$ über $[a, b]$ zwischen den Zeiten $-N$ und $0$ und

$$U_{a,b} := \lim_{N\to\infty} U_{a,b}^{-N}$$

**Satz 64.3** *Sei $(M_{-n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Rückwärtsmartingal. Dann gilt*

$$\lim_{n\to-\infty} M_{-n} \text{ existiert } P\text{-fast sicher}$$
$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|M_{-n} - \lim_{n\to\infty} M_{-n}\right|\right] = 0$$
$$E\left[\lim_{n\to\infty} M_{-n}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[M_{-n}\right]$$
$$\lim_{n\to\infty} M_{-n} = E[M_0|S_{-\infty}] \text{ } P\text{-fast sicher mit } S_{-\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_{-n}$$

**Beweis.** Da $U_{a,b}^{-N}$ monoton steigend in $N$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
E\left[U_{a,b}\right] &= E\left[\lim_{N\to\infty} U_{a,b}^{-N}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} E\left[U_{a,b}^{-N}\right] \\
&\leq \frac{1}{b-a} E[(M_0 - a)]^- < \infty \\
P[U_{a,b} < \infty] &= 1
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left\{\liminf_{n\to\infty} M_{-n} < \limsup_{n\to\infty} M_{-n}\right\} &\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \{U_{a,b} < \infty\} \\
P\left[\liminf_{n\to\infty} M_{-n} < \limsup_{n\to\infty} M_{-n}\right] &\leq \sum_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} P\left[U_{a,b} < \infty\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} M_{-n} \text{ existiert P-fast sicher}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\lim_{n\to\infty} M_{-n}\right|\right] &= E\left[\left|\liminf_{n\to\infty} M_{-n}\right|\right] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} E\left[|M_{-n}|\right] \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[|M_{-n}|\right] < \infty
\end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} M_n \in L^1$$

Wegen $M_{-n} = E[M_0|S_{-n}]$ ist $(M_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar und mit $\lim_{n\to\infty} M_n \in L^1$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E\left[\left|M_{-n} - \lim_{n\to\infty} M_{-n}\right|\right] &= 0\\ E\left[\lim_{n\to\infty} M_{-n}\right] &= \lim_{n\to\infty} E\left[M_{-n}\right]\end{aligned}$$

Für $A \in S_\infty$ gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ A \in S_{-n}$$

und somit

$$\begin{aligned}E\left[\lim_{n\to\infty} M_{-n}1_A\right] &\overset{\text{gleichgradig}}{=} \lim_{n\to\infty} E[M_{-n}1_A]\\ &= \lim_{n\to\infty} E[E[M_0|S_{-n}]1_A]\\ &\overset{A\in S_{-n}}{=} \lim_{n\to\infty} E[E[M_0 1_A|S_{-n}]]\\ &= \lim_{n\to\infty} E[M_0 1_A]\\ &= E[M_0 1_A]\end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} M_{-n} = E[M_0|S_{-\infty}]$$

■

# 65. Ein starkes Gesetz der großen Zahlen

**Definition 65.1** *Seien*

$$\begin{aligned}
S_\infty &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} S\left(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\right) \\
Q(n) &:= \{r : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \textit{ umkehrbar } : \ \forall k > n : \ r(k) = k\} \\
& \quad\ T_r : \{\textit{Folgen}\} \to \{\textit{Folgen}\}, (x_n)_n \mapsto (x_{r(n)})_n \\
S_{a,n} &= \left\{A \in S\left((X_n)_n\right) \mid \forall r \in Q(n) : T_r^{-1}(A) = A\right\} \\
S_a &= \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{a,n}
\end{aligned}$$

**Satz 65.2**

*a)* $S_\infty, S_{a,n}, S_a$ *sind abzählbare Algebren*

*b)* $Q(n) \subset Q(n+1)$

*c)* $S_{a,n+1} \subset S_{a,n}$

*d)* $S_\infty \subset S_a$

**Beweis. a)** Wegen

$$\begin{aligned}
T_r^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
T_r^{-1}\left(A^C\right) &= T_r^{-1}(A)^C \\
T_r^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T_r^{-1}\left(A_n\right)
\end{aligned}$$

ist $S_{a,n}$ eine abzählbare Algebra.
Der Schnitt abzählbarer Algebren ist eine abzählbare Algebra.
**b)**

$$\begin{aligned}
& r \in Q(n) \\
\Rightarrow\ & r : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist umkehrbar und } \forall k > n : \ r(k) = k \\
\Rightarrow\ & r : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist umkehrbar und } \forall k > n+1 : \ r(k) = k \\
\Rightarrow\ & r \in Q(n+1) \\
\Rightarrow\ & Q(n) \subset Q(n+1)
\end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned}
& \forall A \in S(X_n)_n \ \forall r \in Q(n+1) : \ T_r^{-1}(A) = A \\
\Rightarrow\ & \forall A \in S(X_n)_n \ \forall r \in Q(n) : \ T_r^{-1}(A) = A \\
\Rightarrow\ & (A \in S_{a,n+1} \Rightarrow A \in S_{a,n})
\end{aligned}$$

**d)** Da $r \in Q(n)$ nur die ersten $n$ $X_i$ vertauscht, gilt

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : S(X_{n+1}, \ldots) &\subset S_{a,n} \\ S_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} S(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) &\subset S_{a,n} \end{aligned}$$

■

**Satz 65.3** *Für* $Y : (W, S((X_n)_n)) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *gilt*

$$\begin{aligned} Y \textit{ ist } S_{a,n}\textit{-messbar} &\iff \forall r \in Q(n) : Y = Y \circ T_r \\ Y \textit{ ist } S_a\textit{-messbar} &\iff \forall r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Q(n) : Y = Y \circ T_r \end{aligned}$$

**Beweis. a)** "$\Leftarrow$": Sei $r \in Q(n)$ und $A \in \mathcal{B}$. Wegen

$$T_r^{-1}(Y^{-1}(A)) = (Y \circ T_r)^{-1}(A) \overset{Y=Y\circ T_r}{=} Y^{-1}(A) \in S((X_n)_n)$$

gilt

$$Y^{-1}(A) \in S_{a,n}$$

"$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} & Y \text{ ist } S_{a,n} - \text{messbar} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \forall A \in \mathbb{B}: \ Y^{-1}(A) \in S((X_n)_n) \\ \forall r \in Q(n): \ T_r^{-1}(Y^{-1}(A)) = Y^{-1}(A) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \forall A \in \mathbb{B}: \ Y^{-1}(A) \in S((X_n)_n) \\ \forall r \in Q(n): \ (Y \circ T_r)^{-1}(A) = Y^{-1}(A) \end{cases} \\ \Rightarrow & \ \forall r \in Q(n): \ Y \circ T_r = Y \text{ auf } S((X_n)_n) \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned} Y \text{ ist } S_a\text{-messbar} &\iff \forall n \in \mathbb{N}: \ Y \text{ ist } S_{a,n}\text{-messbar} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} \ \forall r \in Q(n) : Y = Y \circ T_r \\ &\iff \forall r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Q(n) : Y = Y \circ T_r \end{aligned}$$

■

**Satz 65.4** *Seien* $X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ***unabhängig*** *mit*

$$\forall i, j \in \mathbb{N}: \ P[X_i^{-1}(\cdot)] = P[X_j^{-1}(\cdot)]$$

*Dann gilt für* $P = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} P[X_n^{-1}(\cdot)]$ *auf* $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} W_n, \otimes_{n\in\mathbb{N}} S_n\right)$

$$\forall r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Q(n): \ P[(\cdot)] = P\left[T_r^{-1}(\cdot)\right]$$

**Beweis.** Sei $n \in \mathbb{N}, r \in Q(n)$. Für $B_i \in S(X_i)$ gilt

$$\begin{aligned}
& P[B_1 \times \ldots \times B_n \times W_{n+1} \times \ldots] \\
\overset{\text{Produktmaß}}{=} & \prod_{i=1}^{n} P[X_i^{-1}(B_i)] \\
\overset{P[X_{r(i)}^{-1}(\cdot)]=P[X_i^{-1}(\cdot)]}{=} & \prod_{i=1}^{n} P[X_i^{-1}(B_{r(i)})] \\
= & P[B_{r(1)} \times \ldots \times B_{r(n)} \times W_{n+1} \times \ldots]
\end{aligned}$$

Da die $B_1 \times \ldots \times B_n$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von

$$\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} S_n = S\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigotimes_{i=0}^{n} S_i \times W_{n+1} \times \ldots\right)\right)$$

sind, gilt

$$P[(\cdot)] = P\left[T_r^{-1}(\cdot)\right]$$

■

**Satz 65.5** *Sei $Y \in L^1(W, S(X_n), P)$ und*

$$\forall r \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q(n) : P[(\cdot)] = P\left[T_r^{-1}(\cdot)\right]$$

*Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
E[Y|S_{a,n}] &= \frac{1}{n!} \sum_{r \in Q(n)} Y \circ T_r \text{ } P\text{-fast sicher} \\
E[Y|S_a] &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} \sum_{r \in Q(n)} Y \circ T_r \text{ } P\text{-fast sicher} \\
0 &= \lim_{n \to \infty} E\left[\left|E[Y|S_a] - \frac{1}{n!} \sum_{r \in Q(n)} Y \circ T_r\right|\right]
\end{aligned}$$

**Beweis. a)** Sei $q \in Q(n)$. Da

$$H_q : Q(n) \to Q(n), r \mapsto r \circ q$$

umkehrbar ist durch

$$H_{q^{-1}} : Q(n) \to Q(n), r \mapsto r \circ q^{-1}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} Y\circ T_r\circ T_q &= \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} Y\circ T_{r\circ q}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{r\circ q\in Q(n)} Y\circ T_{r\circ q}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} Y\circ T_r
\end{aligned}$$

und $\frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} Y\circ T_r$ ist $S_{a,n}$-messbar.
Sei $Z_n \geq 0$ $S_{a,n}$ messbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& E\left[\left(\frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} Y\circ T_r\right) Z_n\right]\\
\overset{Z_n\ S_{a,n}-\text{messbar}}{=} & \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} E\left[\left(Y\circ T_r\right) Z_n\circ T_r\right]\\
= & \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} E[(Y\cdot Z_n)\circ T_r]\\
= & \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} \int (Y\cdot Z_n)\circ T_r dP[(\cdot)]\\
= & \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} \int (Y\cdot Z_n) dP[T_r^{-1}(\cdot)]\\
\overset{P[T_r^{-1}(\cdot)]=P[(\cdot)]}{=} & \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} \int (Y\cdot Z_n) dP[(\cdot)]\\
= & \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} E[YZ_n]\\
= & E[YZ_n]
\end{aligned}$$

d.h.

$$E\left[Y|S_{a,n}\right] = \frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} Y\circ T_r$$

**b)** Seien $S_{-n} = S_{a,n}$ und $M_{-n} = E[Y|S_{a,n}]$.
Da die kleinere abzählbare Algebra gewinnt, gilt

$$\begin{aligned} E\left[M_{-n+1}|S_{-n}\right] &\overset{\text{Def}}{=} E\left[E\left[Y|S_{a,n-1}\right]|S_{a,n}\right] \\ &\overset{S_{a,n}\subset S_{a,n-1}}{=} E\left[Y|S_{a,n}\right] \\ &= M_{-n} \end{aligned}$$

und $(M_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Rückwärtsmartingal bzgl $S_{-n}$. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} E[Y|S_{a,n}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r\in Q(n)} Y \circ T_r \text{ existiert P-fast sicher}$$

$$E[Y|S_a] = E\left[Y \,\middle|\, \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{a,n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r\in Q(n)} Y \circ T_r \in L^1 \text{ P-fast sicher}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} E\left[\left|E[Y|S_a] - \frac{1}{n!} \sum_{r\in Q(n)} Y \circ T_r\right|\right]$$

■

**Satz 65.6** *Seien* $X_i : (W,S,P) \to (\mathbb{R},\mathbb{B})$, $X_i \in L^1$ ***unabhängig*** *mit* $\forall i,j$ : $P[X_i^{-1}(\cdot)] = P[X_j^{-1}(\cdot)]$. *Dann gilt*

$$Y_{-n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \textit{ ist ein Rückwärtsmartingal bzgl } S_{-n} := S_{a,n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E[X_1|S_a] \in L^1 \textit{ P-fast sicher}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E[X_1|S_a]\right|\right] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E[X_1|S_\infty] \textit{ P-fast sicher}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E[X_1] \textit{ P-fast sicher}$$

**Beweis.** Wegen

$$\begin{aligned}
Y_{-n} \circ T_r &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{r(i)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&= Y_{-n}
\end{aligned}$$

ist $Y_{-n}$ ist $S_{-n} = S_{a,n}$-messbar. Sei

$$t_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \begin{cases} i \mapsto n \\ n \mapsto i \\ k \mapsto k & \text{für } k \notin \{i, n\} \end{cases}$$

Dann gilt $t_i \in Q(n)$ und da

$$H_{t_i} : Q(n) \to Q(n), r \mapsto r \circ t_i$$

umkehrbar ist durch

$$H_{t_i^{-1}} : Q(n) \to Q(n), r \mapsto r \circ t_i^{-1}$$

gilt

$$\forall 1 \leq i \leq n : \sum_{r \in Q(n)} X_{r(n)} = \sum_{r \in Q(n)} X_{r \circ t_i(n)} = \sum_{r \in Q(n)} X_{r(i)}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
& E\left[Y_{-(n-1)} | S_{-n}\right] \\
\overset{\text{Def}}{=} \; & E\left[ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i \middle| S_{a,n} \right] \\
= \; & \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E\left[ X_i | \, S_{a,n} \right] \\
= \; & \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n!} \sum_{r \in Q(n)} X_i \circ T_r \\
= \; & \frac{1}{n-1} \frac{1}{n!} \sum_{r \in Q(n)} \sum_{i=1}^{n-1} X_{r(i)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= && \frac{1}{n-1}\frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)}\sum_{i=1}^{n} X_{r(i)} - \frac{1}{n-1}\frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} X_{r(n)} \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} && \frac{1}{n-1}\frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)} Y_{-n}\circ T_r - \frac{1}{n-1}\frac{1}{n!}\sum_{r\in Q(n)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{r(i)} \\
&= && \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n(n-1)}\right) E\left[Y_{-n}|S_{a,n}\right] \\
&\overset{Y_{-n}\ S_{a,n}-\text{messbar}}{=} && \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = Y_{-n}
\end{aligned}
$$

und $(Y_{-n})_n$ ist ein Rückwärtsmartingal bzgl. $S_{-n} = S_{a,n}$. Deshalb gilt

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E\left[X_1 \,\middle|\, \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{-n}\right] = E[X_1|S_a] \in L^1 \text{ P-fast sicher} \\
&\lim_{n\to\infty} E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E[X_1|S_a]\right|\right] = 0
\end{aligned}
$$

Wir haben im Kapitel zum 0-1-Gesetz gezeigt, da die $X_n$ unabhängig sind

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ist } S_\infty - \text{messbar und P-fast sicher konstant}
$$

Wegen

$$
E[E[X_1|S_\infty]] = E[X_1]
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& && \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
&\overset{S_\infty-\text{messbar}}{=} && E\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, S_\infty\right] \\
&= && E\left[E\left[X_1|S_a\right]|S_\infty\right] \\
&\overset{S_\infty\subseteq S_a}{=} && E[X_1|S_\infty] \\
&= && E[X_1] \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}
$$

■

# Teil VI.
# Die Brownsche Bewegung

## 66. Maße auf überabzählbaren Produkträumen

Sei im ganzen Kapitel $T \neq \emptyset$ und $\forall t \in T : (W_t, S_t)$ gegeben.

**Definition 66.1** *a) Das Produkt der* $(W_t)_{t \in T}$ *ist*

$$W_T := \prod_{t \in T} W_t = \{(w_t)_{t \in T} : w_t \in W_t\}$$

*b) Setze*

$$\begin{array}{rl} & pr_t : W_T \to W_t, (w_t)_{t \in T} \mapsto w_t \\ \forall K \subset T : & pr_K : W_T \to W_K, (w_t)_{t \in T} \mapsto (w_t)_{t \in K} \\ \forall K \subset L \subset T : & pr_K^L : W_L \to W_K, (w_t)_{t \in L} \mapsto (w_t)_{t \in K} \end{array}$$

**Satz 66.2** *Für* $J \subset K \subset L \subset T$ *gilt*

$$\begin{aligned} pr_J &= pr_J^K \circ pr_K \\ pr_J^L &= pr_J^K \circ pr_K^L \end{aligned}$$

**Beweis.** a) Für $A \in W_T$ gilt

$$\begin{aligned} pr_K(A) &= \{(w_t)_{t \in K} : (w_t)_{t \in T} \in A\} \\ pr_J^K \circ pr_K(A) &= \{(w_t)_{t \in J} : (w_t)_{t \in K} \in pr_K(A)\} \\ &= \{(w_t)_{t \in J} : (w_t)_{t \in T} \in A\} \\ &= pr_J(A) \end{aligned}$$

b) Für $A \in W_T$ gilt

$$\begin{aligned} pr_K^L(A) &= \{(w_t)_{t \in K} : (w_t)_{t \in L} \in A\} \\ pr_J^K \circ pr_K^L(A) &= \left\{(w_t)_{t \in J} : (w_t)_{t \in K} \in pr_K^L(A)\right\} \\ &= \{(w_t)_{t \in J} : (w_t)_{t \in L} \in A\} \\ &= pr_J^L(A) \end{aligned}$$

■

**Definition 66.3** *a) Die* ***Produkt abzählbare Algebra*** *ist die kleinste abzählbare Algebra, sodaß alle* $pr_t$ *messbar sind:*

$$S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(S_t)\right) = \bigotimes_{t\in T} S_t$$

*b) Der* ***Produktraum*** *ist definiert als*

$$\left(\times_{t\in T} W_t, \bigotimes_{t\in T} S_t\right)$$

**Satz 66.4** *Dann gilt*

$$\bigotimes_{t\in T} S_t = \left\{A \subset W_T : \exists T_A \subset T \text{ abzählbar mit } A \in pr_{T_A}^{-1}\left(\bigotimes_{t\in T_A} S_t\right)\right\}$$

*Ist* $T$ *überabzählbar, heißt das:*
*Jedes Element aus* $\bigotimes_{t\in T} S_t$ *wird durch abzählbar viele Komponenten festgelegt, die anderen Komponenten sind* $W_t$*.* ***Eine Teilmenge, zu deren Beschreibung man überabzählbar viele Komponenten benötigt, ist nicht*** $\bigotimes_{t\in T} S_t$ ***messbar.*** *Insbesondere sind die* ***Punkte*** $(w_t)_{t\in T}$ ***nicht*** $\bigotimes_{t\in T} S_t$ ***messbar.***

**Beweis.** Sei

$$\hat{S} = \left\{A \subset W_T \,\middle|\, \exists\, T_A \subset T \text{ abzählbar mit } A \in pr_{T_A}^{-1}\left(\bigotimes_{t\in T_A} S_t\right)\right\}$$

**a)** $\hat{S}$ **ist abzählbare Algebra:**
Sei $t_0 \in T$. $\{t_0\}$ ist abzählbar und es gilt

$$\begin{aligned} (W_t)_{t\in T} &= pr_{t_0}^{-1}(W_{t_0}) \in \hat{S} \\ \emptyset &= pr_{t_0}^{-1}(\emptyset) \in \hat{S} \end{aligned}$$

Sei $A = pr_{T_A}^{-1}(A') \in \hat{S}$. Dann gilt

$$A^C = pr_{T_A}^{-1}(A')^C = pr_{T_A}^{-1}\left(\underbrace{A'^C}_{\in \bigotimes_{t\in T_A} S_t}\right) \in \hat{S}$$

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\hat{S}$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_{A_i}$ abzählbar.

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcup_{i=1}^{\infty} pr_{T_{A_i}}^{-1}(A_i') \\
&= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left( pr_{T_{A_i}}^{T_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \circ pr_{T_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \right)^{-1} (A_i') \\
&= pr_{T_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}}^{-1} \left( \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \left( pr_{T_{A_i}}^{T_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \right)^{-1} (A_i')}_{\in \bigotimes_{t\in\bigcup_{i=1}^{\infty} T_{A_i}} S_t} \right)
\end{aligned}$$

**b)** "$\subset$": Wegen

$$\begin{aligned}
\forall t \in T : pr_t^{-1}(S_t) &\subset \hat{S} \\
\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(S_t) &\subset \hat{S} \\
\bigotimes_{t\in T} S_t = S\left( \bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(S_t) \right) &\subset \hat{S}
\end{aligned}$$

**c)** "$\supset$": Sei $A \in \hat{S}$.
Für $t \in T_A$ mit $A_t \in S_t$ gilt

$$\begin{aligned}
pr_t^{-1}(A_t) &= pr_{T_A}^{-1}\left( \left( pr_t^{T_A} \right)^{-1} (A_t) \right) \\
&\in pr_{T_A}^{-1}\left( \bigotimes_{t\in T_A} S_t \right)
\end{aligned}$$

Ein Erzeugendensystem von $\bigotimes_{t\in T_A} S_t$ ist

$$\bigcup_{t\in T_A} \left( pr_t^{T_A} \right)^{-1} (S_t)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& pr_{T_A}^{-1}\left( \bigcup_{t\in T_A} \left( pr_t^{T_A} \right)^{-1} (S_t) \right) \\
=\ & \bigcup_{t\in T_A} pr_t^{-1}(S_t)
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$S\left(\bigcup_{t\in T_A} pr_t^{-1}(S_t)\right) = pr_{T_A}^{-1}\left(\bigotimes_{t\in T_A} S_t\right)$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{t\in T} S_t &= S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(S_t)\right) \\
&\supset S\left(\bigcup_{t\in T_A} pr_t^{-1}(S_t)\right) \\
&= pr_{T_A}^{-1}\left(\bigotimes_{t\in T_A} S_t\right)
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
A &\in \bigotimes_{t\in T} S_t \\
\hat{S} &\subset \bigotimes_{t\in T} S_t
\end{aligned}$$

■

**Satz 66.5** *Für $J \subset K$ sind $pr_J, pr_j, pr_J^K$ messbar bzgl. der Produkträume.*

**Beweis.** Zeige es auf dem Erzeugendensystem von $\bigotimes_{t\in J} S_t$.

$$\begin{aligned}
(pr_J^K)^{-1}(A_1 \times \ldots \times A_J) &= A_1 \times \ldots \times A_J \times (W_t)_{t\in K\setminus J} \\
&\in \bigotimes_{t\in K} S_t \\
pr_j^{-1}(A_j) &\in \bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(S_t) \subset \bigotimes_{t\in T} S_t \\
pr_J^{-1}(A_1 \times \ldots \times A_J) &= \bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(A_j) \\
&\in S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(S_t)\right)
\end{aligned}$$

■

**Definition 66.6** $\forall 0 < |J| < \infty, J \subset T$ *seien $P_J$ Maße auf*

$$\left(\times_{t\in J} W_t, \bigotimes_{t\in J} S_t\right)$$

*gegeben. Die Familie*

$$\{P_J : 0 < |J| < \infty, J \subset T\}$$

*heißt* ***verträglich*** $\iff$

$$\forall J \subset K, 0 < |J|, |K| < \infty : P_J[\cdot] = P_K\left[(pr_J^K)^{-1}(\cdot)\right]$$

**Satz 66.7** *Sei $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(W, S)$. Dann ist die Familie*

$$P_J := P\left[pr_J^{-1}(\cdot)\right]$$

*verträglich.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
P_J &\overset{\text{Def.}}{=} P\left[pr_J^{-1}(\cdot)\right] \\
&= P\left[\left(pr_J^K \circ pr_K\right)^{-1}(\cdot)\right] \\
&= P\left[pr_K^{-1} \circ \left(pr_J^K\right)^{-1}(\cdot)\right] \\
&\overset{\text{Def.}}{=} P_K\left[(pr_J^K)^{-1}(\cdot)\right]
\end{aligned}$$

■

Diese Eigenschaft genügt schon, dass ein P existiert.

**Satz 66.8** *Sei $(W_t, S_t) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$.*

$$\begin{aligned}
Z_J &:= \left\{\sum_{k=1}^{N}(a_k, b_k]_J : a_k, b_k \in \mathbb{R}^{|J|}, N \in \mathbb{N}\right\} \\
Z &:= \bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)
\end{aligned}$$

*sind Ringe auf $W_J$ und $W_T$ und es gilt*

$$S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(\mathbb{B})\right) = S\left(\bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)\right)$$

**Beweis. a)** $Z_J$ ist ein Ring: Das haben wir bei der Konstruktion von $\mathbb{B}^p$ gezeigt.
**b)** $pr_J^{-1}(Z_J)$ ist ein Ring: Da die Abbildung $pr_J^{-1}$ Vereinigung und Komplemente erhält.

**c)** Für $B, C \in \bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)$ gibt es $J, K \subset T$ mit $B \in Z_J, C \in Z_K$. Für

$$L := K \cup J$$

gilt

$$\begin{array}{rcl} |L| \leq |K| + |J| & < & \infty \\ B, C & \in & Z_L \\ B + C, B \backslash C, B \cap C & \in & Z_L \end{array}$$

und Z ist ein Ring.
**d)** "$\subset$": Da $pr_t^{-1}$ mit ${}^C, \bigcup_{i=1}^{\infty}$ verträglich ist, gilt

$$\begin{array}{rcl} pr_t^{-1}(Z_t) & \in & S\left(\bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)\right) \\ pr_t^{-1}(S(Z_t)) & \in & S\left(\bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)\right) \\ S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(\mathbb{B})\right) & \subset & S\left(\bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)\right) \end{array}$$

"$\supset$":

$$\begin{array}{rcl} pr_J^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k, b_k]_J\right) & = & \sum_{k=1}^{N} pr_J^{-1}(a_k, b_k]_J \\ & = & \sum_{k=1}^{N} \bigcup_{j\in J} pr_j^{-1} pr_j^{J-1}(a_k, b_k] \\ & \in & S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(B)\right) \\ pr_J^{-1}(Z_J) & \subset & S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(\mathbb{B})\right) \\ S\left(\bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)\right) & \subset & S\left(\bigcup_{t\in T} pr_t^{-1}(\mathbb{B})\right) \end{array}$$

■
Wenn ein Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, muss gelten

$$\forall J \subset T, 0 < |J| < \infty \ \forall A \in \bigotimes_{j\in J} S_j : P\left[pr_J^{-1}(A)\right] = P_J[A]$$

Das darf nicht von der Darstellung abhängen.

**Satz 66.9**

$$P_0 : \bigcup_{J \subset T, 0 < |J| < \infty} pr_J^{-1}(Z_J) \to \mathbb{R}, A \in pr_J^{-1}(Z_J) \mapsto P_J[A]$$

*ist definiert.*

**Beweis.** Sei

$$\begin{aligned} A &\in Z_J \\ B &\in Z_K \\ pr_J^{-1}(A) &= pr_K^{-1}(B) \end{aligned}$$

**a)** Sei $J \subset K$. Aus

$$\begin{aligned} pr_K^{-1}(B) &= B \times (W_t)_{t \in T \setminus K} \\ pr_J^{-1}(A) &= pr_K^{-1}\left(\left(pr_J^K\right)^{-1}(A)\right) \\ &= \left(pr_J^K\right)^{-1}(A) \times (W_t)_{t \in T \setminus K} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} B &= \left(pr_J^K\right)^{-1}(A) \\ P_K[B] &= P_K\left[\left(pr_J^K\right)^{-1}(A)\right] \\ &\overset{\text{verträglich}}{=} P_J[A] \end{aligned}$$

**b)** Seien $J, K \subset T$ endlich. Für

$$L := J \cup K$$

gilt

$$\begin{aligned} pr_K^{-1}(B) &= B \times (W_t)_{t \in J \setminus K} \times (W_t)_{t \in T \setminus (K \cup J)} \\ pr_J^{-1}(A) &= A \times (W_t)_{t \in K \setminus J} \times (W_t)_{t \in T \setminus (K \cup J)} \end{aligned}$$

und mit a) folgt

$$P_J[A] = P_L[C] = P_K[B]$$

■

**Satz 66.10** $P_0$ *ist additiv auf* $Z = \bigcup_{0 < |J| < \infty} pr_J^{-1}(Z_J)$

**Beweis. 1.)** $P_0[\emptyset] = P_J[\emptyset] = 0$.
**2.)** $P_0[W_T] = P_{t_0}[W_{t_0}] = 1$
**3.)** $P_0[A] = P_J[A] \geq 0$.
**4.)** Seien $C_1, C_2 \in Z$ mit $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

$$\begin{array}{rcl} \exists |J| < \infty : \ C_1 & = & pr_J^{-1}(A) \text{ und } A \in Z_J \\ \exists |K| < \infty : \ C_2 & = & pr_J^{-1}(B) \text{ und } B \in Z_K \\ C_1 + C_2 & = & pr_{J\cup K}^{-1}(\underbrace{A \times (W_t)_{t \in J\setminus K}}_{=A'}) + pr_{J\cup K}^{-1}(\underbrace{B \times (W_t)_{t\in K\setminus J}}_{=B'}) \\ & = & pr_{J\cup K}^{-1}(A' + B') \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{array}{rcl} P_0[C_1 + C_2] & = & P_{J\cup K}[A' + B'] \\ & = & P_{J\cup K}[A'] + P_{J\cup K}[B'] \\ & = & P_0[C_1] + P_0[C_2] \end{array}$$

■

**Satz 66.11** *$P_0$ ist auf dem Ring $Z = \bigcup_{0<|J|<\infty} pr_J^{-1}(Z_J)$ abzählbar additiv.*

**Beweis.** Sei

$$\left( pr_{J_n}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N_n} (a_k, b_k]_{J_n} \right) \right)_n$$

monoton fallend. Dann gilt $J_n \subset J_{n+1}$. Sei

$$r \quad := \quad \lim_{n\to\infty} P_0 \left[ pr_{J_n}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N_n} (a_k, b_k]_{J_n} \right) \right] > 0$$

Zeige:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} pr_{J_n}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N_n} (a_k, b_k]_{J_n} \right) \neq \emptyset$$

Da $P_{J_n}$ stetig von unten ist, gilt

$$\begin{array}{rcl} P_{J_n} \left[ \sum_{k=1}^{N_n} (a_k, b_k]_{J_n} \right] & = & P_{J_n} \left[ \bigcup_{k_{J_n}=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_n} \left[ a_k + \frac{1}{k_{J_n}}, b_k \right]_{J_n} \right] \\ & = & \lim_{k_{J_n}\to\infty} P_{J_n} \left[ \sum_{k=1}^{N_n} \left[ a_k + \frac{1}{k_{J_n}}, b_k \right]_{J_n} \right] \end{array}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} P_{J_n}\left[\sum_{k=1}^{N_n}\left(a_k, a_k+\frac{1}{k_{J_n}}\right)_{J_n}\right] &= 0 \\
\forall n\ \exists k_{J_n} : P_{J_n}\left[\sum_{k=1}^{N_n}\left(a_k, a_k+\frac{1}{k_{J_n}}\right)_{J_n}\right] &< \frac{r}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Durch

$$\left(\bigcap_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}}, b_k\right]_{J_i}\right)\right)_n$$

erhalten wir eine monoton fallende Folge und es gilt

$$\begin{aligned}
& pr_{J_n}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n}(a_k, b_k]_{J_n}\right) \setminus \bigcap_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}}, b_k\right]_{J_i}\right) \\
= \quad & pr_{J_n}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n}(a_k, b_k]_{J_n}\right) \\
& \cap \bigcup_{1\le i\le n}\left(pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}}, b_k\right]_{J_i}\right)^C\right) \\
\overset{\text{monoton fallend}}{\subset} \quad & \bigcup_{1\le i\le n}\left(pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}(a_k, b_k]_{J_i}\right)\right. \\
& \left.\cap pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}}, b_k\right]_{J_i}\right)^C\right) \\
= \quad & \bigcup_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left(a_k, a_k+\frac{1}{k_{J_i}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Da $P_0 : Z \to \mathbb{R}$ additiv ist, gilt

$$\begin{aligned}
& P_0\left[pr_{J_n}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n}(a_k,b_k]_{J_n}\right)\setminus\bigcap_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}},b_k\right]_{J_n}\right)\right]\\
\le\ & P_0\left[\bigcup_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left(a_k,a_k+\frac{1}{k_{J_i}}\right)\right)\right]\\
\le\ & \sum_{1\le i\le n} P_{J_i}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(a_k,a_k+\frac{1}{k_{J_i}}\right)_{J_i}\right]\\
\le\ & \sum_{1\le i\le n}\frac{r}{2^{n+1}}\\
\le\ & \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
A\subset B\quad &\Rightarrow\quad A+B\setminus A=B\\
&\Rightarrow\quad P[A]+P[B\setminus A]=P[B]\\
&\Rightarrow\quad P[A]=P[B]-P[B\setminus A]
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}},b_k\right]_{J_i}\right)\right]\\
=\ & P_0\left[pr_{J_n}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n}(a_k,b_k]_{J_n}\right)\right]\\
& -P_0\left[pr_{J_n}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n}(a_k,b_k]_{J_n}\right)\setminus\bigcap_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}},b_k\right]_{J_n}\right)\right]\\
\ge\ & r-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \bigcap_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}},b_k\right]_{J_i}\right)\neq\emptyset$$

**2.)** Zeige: $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists$ kompaktes $C_n\in\mathbb{B}^{J_n}$ :

$$\bigcap_{1\le i\le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k+\frac{1}{k_{J_i}},b_k\right]_{J_i}\right)=pr_{J_n}^{-1}(C_n)$$

$n = 1$:

$$C_1 = \sum_{k=1}^{N_1} \left[ a_k + \frac{1}{k_{J_1}}, b_k \right]_{J_1}$$

ist kompakt.
$n \to n+1$: Wegen $J_n \subset J_{n+1}$ und

$$pr_{J_n} = pr_{J_n}^{J_{n+1}} \circ pr_{J_{n+1}}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \bigcap_{1 \leq i \leq n+1} pr_{J_i}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N_i} \left[ a_k + \frac{1}{k_{J_i}}, b_k \right]_{J_{n+1}} \right) \\
= \; & pr_{J_{n+1}}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N_i} \left[ a_k + \frac{1}{k_{J_{n+1}}}, b_k \right]_{J_{n+1}} \right) \\
& \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} pr_{J_i}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N_i} \left[ a_k + \frac{1}{k_{J_i}}, b_k \right]_{J_n} \right) \\
= \; & pr_{J_{n+1}}^{-1}(B_{n+1}) \cap pr_{J_n}^{-1}(C_n) \\
= \; & pr_{J_{n+1}}^{-1}(B_{n+1}) \cap pr_{J_{n+1}}^{-1} \left( \left( pr_{J_n}^{J_{n+1}} \right)^{-1} (C_n) \right) \\
= \; & pr_{J_{n+1}}^{-1} \left( B_{n+1} \cap \left( pr_{J_n}^{J_{n+1}} \right)^{-1} (C_n) \right)
\end{aligned}$$

Da $C_n$ kompakt und somit abgeschlossen ist und da

$$pr_{J_n}^{J_{n+1}} : \mathbb{R}^{J_{n+1}} \to \mathbb{R}^{J_n}$$

stetig ist, ist $(pr_{J_n}^{J_{n+1}})^{-1}(C_n)$ abgeschlossen.
Da $B_{n+1}$ kompakt ist, ist

$$C_{n+1} := \underbrace{B_{n+1}}_{\text{kompakt}} \cap \underbrace{\left( pr_{J_n}^{J_{n+1}} \right)^{-1} (C_n)}_{\text{abgeschlossen}} \in \mathbb{B}^{J_{n+1}}$$

kompakt.
**3.)** Wegen

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; pr_{J_n}^{-1}(C_n) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} pr_{J_i}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N_i} \left[ a_k + \frac{1}{k_{J_i}}, b_k \right]_{J_i} \right) \neq \emptyset$$

gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \mathbb{R}^T : x_n \in \bigcap_{1 \le i \le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k + \frac{1}{k}_{J_i}, b_k\right]_{J_i}\right)$$

und

$$\begin{aligned}
\forall n, m \in \mathbb{N} \quad x_{n+m} &\in \bigcap_{1 \le i \le n+m} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k + \frac{1}{k}_{J_i}, b_k\right]_{J_i}\right) \\
&\subset \bigcap_{1 \le i \le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i}\left[a_k + \frac{1}{k}_{J_i}, b_k\right]_{J_n}\right) \\
&\subset pr_{J_n}^{-1}(C_n)
\end{aligned}$$

d.h.

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : pr_{J_n}(x_{n+m}) \in C_n$$

Wegen der Kompaktheit von $C_1$ existiert eine Teilfolge $(x_{1+m_{1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{1+m})_{m\in\mathbb{N}}$ und ein $y_1 \in C_1$ mit

$$\lim_{j\to\infty} pr_{J_1}(x_{1+m_{1,j}}) = y_1$$

$n-1 \to n$: Wegen der Kompaktheit von $C_n$ existiert eine Teilfolge $(x_{n+m_{n,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{n+m_{n-1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $y_n \in C_n$ mit

$$\lim_{j\to\infty} pr_{J_n}(x_{n+m_{n,j}}) = y_n$$

$\forall i \le n-1$ ist $(x_{n+m_{n,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_{i+m_{i,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ und es gilt weiterhin

$$\lim_{j\to\infty} pr_{J_i}(x_{n+m_{n,j}}) = y_i$$

Wegen $J_{n-1} \subset J_n$ und der Stetigkeit von $pr_{J_{n-1}}^{J_n}$ gilt

$$\begin{aligned}
y_{n-1} &= \lim_{j\to\infty} pr_{J_{n-1}}(x_{n+m_{n,j}}) \\
&= \lim_{j\to\infty} pr_{J_{n-1}}^{J_n} pr_{J_n}(x_{n+m_{n,j}}) \\
&= pr_{J_{n-1}}^{J_n} \lim_{j\to\infty} pr_{J_n}(x_{n+m_{n,j}}) \\
&= pr_{J_{n-1}}^{J_n}(y_n)
\end{aligned}$$

Da $(x_{n+m_{n,n}})_n$ Teilfolge aller $(x_{n+m_{n,j}})_j$ ist, gilt

$$\forall i \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} pr_{J_i}(x_{n+m_{n,n}}) = y_i$$

**4.)** Definiere $x \in \mathbb{R}^T$ durch

$$\forall t \in T: \; x_t := \begin{cases} pr_t(y_i) & \text{für } \exists i \in \mathbb{N}: \; t \in J_i \\ pr_t(y_1) & \text{für } t \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \end{cases}$$

Sei $t \in J_i \subset J_k$. Da $pr_t$ die t-te Komponente auswählt und $J_i \subset J_k$, gilt

$$\begin{aligned} pr_t(x) &\overset{t \in J_i,\ \text{Definition}}{=} pr_t(y_i) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} pr_t\left(pr_{J_i}^{J_{i+1}} \dots pr_{J_{k-1}}^{J_k}(y_k)\right) \\ &\overset{t \in J_i \subset J_k}{=} pr_t(y_k) \\ &\overset{t \in J_k,\ \text{Definition}}{=} pr_t(x) \end{aligned}$$

**5.)** Für $t \in J_i$ gilt

$$pr_t\left(pr_{J_n}(x)\right) \overset{t \in J_n}{=} pr_t(x) \overset{t \in J_n}{=} pr_t(y_n)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: \; pr_{J_n}(x) = y_n \; &\in \; C_n \\ \forall n \in \mathbb{N}: \; x \; &\in \; pr_{J_n}^{-1}(C_n) \\ x \; &\in \; \bigcap_{n=1}^{\infty} pr_{J_n}^{-1}(C_n) \\ x \; &\in \; \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{1 \le i \le n} pr_{J_i}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_i} \left[a_k + \frac{1}{k_{J_i}}, b_k\right]_{J_i}\right) \\ &\subset \; \bigcap_{n=1}^{\infty} pr_{J_n}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n} (a_k, b_k]\right) \end{aligned}$$

d.h.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} pr_{J_n}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n} (a_k, b_k]_{J_n}\right) \neq \emptyset$$

Wegen

$$P\left[pr_J^{-1}((a_k, b_k]_J)\right] = P_J\left[(a_k, b_k]_J\right]$$

folgt die Behauptung

$$P_J = P[pr_J^{-1}(\cdot)]$$

■

**Satz 66.12** *$\forall J \subset T, 0 < |J| < \infty$ sei $P_J$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^J, \mathbb{B}^J)$ und $(P_J)_{0<|J|<\infty}$ verträglich. Dann gilt*
*$\exists!$ Wahrscheinlichkeitsmaß $P$ auf $(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T)$ mit*

$$\forall 0 < |J| < \infty : \; P_J = P\left[pr_J^{-1}(\cdot)\right]$$

**Beweis.** Da $P_0$ auf dem Ring Z abzählbar additiv ist und P endlich ist, existiert eine eindeutige Fortsetzung auf $S(Z) = \bigotimes_{t \in T} S_t$ ■

# 67. Die mehrdimensionale Normalverteilung

**Definition 67.1** *Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $C$ $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ mit $C = C^T$ und alle Eigenwerte größer Null und*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-a)^T C^{-1}(x-a)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n |\det C|}}$$

*Dann heißt f* ***Dichte der n-dimensionalen Normalverteilung*** $N(a, C)$

**Beweis.** Wegen $C = C^T$ existiert eine senkrechte Matrix B mit

$$\begin{aligned}
& BCB^T = D' = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad & C = B^T D'^{-1} B \\
\Rightarrow \quad & C^{-1} = B^{-1} D'^{-1} B^{T-1} \\
\Rightarrow \quad & BC^{-1}B^T = D'^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit den Eigenwerten $d_i$ von $C$ und den Eigenwerten $d_i^{-1}$ von $C^{-1}$.

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto B^T(x + a)$$

ist stetig, also messbar. A ist umkehrbar durch

$$A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Bx - a$$

Da $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ offen ist, gilt mit der Rechenregel für die Integration im (Ur-)Bildraum und mit

$$\begin{aligned}
A(x-a) &= B^T x \\
DA &= B^T \\
1 &= \det 1_n = \det BB^T = \det B \det B^T \\
&= (\det B)^2 = (\det DA)^2 \\
\det C &= \det B^T D' B = \det B^T \det D' \det B \\
&= \prod_{i=1}^{n} d_i
\end{aligned}$$

folgt

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-(x-a)^T C^{-1}(x-a)}{2}\right) dl^n \\
= \ & \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\det DA|}_{=1} \exp\left(\frac{-(B^T x)^T C^{-1} B^T x}{2}\right) dl^n \\
= \ & \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-x^T D'^{-1} x}{2}\right) dl^n \\
= \ & \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^n d_i^{-1} x_i^2}{2}\right) dl^n \\
= \ & \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{-d_i^{-1} x_i^2}{2}\right) dx_1 \dots dx_n \\
= \ & \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-d_i^{-1} x^2}{2}\right) dx \\
= \ & \prod_{i=1}^n \sqrt{d_i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx \\
= \ & \sqrt{2\pi}^n \prod_{i=1}^n \sqrt{d_i} \\
= \ & \sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det C}
\end{aligned}
$$

■

**Satz 67.2** *Sei $P[X^{-1}(\cdot)] = N(a, C)$. Sei $B$ eine umkehrbare $n \times n$-Matrix und $d \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$P[(BX + d)^{-1}(\cdot)] = N(Ba + d, BCB^T)$$

**Beweis.** Mit

$$
\begin{aligned}
& Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Bx + d \\
& Y^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto B^{-1}(x - d) \\
& DY^{-1} = B^{-1} \\
& \det DY = \det B^{-1} = \frac{1}{\det B}
\end{aligned}
$$

und der Rechenregel für Integration im (Ur-)Bildraum folgt

$$
\begin{aligned}
& P[Y^{-1}((-\infty, y]_{(n)})] \\
\stackrel{\text{Def}}{=} \quad & \int_{Y^{-1}((-\infty,y]_{(n)})} f^X dl^n \\
\stackrel{\text{(Ur-)Bild}}{=} \quad & \int_{(-\infty,y]_{(n)}} f^X \circ Y^{-1} |\det DY| dl^n \\
= \quad & \int_{(-\infty,y]_{(n)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(B^{-1}(x-d)-a\right)^T C^{-1}\left(B^{-1}(x-d)-a\right)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \\
& \frac{1}{\sqrt{\det B \det B^T}} dl^n \\
= \quad & \int_{(-\infty,y]_{(n)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}((x-(Ba+d))^T B^{-1T} C^{-1} B^{-1}(x-(Ba+d))\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det BCB^T}} \\
& dl^n
\end{aligned}
$$

■

**Definition 67.3** *Sei* $X : (W, S, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$ *und*

$$X_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \to x_i$$

*a) Für*

$$E[|X_i|] = \int_W |X_i| dP < \infty$$

*heißt*

$$E[X_i] = \int_W X_i dP$$

***Erwartungswert*** *von* $X_i$*.*
*b) Wenn alle* $E[X_i]$ *existieren, heißt*

$$E[X] := (E[X_1], \ldots, E[X_n])$$

***Erwartungswertvektor von X.***

**Satz 67.4** *Sei* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *und* $E[X]$ *existiert.*
*Sei* $C$ $k \times n$*-Matrix und* $d \in \mathbb{R}^k$ *und*

$$Y = CX + d$$

*Dann gilt*

$$E[Y] = CE[X] + d$$

**Beweis.** Wegen

$$Y = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{k1} & \cdots & C_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_{1i} X_i + d_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_{ki} X_i + d_k \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} E[Y] &= E \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n c_{1i} X_i + d_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_{ki} X_i + d_k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_{1i} E[X_i] + d_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_{ki} E[X_i] + d_k \end{pmatrix} \\ &= CE[X] + d \end{aligned}$$

■

**Satz 67.5** *$P[X^{-1}(\cdot)] = N(a, C)$. Dann gilt*

$$E[X] = a$$

*mit*

$$X_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \to x_i$$

**Beweis.** Mit obigem

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Bx + a$$

und

$$X_i \circ A(x) = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j + a_i$$

gilt

$$
\begin{aligned}
E[X_i] &= \int_{\mathbb{R}^n} X_i f \, dl^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\det DA|}_{=1} \underbrace{(X_i \circ A)}_{=\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j + a_i} \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{-d_k x_k^2}{2}\right) dl^n \\
&= \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n d_i}} \int_{\mathbb{R}^n} x_j \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{-d_k x_k^2}{2}\right) dl^n \\
&\quad + a_i \prod_{k=1}^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi d_k}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-d_k x_k^2}{2}\right) dx_k}_{=1} \\
&= \sum_{j=1}^n b_{ij} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_j \exp\left(\frac{-d_j x_j^2}{2}\right)}_{=0} \prod_{k=1, k\neq j}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-d_k x_k^2}{2}\right) dx_k + a_i \\
&= a_i
\end{aligned}
$$

■

**Satz 67.6** *Seien $X_1, \ldots, X_n : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit existierenden $Var X_i$. Dann heißt*

$$Kov(X) := (Kov[X_i, X_j])_{1 \leq i,j \leq n}$$

***Kovarianzmatrix von X.***
*a) Für $X = (X_1, \ldots, X_n)$ gilt*

$$
\begin{aligned}
Kov(X) &= E\left[(X - E[X])^T (X - E[X])\right] \\
&= E[X^T X] - E[X]^T E[X]
\end{aligned}
$$

*b) Kov X ist symmetrisch und die Eigenwerte sind $\geq 0$.*
*c) Ist C eine $k \times n$-Matrix, $d \in \mathbb{R}^k$ so gilt*

$$Kov(CX + d) = C Kov(X) C^T$$

**Beweis. a)**

$$
\begin{aligned}
& E[X^T X] - E[X]^T E[X] \\
= \; & E\left[(X_i X_j)_{i,j}\right] - (E[X_i] E[X_j])_{i,j} \\
= \; & (E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j])_{i,j} \\
= \; & E\left[(X_i - E[X_i]) \cdot (X_j - E[X_j])\right]_{i,j} \\
= \; & E\left[(X - E[X])^T (X - E[X])\right]
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned} & E\left[(X-E[X])^T(X-E[X])\right] \\ = \; & E\left[(X_i-E[X_i])\cdot(X_j-E[X_j])\right]_{i,j} \\ = \; & (Kov[X_i,X_j])_{1\leq i,j\leq n} \\ = \; & Kov(X) \end{aligned}$$

**b)**

$$\forall i,j: \; Kov[X_i,X_j] = Kov[X_j,X_i]$$

$\forall a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} a^T Kov(X) a &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j Kov(X_i,X_j) \\ &= Kov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right) \\ &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \geq 0 \end{aligned}$$

c) Sei $C = (c_{rs})_{1\leq r\leq k, 1\leq s\leq n}$. Dann gilt (siehe bei Erwartungswerten)

$$\begin{aligned} & (Kov[CX+d])_{ij} \\ = \; & \left(Kov\left(\sum_{r=1}^{k} c_{ir}X_r + d_i, \sum_{t=1}^{k} c_{jt}X_t + d_j\right)\right)_{i,j} \\ = \; & \left(\sum_{1\leq r,t\leq n} c_{ir}c_{jt} Kov[X_r,X_t]\right)_{i,j} \\ = \; & \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{k1} & \cdots & C_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Kov(X_1,X_1) & \cdots & Kov(X_1,X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Kov(X_n,X_1) & \cdots & Kov(X_n,X_n) \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{kn} \end{pmatrix} \\ = \; & \left(C Kov(X) C^T\right)_{1\leq i,j\leq k} \end{aligned}$$

■

**Satz 67.7** *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit $P[X^{-1}(\cdot)] = N(a, C)$. Dann gilt*

$$Kov(X) = C$$

**Beweis.** Sei B eine senkrechte Matrix mit

$$BCB^T = D' = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} P[(BX - Ba)^{-1}(\cdot)] &\overset{\text{früher}}{=} N(Ba - Ba, BCB^T) \\ &= N(0, D') \end{aligned}$$

und für $Y := BX - Ba$ gilt

$$\begin{aligned} Kov(Y_i, Y_j) &= E[Y_i Y_j] - \underbrace{E[Y_i]}_{=0}\underbrace{E[Y_j]}_{=0} \\ &= \begin{cases} \int Y_i f_i dl \cdot \int Y_j f_j dl \cdot \prod_{i \neq k \neq j} \int f_k dl & \text{für } i \neq j \\ \int Y_i^2 f_i dl \cdot \prod_{k \neq i} \int f_k dl & \text{für } i = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} \underbrace{E[Y_i]}_{=0}\underbrace{E[Y_j]}_{=0} \prod_{i \neq k \neq j} 1 & \text{für } i \neq j \\ E[Y_i^2] \prod_{k \neq i} 1 & \text{für } i = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ d_i & \text{für } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

d.h.

$$Kov(Y) = D'$$

Mit $X = B^T Y + a$ folgt

$$\begin{aligned} Kov[X] &= B^T Kov[Y] B \\ &= B^T D' B \\ &= C \end{aligned}$$

■

**Satz 67.8** *Sei $P[(X_1, \dots, X_n)^{-1}(\cdot)] = N(a, C)$. Dann gilt*

$$X_1, \dots, X_n \textit{ ist unabhängig} \iff \forall i \neq j : \; Kov(X_i, X_j) = 0$$

**Beweis.** "$\Leftarrow$":

$$
\begin{aligned}
C &= (Kov(X_i, X_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} C_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{nn} \end{pmatrix} \\
C^{-1} &= \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{nn}^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und die Dichte von X ist

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sqrt{C_{jj}}} \exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - a_j)^2}{C_{jj}} \right) \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi C_{jj}}} \exp\left( -\frac{1}{2} \frac{(x_j - a_j)^2}{C_{jj}} \right) \\
&= f_1(x_1) \dots f_n(x_n)
\end{aligned}
$$

d.h. $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig.
"$\Rightarrow$": Für unabhängige $X_1, \dots, X_n$ gilt $\forall i \neq j : \ Kov(X_i, X_j) = 0$. ∎

**Satz 67.9** *Sei $P[X_1^{-1}(\cdot)] = N(0,1)$, $Y$ unabhängig von $X$ mit*

$$
\begin{aligned}
P[Y = 1] &= \frac{1}{2} = P[Y = -1] \\
X_2 &= Y X_1
\end{aligned}
$$

*Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
P[X_2^{-1}(\cdot)] &= N(0,1) \\
Kov(X_1, X_2) &= 0
\end{aligned}
$$

*Aber $X_1, X_2$ sind **nicht unabhängig**, insbesondere sind $(X_1, X_2)$ **nicht** zweidimensional normalverteilt.*

**Beweis.** Wegen

$$
\begin{aligned}
P[X_1 \in (2,3) \cap X_2 \in (0,1)] &= P[\emptyset] = 0 \\
P[X_1 \in (2,3)] \cdot P[X_2 \in (0,1)] &> 0
\end{aligned}
$$

sind $X_1, X_2$ nicht unabhängig.

$$\begin{aligned}
& P[X_2^{-1}((-\infty,x])] \\
= \quad & P[(YX_1)^{-1}((-\infty,x])] \\
= \quad & P[X_1^{-1}((-\infty,x]) \cap \{Y_1 = 1\} \\
& +X_1^{-1}([-x,\infty)) \cap \{Y_1 = -1\}] \\
\overset{X_1,Y \text{ unabhängig}}{=} \quad & P[X_1^{-1}((-\infty,x])] \cdot P[Y_1 = 1] \\
& +P[X_1^{-1}([-x,\infty))] \cdot P[Y_1 = -1] \\
= \quad & \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy + \frac{1}{2}\int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy \\
= \quad & \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy \\
= \quad & P[X_1^{-1}((-\infty,x])] \\
= \quad & N(0,1)[(-\infty,x]]
\end{aligned}$$

Da $(-\infty, x]$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{B}$ ist, gilt

$$P[X_2^{-1}(\cdot)] = N(0,1)$$

und

$$\begin{aligned}
Kov(X_1, X_2) \quad & = \quad E[X_1X_2] - \underbrace{E[X_1]}_{=0}\underbrace{E[X_2]}_{=0} \\
& = \quad E[X_1^2 Y] \\
& \overset{Y,X_1 \text{ unabhängig}}{=} \quad E[X_1^2]E[Y] \\
& = \quad 1 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

■

# 68. Die Brownsche Bewegung

**Definition 68.1** *Sei* $T = [0, \infty)$ *und* $\forall t \in T: \ X_t : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$.
$X_T$ *heißt Brownsche Bewegung* $\iff$

(1) $X_0 = 0$ *P-fast sicher*

(2) $\forall t \in T : P[X_t^{-1}(\cdot)] = N(0, t)$

(3) $\forall 0 < t_1 < \ldots < t_n : X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *ist unabhängig*

(4) $\forall t, h, s, s < t: \ P\left[(X_{t+h} - X_{s+h})^{-1}(\cdot)\right] = P\left[(X_t - X_s)^{-1}(\cdot)\right]$

(5) $t \mapsto X_t$ *ist P-fast sicher stetig.*

$\iff$

$(i)$ $X_0 = 0$ *P-fast sicher*

$(ii)$ $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall 0 < t_1 < \ldots < t_n :$
$P[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^{-1}(\cdot)] = N(0, \min(t_i, t_j))$

$(iii)$ $t \mapsto X_t$ *ist P-fast sicher stetig.*

**Beweis.** "$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} P\left[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^{-1}(\cdot)\right] &\overset{(4)}{=} P\left[(X_{t_i - t_{i-1}} - X_0)^{-1}(\cdot)\right] \\ &\overset{(1)}{=} P\left[(X_{t_i - t_{i-1}})^{-1}(\cdot)\right] \\ &\overset{(2)}{=} N(0, t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Da $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}$ unabhängig sind nach (3), gilt

$$P[(X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})^{-1}(\cdot)] = N\left(0, \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}\right)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} X_{t_1} - X_{t_0} \\ \vdots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \sum_{j=1}^{i} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \\ \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
C_J &= AD_JA^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1-t_0 & t_1-t_0 & \cdots & t_1-t_0 \\ 0 & t_2-t_1 & & t_2-t_1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & t_n-t_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t_1-t_0 & t_1-t_0 & & t_1-t_0 \\ t_1-t_0 & \sum_{i=1}^2(t_i-t_{i-1}) & & \sum_{i=1}^2(t_i-t_{i-1}) \\ & & \ddots & \\ t_1-t_0 & \sum_{i=1}^2(t_i-t_{i-1}) & & \sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \\
&= (\min(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}
\end{aligned}
$$

und

$$
P[(X_{t_1}-X_0,\dots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}})^{-1}(\cdot)] = N\left(0, \begin{pmatrix} t_1-t_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n-t_{n-1} \end{pmatrix}\right)
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
& P\left[(X_{t_1},\dots,X_{t_n})^{-1}(\cdot)\right] \\
= \;& P\left[(A(X_{t_n}-X_{t_{n-1}},\dots,X_1-X_0))^{-1}(\cdot)\right] \\
= \;& N\left(A0, A\begin{pmatrix} t_1-t_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n-t_{n-1} \end{pmatrix} A^T\right) \\
= \;& N(0,\min(t_i,t_j))
\end{aligned}
$$

"$\Leftarrow$": **(3)** Wegen

$$\begin{aligned} & P\left[\left(X_{t_1}-X_{t_0},\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)^{-1}(\cdot)\right] \\ = \; & P\left[\left(A^{-1}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)^{-1}(\cdot)\right] \\ \overset{ii)}{=} \; & N\left(A^{-1}0, A^{-1}\min(t_i,t_j)\left(A^{-1}\right)^T\right) \\ = \; & N\left(0, \begin{pmatrix} t_1-t_0 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n-t_{n-1} \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

sind $X_{t_1}-X_{t_0},\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ unabhängig mit

$$P\left[(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})^{-1}(\cdot)\right] = N(0,t_i-t_{i-1})$$

**(4)** $\forall t,h,s,s<t:$

$$\begin{aligned} & P\left[(X_{t+h}-X_{s+h})^{-1}(\cdot)\right] \\ = \; & N(0,t+h-(s+h)) = N(0,t-s) \\ = \; & P\left[(X_t-X_s)^{-1}(\cdot)\right] \end{aligned}$$

**(2)**

$$\begin{aligned} P\left[X_t^{-1}(\cdot)\right] &= P\left[(X_t-X_0)^{-1}(\cdot)\right] \\ &= N(0,t-0) = N(0,t) \end{aligned}$$

■

**Satz 68.2** *Zur Brownschen Bewegung existiert ein eindeutiges Maß auf* $[0,\infty)$.

**Beweis.**

$$\begin{aligned} & P\left[\left(X_{t_1}-X_0,\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)^{-1}\left(pr^{\{t_1,\ldots,t_n\}}_{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}\right)^{-1}(a,b]_{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}\right] \\ = \; & \int_{(a,b]_{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}\times(W_t)_{t\in\{t_1,\ldots,t_n\}\setminus\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}} \frac{\prod_{j=1}^n \exp\frac{-x_j^2}{d_j}}{\sqrt{(2\pi)^n\prod_{j=1}^n d_j}}dx_1\ldots dx_n \\ = \; & \int_{(a,b]_{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}} \frac{\prod_{j=1}^k \exp\frac{-x_{i_j}^2}{d_{i_j}}}{\sqrt{(2\pi)^k\prod_{j=1}^k d_{i_j}}}dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} \\ = \; & P\left[\left(X_{t_{i_1}}-X_0,\ldots,X_{t_{i_k}}-X_{t_{i_{k-1}}}\right)^{-1}(a,b]_{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}\right] \end{aligned}$$

Da $(a,b]_{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{B}^{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}$ ist, gilt $\forall C \in \mathbb{B}^{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}$

$$\begin{aligned} & P\left[\left(X_{t_1}-X_0,\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)^{-1}\left(pr^{\{t_1,\ldots,t_n\}}_{\{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}}\right)^{-1}(C)\right] \\ = \quad & P\left[\left(X_{t_{i_1}}-X_0,\ldots,X_{t_{i_k}}-X_{t_{i_{k-1}}}\right)^{-1}(C)\right] \end{aligned}$$

d.h. die

$$P\left[\left(X_{t_1}-X_0,\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\right)^{-1}(\cdot)\right]$$

sind verträglich. Analog zeigt man, dass

$$P\left[\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)^{-1}(\cdot)\right]$$

verträglich sind.
Dann erhält man ein eindeutiges Maß P zur Brownschen Bewegung auf $(0,\infty)$.
Mit dem Punktmaß $\delta_0$ in 0 existiert ein eindeutiges $P\otimes\delta_0$ auf $[0,\infty)$. ■

# 69. Konstruktion auf $[0,1]$ als $L^2$-Grenzwert

**Satz 69.1** *Für $n \in \mathbb{N}$ sind*

$$\begin{aligned} b_{0,0} &\equiv 1_{[0,1)} \\ \forall 1 \leq k \leq 2^n: \ b_{n,k} &= \begin{cases} 2^{n/2} & \textit{für } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ -2^{n/2} & \textit{für } \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

*eine senkrechte Basis mit Länge 1 von $L^2[0,1]$.*

**Beweis. 1.) senkrecht** Wegen

$$\{t \in [0,1] : b_{n,k}(t) \neq 0\} \subset \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned} \forall n \ \forall k \neq j: \ & b_{n,k} b_{n,j} = 0 \\ \forall n \ \forall k \neq j: \ & \int_0^1 b_{n,k} b_{n,j} dt = 0 \end{aligned}$$

Wegen

$$\forall n > m \ \forall t \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right): \ b_{m,j} = c = \text{ konstant}$$

gilt

$$\begin{aligned} \forall n > m \ \forall k, j: \quad & \int_0^1 b_{n,k} b_{m,j} dt \\ = \ & \int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} b_{n,k} b_{m,j} dt \\ = \ & c \int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \underbrace{b_{n,k}}_{=2^{n/2}} dt + c \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} \underbrace{b_{n,k}}_{=-2^{n/2}} dt \\ = \ & c \frac{1}{2^{n+1}} 2^{n/2} - c \frac{1}{2^{n+1}} 2^{n/2} \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

**2.) Länge 1**

$$\begin{aligned}\forall n > m\ \forall k, j: \qquad & \int_0^1 b_{n,k} b_{n,k} dt \\ = & \int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \left(2^{n/2}\right)^2 dt + \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} \left(-2^{n/2}\right)^2 dt \\ = & \frac{2^n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ = & 1\end{aligned}$$

**3.) vollständig** Wir zeigen

$$\forall n\ \forall 1 \leq k \leq 2^n: \ 1_{\left[0, \frac{k}{2^n}\right)} \in \overline{Lin(b_{n,k})}$$

$n = 0$:

$$1_{[0,1)} = b_{0,0} \in \overline{Lin(b_{n,k})}$$

$n = 1$: Wegen

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= 1_{[0,1)} \\ b_{0,1} &= \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

gilt

$$1_{[0,\frac{1}{2})} = \frac{b_{0,1} + b_{0,0}}{2}$$

$n - 1 \to n$: Ist k durch 2 teilbar, d.h. $k = 2m$, so gilt

$$\left[0, \frac{k}{2^n}\right) = \left[0, \frac{2m}{2^n}\right) = \left[0, \frac{m}{2^{n-1}}\right)$$

und mit dem Fall $n - 1$ gilt

$$1_{\left[0, \frac{k}{2^n}\right)} \in \overline{Lin(b_{n,k})}$$

Sei k nicht durch 2 teilbar, dann ist $k - 1$ durch 2 teilbar und

$$1_{\left[0, \frac{k-1}{2^n}\right)} \in \overline{Lin(b_{n,k})}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} b_{n,k} &= \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \le t < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ -1 & \text{für } \frac{2k-1}{2^{n+1}} \le t < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
2\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} b_{n+1,2k} &= \begin{cases} 2 & \text{für } \frac{4k-2}{2^{n+2}} \le t < \frac{4k-1}{2^{n+2}} \\ -2 & \text{für } \frac{4k-1}{2^{n+2}} \le t < \frac{4k}{2^{n+2}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
4\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}} b_{n+2,4k} &= \begin{cases} 4 & \text{für } \frac{8k-2}{2^{n+3}} \le t < \frac{8k-1}{2^{n+3}} \\ -4 & \text{für } \frac{8k-1}{2^{n+3}} \le t < \frac{8k}{2^{n+3}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

gilt

$$1_{[0,\frac{k}{2^n})} = 1_{[0,\frac{k-1}{2^n})} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{2^{(n+j)/2}} b_{n+j,2^j k} \in \overline{Lin(b_{n,k})}$$

Sei $x \in (0,1)$ beliebig. Durch Intervallhalbierung konstruiere eine Folge $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ durch
$n = 0$:

$$a_0 = 0, b_0 = 1$$

$n \to n+1$:

$$\begin{array}{ll}
\forall k \ge 1: \ a_{n+k} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}} = b_{n+k} & \text{für } x = a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \\
a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{für } x \in \left(a_n, a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}}, b_{n+1} = a_n & \text{für } x \in \left(a_n + \frac{1}{2^{n+1}}, b_n\right)
\end{array}$$

Da $(a_n)_n$ monoton wachsend und $(b_n)_n$ monoton fallend ist und beide beschränkt sind, haben sie einen Grenzwert $a$ und $b$ und mit $|b_n - a_n| \le 2^{-n}$ gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\forall x \in (0,1): \ [0,x) \in Lin\overline{\left\{\frac{k}{2^n} \ : \ 1 \le k \le 2^n, n \in \mathbb{N}\right\}} \\
\forall x \in (0,1): \ [0,x) \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}}
\end{aligned}$$

Setze

$$S_1 = \{A \in \mathbb{B}: \ 1_A \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}}\}$$

Wegen

$$\begin{array}{rcl} & & \emptyset \in S_1 \\ A \in S_1 & \Rightarrow & 1_A \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}} \\ & \Rightarrow & 1_{A^C} = 1 - 1_A \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}} \\ & \Rightarrow & A^C \in S_1 \\ A_i \in S_1 & \Rightarrow & 1_{A_i} \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}} \\ & \Rightarrow & 1_{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}} \\ & \Rightarrow & \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S_1 \end{array}$$

ist $S_1$ schnittleere abzählbare Algebra.
Da $\{[0,x) :\ x \in (0,1)\}$ durchschnittsstabil ist, gilt

$$\mathbb{B}|_{[0,1]} = S_1$$

d.h.

$$\forall \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in T :\ \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}}$$
$$\forall \text{messbaren } Y \geq 0 :\ Y \in Lin\overline{\{b_{n,k}\}}$$

■

**Satz 69.2** $\forall n\ \forall 1 \leq k \leq 2^n$

$$B_{n,k} : [0,1] \to [0,1], t \mapsto \int_0^t b_{n,k}(s)ds = \langle 1_{[0,t]}, b_{n,k} \rangle$$

*sind stetig und es gilt*

$$\begin{array}{rcl} \{t \in [0,1] :\ B_{n,k}(t) \neq 0\} & \subset & \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right) \\ \| B_{n,k} \|_\infty & = & 2^{-\frac{n}{2}-1} \\ \forall k \neq l :\ B_{n,k}B_{n,l} & = & 0 \end{array}$$

**Beweis. a)** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $\delta < \frac{\varepsilon}{2^{n/2}}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} |B_{n,k}(t+\delta) - B_{n,k}(t)| & = & \left| \displaystyle\int_0^{t+\delta} b_{n,k}(s)ds - \int_0^t b_{n,k}(s)ds \right| \\ & = & \left| \displaystyle\int_t^{t+\delta} b_{n,k}(s)ds \right| \\ & \leq & 2^{n/2}\delta < \varepsilon \end{array}$$

**b)** Wegen

$$\forall 1 \leq k \leq 2^n : \begin{cases} b_{n,k} > 0 & \text{für } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ b_{n,k} < 0 & \text{für } \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ b_{n,k} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

$$\begin{array}{ll} \int_0^t b_{n,k}(s)ds \text{ ist monoton steigend} & \text{für } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ \int_0^t b_{n,k}(s)ds \text{ ist monoton fallend} & \text{für } \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ \int_0^t b_{n,k}(s)ds \text{ ist konstant} & \text{sonst} \end{array}$$

und

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,1]} B_{n,k}(t) &= B_{n,k}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \int_0^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} b_{n,k}(s)ds \\ &= \int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} 2^{n/2}(s)ds \\ &= 2^{n/2}\frac{1}{2^{n+1}} = 2^{-\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[0, \frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) : \int_0^t b_{n,k}(s)ds &= \int_0^t 0ds = 0 \\ \forall t \in \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, 1\right) : \int_0^t b_{n,k}(s)ds &= \int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} 2^{n/2}dt + \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} -2^{n/2}dt = 0 \end{aligned}$$

**c)** Wegen

$$\begin{aligned} \{t \in [0,1] : B_{n,k}(t) \neq 0\} &\subset \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \\ \{t \in [0,1] : B_{n,l}(t) \neq 0\} &\subset \left[\frac{l-1}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \forall k \neq l \ \forall t \in [0,1] : \ B_{n,k}(t)B_{n,l}(t) &= 0 \\ \forall k \neq l : \ B_{n,k}B_{n,l} &= 0 \end{aligned}$$

■

**Satz 69.3** *Seien* $\forall 1 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N} : Y_{n,k} : (W, S, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *unabhängig und* $\forall n, k : \; P[Y_{n,k}^{-1}(\cdot)] = N(0,1)$*. Sei*

$$\begin{aligned} X^n(w,t) &:= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=1}^{2^m} Y_{m,k}(w) B_{m,k}(t) \in L^2(W,S,P) \cap (C[0,1], \| \cdot \|_\infty) \\ X(w,t) &:= \lim_{n\to\infty} X^n(w,t) \end{aligned}$$

*Dann ist* $X$ *eine Brownsche Bewegung und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \| X_t^n - X_t \|_\infty = 0 \text{ } P\text{-fast sicher}$$

**Beweis. 0.)** Zeige

$$\forall n \geq 8 : \; \sqrt{2}^n > n\left(1 + \frac{\ln 2}{2}\right)$$

n=8:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}^8 &= 2^4 = 16 \\ &> 8\left(1 + \underbrace{\frac{\ln 2}{2}}_{<1}\right) \end{aligned}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}^{n+1} &= \sqrt{2}\sqrt{2}^n \\ &\geq \sqrt{2} \cdot n\left(1 + \frac{\ln 2}{2}\right) \\ &= n\left(1 + \frac{\ln 2}{2}\right) + \underbrace{(\sqrt{2}-1) \cdot n}_{>1 \text{ für } n \geq 2}\left(1 + \frac{\ln 2}{2}\right) \\ &> (n+1)\left(1 + \frac{\ln 2}{2}\right) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{array}{rl}
& \forall n \geq 8: \ \sqrt{2}^n \geq n\left(1+\dfrac{\ln 2}{2}\right) = n + \dfrac{n}{2}\ln 2 \\
\overset{n \geq \ln n}{\Rightarrow} & \forall n \geq 8: \ \sqrt{2}^n \geq \ln n + \dfrac{n}{2}\ln 2 \\
\Longleftrightarrow & \forall n \geq 8: \ 2^{\frac{n}{2}} \geq \ln n + \dfrac{n}{2}\ln 2 \\
\Longleftrightarrow & \forall n \geq 8: \ 2^{\frac{n}{2}+1} \geq 2\ln n + n\ln 2 \\
\Longleftrightarrow & \forall n \geq 8: \ -2^{\frac{n}{2}+1} \leq -\ln\left(n^2 2^n\right) \\
\Longleftrightarrow & \forall n \geq 8: \ \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right) \leq \dfrac{1}{n^2 2^n} \\
\Longleftrightarrow & \forall n \geq 8: \ 2^n \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right) \leq \dfrac{1}{n^2}
\end{array}$$

und somit

$$\begin{array}{rl}
& \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right) \\
\leq & \displaystyle\sum_{n=1}^{7} 2^n \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right) + \sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
< & \infty
\end{array}$$

**1.)** Da

$$\begin{array}{rcl}
\| B_{n,k} \|_\infty & = & 2^{-\frac{n}{2}-1} \\
\forall k \neq l: \ B_{n,k}B_{n,l} & = & 0
\end{array}$$

gilt

$$\begin{array}{rcl}
\| X^n - X^{n-1} \|_\infty & = & \left\| \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} Y_{n,k} B_{n,k} \right\|_\infty \\
& = & 2^{-\frac{n}{2}-1} \max\left\{|Y_{n,k}| : 1 \leq k \leq 2^n\right\}
\end{array}$$

Wegen

$$\begin{array}{rl}
& \| X^n - X^{n-1} \|_\infty > 2^{-\frac{n}{4}} \\
\Longleftrightarrow & 2^{-\frac{n}{2}-1} \max\left\{|Y_{n,k}| : 1 \leq k \leq 2^n\right\} > 2^{-\frac{n}{4}} \\
\Longleftrightarrow & \max\left\{|Y_{n,k}| : 1 \leq k \leq 2^n\right\} > 2^{-\frac{n}{4}} 2^{\frac{n}{2}+1} = 2^{\frac{n}{4}+1}
\end{array}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& P\left[\| X^n - X^{n-1} \|_\infty > 2^{-n/4}\right] \\
\overset{s.o.}{=} \quad & P\left[\sum_{k=1}^{2^n} \left\{|Y_{n,k}| > 2^{\frac{n}{4}+1}\right\}\right] \\
= \quad & \sum_{k=1}^{2^n} P\left[|Y_{n,k}| > 2^{\frac{n}{4}+1}\right] \\
= \quad & 2^n \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{2^{\frac{n}{4}+1}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
= \quad & \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-\left(y + 2^{\frac{n}{4}+1}\right)^2}{2}\right) dy \\
= \quad & \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \underbrace{\exp\left(-2^{\frac{n}{4}+1} y\right)}_{\leq 1} \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right) dy \\
\leq \quad & \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right) \int_0^\infty \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy \\
= \quad & 2^n \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right)
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\| X^n - X^{n-1} \|_\infty > 2^{-n/4}\right] \\
\leq \quad & \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \exp\left(-2^{\frac{n}{2}+1}\right) \\
\overset{0.)}{<} \quad & \infty
\end{aligned}$$

und mit dem 0-1-Gesetz gilt

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} \left\{\| X^n - X^{n-1} \|_\infty \leq 2^{-n/4}\right\}\right] = 1$$

$$\exists N \ \forall k \geq N : \| X^k - X^{k-1} \|_\infty \leq 2^{-n/4} \text{ P-fast sicher}$$

Für $m > n \geq N_1 \geq N$ gilt P-fast sicher

$$\begin{aligned}
\| X^m - X^n \|_\infty &= \left\| \sum_{i=1}^{m-n} \left( X^{n+i} - X^{n+i-1} \right) \right\|_\infty \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-n} \left\| X^{n+i} - X^{n+i-1} \right\|_\infty \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-n} 2^{-\frac{n+i}{4}} \\
&\leq 2^{-\frac{n}{4}} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{i}{4}} \\
&\leq 2^{-\frac{N_1}{4}} \frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 > N \; \forall n, m \geq N_1 : \| X^m - X^n \|_\infty < \varepsilon$$

und $(X^n)_n$ ist P-fast sicher eine Cauchyfolge im vollständigen $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$.
Damit hat $(X^n)_n$ einen Grenzwert $X \in (C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$.
**2.)** Für die unabhängigen $Y_{j,k}, Y_{i,l}$ gilt

$$\begin{aligned}
E[Y_{j,k}] &= 0 \\
E[Y_{j,k}^2] &= 1 \\
\text{Für } i \neq j \text{ oder } k \neq l: \; E[Y_{j,k} Y_{i,l}] = E[Y_{j,k}] E[Y_{i,l}] &= 0
\end{aligned}$$

Da die $b_{j,k}$ eine senkrechte Basis mit Länge 1 sind, gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} B_{j,k}(t)^2 &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \left\langle 1_{[0,t]}, b_{j,k} \right\rangle^2 \\
&\overset{\text{Basis}}{=} \| 1_{[0,t]} \|_2^2 = t < \infty
\end{aligned}$$

und

$$\forall t \in (0,1] : \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2^j} B_{j,k}(t)^2 \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Für $n \geq m$ gilt

$$\begin{aligned}
\|X_t^n - X_t^m\|_2^2 &= E\left[(X_t^m - X_t^n)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{j=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} Y_{j,k}B_{j,k}\right)\left(\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{l=1}^{2^i} Y_{i,l}B_{i,l}\right)\right] \\
&= \sum_{i,j=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j}\sum_{l=1}^{2^i} B_{j,k}(t)B_{i,l}(t)E\left[Y_{j,k}Y_{i,l}\right] \\
&= \sum_{j=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} B_{j,k}(t)^2
\end{aligned}$$

d.h. $(X_t^n)_n$ ist eine Cauchyfolge in $L^2(W, S, P)$ und hat einen $L^2$-Grenzwert $X_t$.

**3.)** Damit gilt es auch für endlich viele Punkte

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall 0 < t_1 < \ldots < t_N : \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N}(X_{t_i}^n - X_{t_i})^2\right] = 0$$

und es folgt

$$(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_N}^n) \text{ geht gegen } (X_{t_1}, \ldots, X_{t_N}) \text{ nach Wahrscheinlichkeit P}$$

Da $(Y_{j,k})_{1\leq j\leq n, 1\leq k\leq 2^j}$ unabhängig sind, gilt

$$P[(Y_{1,1}, \ldots, Y_{n,2^n})^{-1}(\cdot)] = N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Mit

$$\begin{pmatrix} X_{t_1}^n \\ \vdots \\ X_{t_N}^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} B_{1,1}(t_1) & \cdots & B_{n,2^n}(t_1) \\ \vdots & & \\ B_{1,1}(t_N) & \cdots & B_{n,2^n}(t_N) \end{pmatrix}}_{=B} \begin{pmatrix} Y_{1,1} \\ \vdots \\ Y_{n,2^n} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& P[(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_N})^{-1}(\cdot)] \\
= \; & P\left[B(Y_{1,1}, \dots, Y_{n,2^n})^{-1}(\cdot)\right] \\
= \; & N\left(0, B\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} B^T\right) \\
= \; & N\left(0, \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} B_{j,k}(t_i)B_{j,k}(t_l)\right)_{i,l}\right)
\end{aligned}$$

Mit

$(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_N})$ geht gegen $(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})$ nach Wahrscheinlichkeit P

folgt

$$P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})^{-1}(\cdot)] = N\left(0, \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j} B_{j,k}(t_i)B_{j,k}(t_l)\right)_{i,l}\right)$$

**4.)** Wegen

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X^n_s - X_s|\right] \le \lim_{n\to\infty} E\left[|X^n_s - X_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

ist $(X^n_s - X_s)_n$ gleichgradig integrierbar.
Wegen $X_s \in L^1$ ist $(X^n_s)_n$ gleichgradig integrierbar.
Da $\lim_{n\to\infty} X^n_t = X_t$ P-fast sicher folgt

$$E\left[\lim_{n\to\infty} X^n_t\right] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{E\left[X^n_t\right]}_{=0} = 0$$

**5.)** Für $s, t \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
& Kov\left[X_s^n, X_t^n\right] \\
= \; & E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} Y_{j,k}B_{j,k}(s)\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{2^i} Y_{i,l}B_{i,l}(t)\right] \\
& -E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} Y_{j,k}B_{j,k}(s)\right] E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^i} Y_{i,l}B_{i,l}(t)\right] \\
= \; & \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{2^i} B_{j,k}(s)B_{i,l}(t)E\left[Y_{j,k}Y_{i,l}\right] \\
& -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{2^i} B_{j,k}(s)B_{i,l}(t)\underbrace{E\left[Y_{j,k}\right]}_{=0}\underbrace{E\left[Y_{i,l}\right]}_{=0} \\
= \; & \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} B_{j,k}(s)B_{j,k}(t) \\
= \; & \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} \left\langle 1_{[0,s]}, b_{j,k}\right\rangle \left\langle 1_{[0,t]}, b_{j,k}\right\rangle
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E\left[|X_t^n|^2\right] &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^j} \left\langle 1_{[0,t]}, b_{j,k}\right\rangle^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j} \left\langle 1_{[0,t]}, b_{j,k}\right\rangle^2 \\
&= \left\|1_{[0,t]}\right\|_2^2 = t
\end{aligned}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \| X_t^n \|_2^2 \leq \| 1_{[0,t]} \|_2^2 = t < \infty$$

Wegen

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\to\infty} E\left[|X_s^n X_t^n - X_s X_t|\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} E\left[|X_s^n (X_t^n - X_t)|\right] + \lim_{n\to\infty} E\left[|X_t^n (X_s^n - X_s)|\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{E\left[|X_s^n|^2\right]}_{\leq s \leq 1} E\left[|X_t^n - X_t|^2\right] + \lim_{n\to\infty} \underbrace{E\left[|X_t|^2\right]}_{\leq t \leq 1} E\left[|X_s^n - X_s|^2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ist $(X_s^n X_t^n - X_s X_t)_n$ gleichgradig integrierbar.
Wegen $X_s X_t \in L^1$ ist $(X_s^n X_t^n)_n$ gleichgradig integrierbar und da

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} X_t^n &= X_t \text{ P-fast sicher} \\
\lim_{n\to\infty} X_s^n &= X_s \text{ P-fast sicher} \\
\lim_{n\to\infty} X_t^n X_s^n &= X_t X_s \text{ P-fast sicher}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
Kov(X_s, X_t) &= E[X_t X_s] - E[X_t]E[X_s] \\
&= E\left[\lim_{n\to\infty} X_t^n X_s^n\right] - E\left[\lim_{n\to\infty} X_t^n\right] E\left[\lim_{n\to\infty} X_s^n\right] \\
&\overset{\text{gleichgradig}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(E\left[X_t^n X_s^n\right] - E\left[X_t^n\right] E\left[X_s^n\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} Kov(X_s^n, X_t^n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2^j} \left\langle 1_{[0,s]}, b_{j,k} \right\rangle \left\langle 1_{[0,t]}, b_{j,k} \right\rangle \\
&= \left\langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \right\rangle = \min(s,t)
\end{aligned}$$

■

# Literaturverzeichnis

J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer, Berlin, 2005
H.-O. Georgii, *Stochastik*, de Gruyter, Berlin, 2002
A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer, Berlin, 2008
G. Opfer, *Numerische Mathematik für Anfänger*, Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden, 2001
N. Schmitz, *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie*, Teubner, Stuttgart 1996.
J. Stoer, R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 1*, Springer, Berlin, 2007
J. Stoer, R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 2*, Springer, Berlin, 2005

# Inhaltsverzeichnis

# Sachverzeichnis